F 1130

KAT

427

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XX — FASCICOLA 1

IANUARIE — MARTIE 1958

LITOGRAFIA ȘI TIPOGRAFIA ÎNVĂȚĂMÎNTULUI, BUCUREȘTI

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках продожением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производится по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием **„pentru Buletinul Institutului“)**

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges des publications est la suivante:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului“)

MŰSZAKI KÖNYVTÁR·ORSZÁGOS·1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XX — FASCICOLA 1

IANUARIE — MARTIE 1958

LITOGRAFIA ŞI TIPOGRAFIA ÎNVĂŢĂMÎNTULUI, BUCUREŞTI

COMITETUL DE REDACȚIE:

Prof. *Antoniu S. Ion*, Prof. *Ausländer Iosif*, Prof. *Buzdugan Gh.*, Conf. *Călin Sergiu*; Prof. *C. Ionescu-Bujor*, Prof. *Ionescu Tudor*; Acad. Prof. *Negrescu Traian*; Acad. Prof. *Nenițescu Costin*; Prof. *Nicolau Edmond*; Prof. *Răduleț Remus*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Tănăsescu Tudor*, membru corespondent al Academiei R.P.R.

Redactor responsabil: *Prof. C. Dinculescu*,
membru corespondent al Academiei R. P. R.

SUMAR

MATEMATICA

Pag.

M. ROȘCULEȚ — Sur une équation différentielle d'ordre n qui pour n = 2 est l'équation de Bessel 9
M. GUTMANN — Sur quelques formules intégrales classiques de la théorie des fonctions analytiques 17

AEROTERMODINAMICA

V. N. CONSTANTINESCU — Considerații asupra studiului combustiei într-un amestec de gaz în mișcare 23

HIDRAULICA

ȘT. ZAREA — Comparaison entre les canaux trapezoidaux et les canaux paraboliques 43

CHIMIE

GH. HAGYMAS — *Простой электронный вольтметры для потенциометрических титрований* 51
C. FIROIU — *Ванны для электролитического хромирования на основе сульфата хрома* 53

ELECTROTEHNICĂ

AL. TH. POPESCU — Sur l'application de la méthode des discontinuités pour l'analyse harmonique des fonctions périodiques 69
M. PREDA — Ein Beitrag zur Frage der Netzumwandlungen 151

ELECTRONICĂ

E. NICOLAU — Über Hohlleitungen mit Querschnitte die sich einem gegebenen Querschnitt nähern 161
M. DRĂGĂNESCU, GH. STANCU — Electronic oscillator with external nonlinearity 167

RADIOCOMUNICAȚII

A. MILLEA — L'impédance d'entrée des dipôles repliés 181

REZISTENȚA MATERIALELOR

GH. BUZDUGAN, A PETRE, M. BLUMENFELD — Mesures tensometriques sous l'eau à l'intérieur d'un conduit sous pression 195

RECENZII

M. SAVESCU — *Частотная-модуляция — Г. Картиану* 205

СОДЕРЖАНИЕ

Pag.

МАТЕМАТИКА

М. РОШКУЛЕЦ — Об одном диференциальном уравненин порядка n которое для n=2 переходит в уравнение бесселя 9
М. ГУТМАНН — О несколько классических интегральных формулах теорий аналитических функций 17

АЕРОТЕРМОДИНАМИКА

В. КОНСТАНТИНЕСКУ — Некоторые замечания но поводу исследования порения в движущейся смеси газа 23

ГИДРАВЛИКА

Ш. ЗАРЕА — Сравнение между трапецоидальными и параболическими каналами 43

ХИМИЯ

Г. ХАДЖИМАШ — Простой электронный вольтметр для потенциометрических титровриий 51
К. ФИРОЮ — Ванны для электролитическоко хромировиния на оснобе сульфата хрома 53

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. Т. ПОПЕСКУ — О применений метод прерывности для гармонического анализа периодических функций 69
М. ПРЕДА — Вклад по вопросу преобразования электрических цепей . 151

ЭЛЕКТРОНИКА

Е. НИКОЛАУ — О волноводах с поперечными сечениями близкие к даными 161
М. ДРЭГЭНЕСКУ, Г. СТАНКУ — Электронный генератор с внешней нелинейностью 167

РАДИОСВЯЗЬ

А. МИЛЛЕА — Входное полное сопротивление шлейфантенн 181

СОПР ТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Г. БУЗДУГАН. А. ПЕТРЕ, М. БЛЮМЕНФЕЛД — Тензометрические измерения под водой внутри трубопровода под давлением 195

РЕЦЕНЗИИ

М. СЭВЕСКУ — Частотная модуляция проф. Г. Картиану 205

CONTENTS

MATHEMATICS

M. ROȘCULEȚ — On a differential equation of n-th order which for n = 2 is the Bessel's equation 9
M. GUTMANN — On some classical integral formulae of the analytical functions theory 17

AEROTHERMODYNAMICS

V. N. CONSTANTINESCU — Consideration on the combustion within a moving gaz mixture 23

HYDRODYNAMICS

ȘT. ZAREA — Comparison between trapezoidal and parabolical channels . 43

CHEMISTRY

GH. HAGYMAȘ — Simple electronic voltmetre for potentiometric titration 51
C. FIROIU — Electrochroming in chromium sulfate baths 53

ELECTRICITY

AL. TH. POPESCU — On the applications of the method of discontinuities for the harmonic analysis of the periodic functions 69
M. PREDA — Contributions on transfiguration problem of electrical networks 151

ELECTRONICS

EDM. NICOLAU — Wawe guides with slightly deformed sections 161
M. DRĂGĂNESCU, GH. ȘTANCU — Electronic oscillator with external nonlinearity 167

RADIOCOMMUNICATIONS

A. MILLEA — The input impedance of folded dipole aerials 181

STRENGTH OF MATERIALS

GH. BUZDUGAN, A. PETRE, M. BLUMENFELD — Strain gage measurements below water in the interior of a pressure container 195

BOOKSREVIEW

M. SĂVESCU — Frequency Modulation by Gh. Cartianu 205

SOMMAIRE

Pag.

MATHÉMATIQUES

M. ROŞCULEŢ — Sur une équation différentielle d'ordre n qui pour n = 2 est l'équation de Bessel 9
M. GUTMANN — Sur quelques formules intégrales classiques de la théorie des fonctions analytiques 17

AEROTHERMODYNAMIQUE

V. N. CONSTANTINESCU — Considerations sur l'etude de la combustion dans un mélange de gaz en mouvement 23

HYDRAULIQUE

ŞT. ZAREA — Comparaison entre les canaux trapézoidaux et les canaux paraboliques 43

CHIMIE

GH. HAGYMAŞ — Voltmètre électronique simple pour des titrations potentiométriques 51
C. FIROIU — Le chromage electrolytique dans bains au sulfate de chrome 53

ÉLECTROTEHNIQUE

AL. TH. POPESCU — Sur l'application de la méthode des discontinuités pour l'analyse hormonique des fonctions périodiques 69
M. PREDA — Contributions à l'etude de la transfiguration des reseaux electriques 151

ELECTRONIQUE

EDM. NICOLAU — Sur les quides d'onde à sections légèrement deformées 161
M. DRĂGĂNESCU, GH. STANCU — Oscillateur electronique avec nonlinéarité externe 167

RADIOCOMMUNICATIONS

A. MILLEA — L'impédance d'entrée des dipôles repliés 181

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

GH. BUZDUGAN, A. PETRE, M. BLUMENFELD — Mesures tensométriques sous l'eau à l'intérieur d'un conduit sous pression 195

COMPTES RENDUS

M. SĂVESCU — La modulation de fréquence par Gh. Cartianu . . . 205

INHALT

Pag.

MATHEMATIK

M. ROȘCULEȚ — Über eine Differentialgleichung n-ter Ordnung welche für n = 2 eine Besselsche Gleichung wird 9
M. GUTMANN — Über einige klassische Integralformeln der analytischen Funktionentheorie 17

AEROTHERMODYNAMIK

V. N. CONSTANTINESCU — Betrachtungen über das Studium der Verbrennung einer in Bewegung sich befindenden Gasmischung 23

HYDRODYNAMIK

ȘT. ZAREA — Vergleich zwichen trapezoidalen und parabolischen Kanälen 43

CHEMIE

GH. HAGYMAȘ — Einfaches Röhrenvoltmeter für potentiometrische Titrierungen 51
C. FIROIU — Die Verchromung in Chromsulfatbädern 53

ELEKTROTEHNIK

AL. TH. POPESCU — Über dier Anwendung der Diskontinuitäten-Methode für die harmonische Analyse der periodischen Funktionen. 69
M. PREDA — Ein Beitrag zur Frage der Netzumwandlungen 151

ELEKTRONIK

EDM. NICOLAU — Über Hohleitungen mit Querschnitte die sich einem gegebenen Querschniett nähern 161
M. DRAGANESCU, GH. STANCU — Elektronischer Oszillator mit äusserer Nichtlinearität 167

FUNKTECHNIK

A. MILLEA — Der Eingangswiderstand von Faltdipolantennen 181

FESTIGKEITSLEHRE

GH. BUZDUGAN, A. PETRE, M. BLUMENFELD — Dehnungsmessungen unter Wasser im Innern eines Druckrohres 195

BÜCHERSCHAU

M. SAVESCU — Frequenzmodulation von Gh. Cartianu 205

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

MATEMATICĂ

512.9

SUR UNE ÉQUATION DIFFERENTIELLE D'ORDRE N QUI POUR N = 2 EST L'EQUATION DE BESSEL

par MARCEL N. ROȘCULEȚ

1. — Soit une équation différentielle d'ordre n, obtenue comme il suit

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha_1}\left[\ldots x^{\alpha_{n-1}} \frac{d}{dx}(x^{\alpha_n} y) \right] \right] = -x^{\beta} . y \tag{1}$$

où l'opérateur $\frac{d}{dx}$ est appliquée n fois, y est la fonction inconnue et $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n, \beta$ sont des constantes réelles ou complexes liées par la seule relation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta \tag{2}$$

Explicitée (1) devient:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} xy' + (x^n - \nu^n) y = 0 \tag{3}$$

équation qui est de type Fuchs en origine, et où ν est un nombre réel ou complex quelconque.

Parceque $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ sont liées seulement par (2), on peut disposer de α_i, β telle que l'équation déterminante de (1) ou (3) soit de la forme

$$r^n - \nu^n = 0$$

et cette chose est possible, parcequ'on fait ainsi intervenir $n - 1$ conditions supplémentaires qui avec (2) déterminent complètement $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ fonctions de ν qui reste arbitraire.

Dans ce qui suit nous nous occuperons de l'équation (1) avec l'équation déterminante définie par (4). Dans cette situation les coefficients a_i sont donnés par les relations

$$a_1 = \sum_1^{n-1} p = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_2 = -\sum_1^{n-1} p_1 p_2 + a_1 \sum_1^{n-2} p = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(3n-5) \tag{5}$$

$$a_3 = \sum_{1}^{n-1} p_1 p_2 p_3 - a_1 \sum_{1}^{n-2} p_1 p_2 + a_2 \sum_{1}^{n-3} p$$

. . . . . .

$$a_k = (-1)^{k+1} \sum_{1}^{n-1} p_1 p_2 \dots p_k + (-1)^k a_1 \sum_{1}^{n-2} p_1 p_2 \dots p_{k-1} + \dots + a_{k-1} \sum_{1}^{n-k} p$$

. . . . . .

$$a_{n-1} = (-1)^n (n-1)! + (-1^{n-1} a_1 (n-2! + \dots + (-1)^{n-k+1} a_k (n-k)! + \dots + a_{n-2}$$

Pour $n = 2, 3, 4, 5$, on a respectivement

(μ_1) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$

(μ_2) $x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' + (x^3 - \nu^3) y = 0$

(μ_3) $x^4 y^{IV} + 6x^3 y''' + 7 x^2 y'' + xy' + (x^4 - \nu^4) y = 0$

(μ_4) $x^5 y^V + 10 x^4 y^{IV} + 25 x^3 y''' + 15 x^2 y'' + xy' + (x^5 - \nu^5) y = 0$

Par la transformation $x = e^t$, les équations (μ_i) deviennent

$$y^{(m)} + (e^{mt} - \nu^m) y = 0$$

avec $m = 2, 3, 4, 5$. Ce résultat est général. Pour prouver cela il est suffisamment de montrer que par la même transformation $x = e^t$ l'équation

$$x^n y^{(n)} + a_1 y^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} xy' = 0 \qquad (6)$$

devient

$$y^{(n)} = 0$$

c'est-à-dire que l'équation caractéristique de (6) est

$$\lambda^n = 0 .$$

Mais cette équation est

$$\lambda (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + a_1 \lambda (\lambda - 1) \dots (\lambda - n) + \dots + a_{n-1} \lambda = 0$$

qui pour a_i données par (5) se réduit justement à $\lambda^n = 0$. Donc l'équation étudiée dans ce travail se déduit de

$$y^{(n)} + (e^{nt} - \nu^n) y = 0 \qquad (7)$$

par la transformation $x = e^t$.

2. — Si l'on cherche solutions de la forme

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m, \quad (b_o \neq 0) \tag{8}$$

on a

$$r^n = \nu^n \tag{9}$$

et

$$b_i = 0, \ i \not\equiv 0 \pmod{n} \tag{10}$$

Pour b_{nk} on obtient

$$A_k \, b_{nk} = - b_{n(k-1)}$$

où

$$\begin{aligned} A_k = {} & (r+kn)\ (r+kn-1) \ldots (r+kn-n+1) + \\ & + a_1\ (r+kn)\ (r+kn-1) \ldots (r+kn-n+2) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_k\ (r+kn)\ (r+kn-1) \ldots (r+kn-n+k+1) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n-1}\ (r+kn) - \nu^n = (\nu+kn)^n - \nu^n \end{aligned}$$

qui donne

$$b_{nk} = \frac{(-1)^k \, b_o}{(\nu+kn)^n - \nu^n} \tag{11}$$

Si ε_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont les racines de $\varepsilon^n = 1$, on a pour $r = \varepsilon_j \nu$

$$b_{nk} = \frac{(-1)^k}{n^{kn+\nu\varepsilon_j}} \left[\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\nu \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_i}{n} + k + 1 \right) \right]^{-1}$$

où on a mit

$$b_o = \frac{1}{n^{\varepsilon_j \nu}} \left[\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\nu \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_i}{n} + 1 \right) \right]^{-1}$$

On obtient ainsi n solutions particulières

$$\mathcal{J}_{\varepsilon_j \nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{n} \right)^{kn + \varepsilon_j \nu}}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\nu \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_i}{n} + k + 1 \right)} \tag{12}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

3. — On voit aisément que les fonctions

$$\mathcal{J}_{\varepsilon_j \nu}(x) \cdot x^{-\varepsilon_j \nu} \tag{13}$$

sont des fonctions entières, donc holomorphes dans tout le plan de x

Pour trouver dans quelles conditions pour ν, $\mathcal{J}_{\varepsilon_i \nu}$ forment un système fondamental, on doit calculer leur wronskien. On a

$$w = C \cdot x^{-\frac{n(n-1)}{2}} \tag{14}$$

et un calcul direct conduit à

$$C = (-n)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[\prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} \Gamma\left(\nu \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{n}\right) \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} \Gamma\left(\nu \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_i}{n} + 1\right) \right]^{-1}$$

donc $w = 0$ pour

$$\nu = \frac{kn}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}, \text{ (k, entier, } i \neq j = 1, \ldots, n)$$

La rélation connue $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$, donne finalement

$$W = \left(-\frac{n}{\pi x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} \sin \frac{\pi \nu (\varepsilon_i - \varepsilon_j)}{n} \tag{15}$$

On obtient facilement les résultats suivants :

α) La relation (14) caractérise un sistème fondamental de solutions de l'équation (3) avec la liaison (4).

β) n solutions particulières ne peuvent avoir des racines communes sauf peut-être $x = 0$.

γ) La fonction

$$Y_\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \mathcal{J}_{\varepsilon_i \nu}(x)$$

qui pour $\nu = \dfrac{kn}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ et identiquement nulle, ($C_1 \neq 0$ ei C_i déterminées en conséquence) ne peut admetre $\nu = \dfrac{kn}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ comme zéro d'ordre de multiplicité supérieur à un.

δ) Quand $\nu = \dfrac{kn}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$, un système fondamental d'intégrales est donné par

$$Y_\nu^*, \mathcal{J}_{\varepsilon_1 \nu}, \ldots, \mathcal{J}_{\varepsilon_{n-1} \nu}, \tag{16}$$

où

$$Y_\nu^* = \lim_{\nu \to \frac{kn}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}} Y_\nu \left[\sin \frac{\pi \nu (\varepsilon_i - \varepsilon_j)}{n} \right]^{-1} \tag{17}$$

4. — Forme intégrale de la solution $J_{\varepsilon_n \nu}$. On sait qu'on a

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^t\, t^{-z}\, dt \tag{18}$$

C étant un lacet qui entoure la sémiaxe négative.

De (12) et (18) on déduit

$$J_{\varepsilon_n \nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\varepsilon n\, \nu} \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{c_1} dt_1 \int_{c_2} dt_2 \ldots$$

$$\ldots \int_{c_{n-1}} \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, x)\, dt_{n-1}$$

avec

$$\Phi(t_1, \ldots, t_{n-1}, x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{kn} \prod_{j=1}^{n-1} t_j^{-\frac{\nu(\varepsilon n - \varepsilon j)}{n} - 1} \exp(t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1})$$

où ε_n est une racine quelconque de $\varepsilon^n = 1$.

Si l'on intervertit l'intégrale avec l'opération $\sum$ on a

$$J_{\varepsilon_n \nu}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\left(\frac{x}{n}\right)^{\varepsilon n\, \nu} \int_{c_1} dt_1 \ldots \int_{c_{n-1}} \bar{\Phi}(t_1, \ldots, t_{n-1}, x)\, dt_{n-1} \tag{19}$$

ou

$$\bar{\Phi}(t_1, \ldots, t_{n-1}, x) = \prod_{j=1}^{n-1} t_j^{-\frac{\nu(\varepsilon_n - \varepsilon_j)}{n} - 1} \exp\left(t_1 + \ldots + t_{n-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^n}{n^n} \cdot \frac{1}{t_1 t_2 \ldots t_{n-1}}\right).$$

Avec le changement de variables $t_i = \frac{1}{n} x\, u_i$, (19) devient

$$J_{\varepsilon_n \nu}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_C \psi(u_1, \ldots, u_{n-1}, x)\, du_1\, du_2 \ldots du_{n-1} \tag{20}$$

ou $\int_C$ est une intégrale multiple $\int_{c_1}\int_{c_2}\ldots\int_{c_{n-1}}$, c_i, étant des lacets dans

les plans des variables u_i qui entourent les sémiaxes négatives correspondantes, et

$$\psi(u_1, \ldots, u_{n-1}, x) = \prod_{i=1}^{n-1} u_j^{-\nu \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_j}{n}} \exp \frac{x}{n}\left(u_1 + \ldots + u_{n-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{u_1 u_2 \ldots u_{n-1}}\right).$$

On voit que pour $n = 2, \varepsilon_n = 1$, $\varepsilon_j = -1$ la formule intégrale (20) conduit à

$$\mathcal{J}_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c u^{-\nu-1} e^{\frac{1}{2}x\left(u - \frac{1}{u}\right)} du$$

qui est l'expression intégrale de la fonction $\mathcal{J}_\nu$ de Bessel pour x complexe.

La Chair de Mathématique
Institut Polytechnique Bucarest

ОБ ОДНОМ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПОРЯДКА N КОТОРОЕ ДЛЯ n = 2 ПЕРЕХОДИТ В УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ

(Краткое содержание)

Автор изуиает уравнение (3) которое при замене переменной $x = e^t$ переходит в:

$$y^{(n)} + (e^{nt} - \nu^n)\, y = 0$$

Если $\nu \neq \frac{kn}{\varepsilon_j - \varepsilon_i}$, тогда фундаментальная система интегралов данна формулой (12) а в противном случае-формулой (16) — В результате автор получает интегральное выражение решения $\mathcal{J}_{\varepsilon_n \nu}(x)$ (20) которое для $n = 2$ переходит в известную формулу из теории функции Бесселя I_ν

ON A DIFFERENTIAL EQUATION OF $n-th$ ORDER WHICH FOR $n = 2$ IS THE BESSEL'S EQUATION

(Summary)

The author deals with the equation (3) which by the changement of variable $x = e^t$ give

$$y^{(n)} + (e^{nt} - \nu^n)\, y = 0.$$

When $\nu \neq \frac{kn}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ a fundamental system of integrals is given by (12) and in the opposite case by (16).

An integral expression of the solution $\mathcal{J}_{\varepsilon_n \nu}(x)$ (20) is obtained, which for $n = 2$ becomes a known formula of the Bessel's $\mathcal{J}_\nu(x)$ function.

SUR UNE ECUATION DIFFERENTIELLE D'ORDRE n QUI POUR $n = 2$ EST L'EQUATION DE BESSEL

(Résumé)

L'auteur étudie l'équation (3) qui par le changement de variable $x = e^t$ devient

$$y^{(n)} + (e^{nt} - \nu^n)\, y = 0$$

Quand $\nu \neq \frac{kn}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ un système fondamental d'intégrales est donné par (12), et au cas contraire par (16). Finalement on obtient une expression integrale de la solution $\mathcal{J}_{\varepsilon_n \nu}(x)$ (x) 20) qui pour $n = 2$ se rédut à une formule connue de la fonction de Bessel $\mathcal{J}_\nu$.

UBER EIN DIFFERENZIAL GLEICHUNG n-ter ORDNUNG, WELCHE FÜR $n = 2$ IST BESSELSCHEN GLEICHUNG

(Zusammenfassung)

Der Verfasser befasst sich mit der Gleichung (3), welche durch Auswechseln der Veränderlichen $x = e^t$ folgende Form erfült:

$$y^{(n)} + (e^{nt} - \nu^n)\, y = 0\,.$$

Wenn $\nu \neq \frac{kn}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ so ergibt sich durch (12) ein fundamentales System von Integralen. Andernfalls, wenn $\nu = \frac{kn}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ ergibt sich das System (16).

Schliesslich erhält man einen Integralausdruck der Lösung $\mathcal{J}_{\varepsilon_n \nu}(x)$ (20) welche für $n = 2$ sich auf eine Formel ähnlich der Besselschen Funktion $\mathcal{J}_\nu$ reduziert.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

517.5

SUR QUELQUES FORMULES INTÉGRALES CLASSIQUES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES *

par MARCIAN GUTMANN

1. On connait l'intérêt croissant pour les méthodes directes de la mathématique moderne ; ainsi, le calcul vectoriel ou matriciel, le calcul opérationnel, la théorie des groupes, la théorie des opérateurs, des caractères ou des spectres, pour n'en citer que des domaines qui sont très utilisés en technique et en physique. L'intérêt est dû à la simplicité et à la rapidité avec lesquelles on obtient les résultats, ainsi qu'à la mise en valeur de l'intuition mathématique des relations. Ces éléments ont une évolution historique assez compliquée, mais elles ont toujours existé dans les constructions de synthèse qui ont résisté à la pratique **) et qui, par conséquent, ont eu un succés historique, par opposition aux théories compliquées dont l'intérêt est seulement documentaire. En ce sens, le but de cette note est de montrer comment par une analogie avec la théorie des champs irrotationels, on peut donner des démonstrations directes de quelques relations fondamentales du calcul intégral complexe ; évidemment, les démonstrations ne font recourir aux parties réeles et imaginaires ***).

2. Soit $\omega = \oint_c \bar{v}(\bar{p})\, d\bar{p}$ une constante cyclique du champ irrotationel $\bar{v}(M)$; en considérant ω comme intégrale sur Γ, homothétique de C par rapport à $A(\bar{r}_0)$ — le rapport d'homothétie étant λ —, on a :

$$\bar{p} = \bar{r}_0 + \lambda(\bar{r} - \bar{r}_0), \quad d\bar{p} = \lambda \cdot d\bar{r}$$

et

$$\omega = \oint_\Gamma \lambda \cdot \bar{v}\,[\bar{r}_0 + \lambda(\bar{r} - \bar{r}_0)]\, d\bar{r}.$$

Par analogie avec l'expression de ω, on considère l'intégrale complexe :

$$I(\lambda) = \oint_c \lambda f[a + \lambda(z - a)]\, dz,$$

*) Communication présentée à la IV-eme session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytehnique de Bucarest (18—19 Oct. 1958).

**) Un exemple significatif est la fonction singulière ou la fonctionelle $\delta(t)$ de Dirac, qui suscite aujourd'hui des querelles, rappellant celles sur les nombres complexes, sur l'ensemble vide ou sur le calcul d'Heaviside et dont la valeur pratique est incontestable.

***) Ces lignes partie d'un travail sur „les méthodes mathématique directes en physique et en technique".

où $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D, C une courbe fermée, rectifiable, située en D, $a \in D$ et λ un paramètre complexe, tel que $a + \lambda(z-a) \in D$.

On voit que :

$$I(1) = \oint_c f(z)\, dz ,$$

c'est-à-dire le premier membre de la relation fondamentale de Cauchy.

Comme C est indépendant de λ, on a :

$$I'(\lambda) = \oint_c \left[f[a+\lambda(z-a)] + \lambda(z-a) f'[a+\lambda(z-a)] \right] dz ,$$

en dérivant par rapport à λ, sous le signe intégral *).

En intégrant par parties le second terme **), on obtient :

$$I'(\lambda) = \Big[(z-a) f[a+\lambda(z-a)] \Big]_c - \oint_c f[a+\lambda(z-a)]\, d(z-a) + \\ + \oint_c f[a+\lambda(z-a)]\, dz ,$$

ou $I'(\lambda) = 0$, car $(z-a) f(z)$ est *uniforme* sur C — et donc de variation nulle —, tandis que les intégrales sont égales et de signe contraire.

Il en résulte $(I\lambda) =$ const.

Comme $I(0) = 0$ [$f(a) =$ const.] et $I(1) = \oint_c f(z)\, dz$, on obtient

$\oint_c f(z)\, dz = 0$, c'est-à-dire le théorème fondamental de Cauchy.

Observations. Outre l'intégrabilité et l'uniformité de $f(z)$, on a utilisé *l'existence* et l'intégrabilité de la dérivée $f'(z)$, conditions suffisament larges (dans la démonstration de Goursat intervient l'existence seulement).

On obtient le même résultat, en prenant comme intégrale auxiliaire $J(\lambda) = \oint_c f[a+\lambda(z-a)]\, dz = \lambda^{-1} I(\lambda)$; pour $J(\lambda)$, on a :

$$J'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} J(\lambda),\ J(\lambda) = \frac{c}{\lambda},\ \Big[\lambda J(\lambda)\Big]_{\lambda=0} = 0 = \oint_c f(z)\, dz$$

3. Soit aussi l'intégrale complexe, fonction de λ.

$$I(\lambda) = \oint_c \frac{f[a+\lambda(z-a)]}{z-a}\, dz,$$

---

*) On a évidemment: $\dfrac{d}{d\lambda}\int_c F(z,\lambda)\, dz = \int_c \dfrac{dF}{d\lambda}\, dz$ pour C indépendant de la variable complexe λ, F étant holomorphe par rapport à λ dans un domaine convenable.

**) L'intégration par parties — en domaine complexe — sur le chemin AB, résulte de l'identité:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(f_{k+1} - f_k) = f_n \cdot \varphi_n - f_0 \cdot \varphi_0 = [f\cdot\varphi]_{AB} ,$$

où $f_k = f(z_k)$, $\varphi_k = \varphi(z_k)$, $f(z)$ et $\varphi(z)$ étant deux fonctions de variable complexe z, intégrables sur $\overset{\frown}{AB}$ et $z_k \in \overset{\frown}{AB}$.

dans les mêmes conditions pour C, a, z, λ et $f(z)$. On voit que

$$I(1) = \oint_c \frac{f(z)}{z-a}\, dz,$$

qui apparait dans la prémière formule intégrale de Cauchy.

En dérivant $I(\lambda)$ par rapport à λ, on obtient :

$$I'(\lambda) = \oint_c f'[a+\lambda(z-a)]\, dz \qquad (C \text{ indépendant de } \lambda),$$

d'où $$I'(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\Big[f[a+\lambda(z-a)]\Big]_c = 0, \lambda \neq 0 \quad (f = \text{uniforme en } D \supset C).$$

Si $\lambda = 0$, $I'(0) = \oint_c f'(a)dz = 0$, car la constante $f'(a)$ *existe* et est holomorphe en D $(a \in D)$.

Il en resulte $I(\lambda) = \text{const.} = I(0) = I(1)$; or

$$I(0) = \oint_c \frac{f(a)}{z-a}\, dz = \begin{cases} 2\pi i \cdot f(a) & \text{pour } a \text{ intérieur à } C \\ \alpha\pi i \cdot f(a) & \text{„ } a \in C \text{ (point anguleux, d'ouverture } \alpha\pi) \\ 0 & \text{„ } a \text{ extérieur à } C \end{cases}$$

et

$$I(1) = \oint_c \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

En égalant ces expressions, on obtient :

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \left\{ \begin{matrix} 2\pi i \\ \alpha\pi i \\ 0 \end{matrix} \right\} \cdot f(a)$$

—, dans les mêmes conditions, — c'est à dire la prémière formule intégrale de Cauchy.

4. Soit $I(\lambda) = \oint_c \frac{f[a+\lambda(z-a)]}{(z-a)^{n+1}}\, dz$ ($f(z)$ = hol. en $D \supset C$, etc.) ; on a pour $\lambda = 1$, $I(1) = \oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$, qui apparaît dans les formules intégrales Cauchy, bien connues.

On a aussi, dans les mêmes conditions, énoncées ci-dessus :

$$I'(\lambda) = \oint_c \frac{f'[a+\lambda(z-a)]}{(z-a)^n}\, dz, \ldots, I^{(n-1)}(\lambda) = \oint_c \frac{f^{(n-1)}[a+\lambda(z-a)]}{(z-a)^2}\, dz,$$

$$I^{(n)}(\lambda) = \oint_c \frac{f^{(n)}[a+\lambda(z-a)]}{z-a}\, dz, \; I^{(n+1)}(\lambda) = \oint_c f^{(n+1)}[a+\lambda(z-a)]\, dz.$$

Comme $f^{(n)}(z)$ este uniforme en D, il en résulte que $I^{(n+1)}(\lambda) \equiv 0$, c'est-à-dire que $I(\lambda)$ est un polynôme de degré n, par rapport à λ; mais il est evident, qu'on a :

$$I(0) = I'(0) = I''(0) = \ldots = I^{(n-1)}(0) = 0 \left[\oint_c \frac{dz}{(z-a)^m} = 0, \; m \neq 1 \right]$$

et

$$I^{(n)}(0) = \begin{cases} 2\pi i \cdot f^{(n)}(a) & a \text{ int. à } C \\ \alpha\pi i \cdot f^{(n)}(a) & a \in C \text{ (point anguleux „}\alpha\pi\text{“)} \\ 0 & a \text{ ext. à } C \end{cases}$$

On a donc en $\lambda = 0$, un zéro multiple d'ordre n pour $I(\lambda)$:

$$I(\lambda) = c \cdot \lambda^n .$$

Pour déterminer c, on voit que

$I^{(n)}(\lambda) = n!\,c = \alpha\pi i \cdot f^{(n)}(a)$ ($\alpha = 0{,}2$ ou quelconque).

Nous avons donc : $I(\lambda) = \oint_c \frac{f[a+\lambda(z-a)]}{(z-a)^{n+1}} dz = \alpha\pi i \cdot \frac{\lambda^n}{n!} f^n(a)$ ($\alpha = 0{,}2$ ou quelconque)*)

Pour $\lambda = 1$ et a intérieur à C, on obtient :

$$\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \cdot dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a),$$

c'est-à-dire la chaîne des formules intégrales Cauchy.

5. Soit encore l'intégrale complexe $I(\lambda) = \oint_c (z-a)^m f[a+\lambda(a-z)]\,dz$ (m entier), où $f(z)$ peut avoir un nombre fini de singularités uniformes dans l'interieur de C.

On a

$$I(1) = \oint_c (z-a)^m f(z)\,dz$$

Si on prend la dérivée de $I(\lambda)$, on obtient :

$$I'(\lambda) = \oint_c (z-a)^{m+1} f'[a+\lambda(z-a)]\,dz ;$$

en intégrant par parties :

$$I'(\lambda) = \left[\frac{1}{\lambda} (z-a)^{m+1} f[a+\lambda(z-a)] \right]_c - \frac{m+1}{\lambda} \oint_c (z-a)^m f[a+ \\ + \lambda(z-a)]\,dz \quad (\lambda \neq 0)$$

*) Ces expressions sont donc des termes qui proviennent de l'intégrale auxiliaire $\oint_c e^{\frac{\lambda}{z-a}} \frac{f[a+\lambda(z-a)]}{z-a} dz$ qui peut être utilisée de la même manière.

ou, en tenant compte de l'uniformité de $f(z)$ sur C :

$$I'(\lambda) = -\frac{m+1}{\lambda} I(\lambda).$$

Nous avons donc, en intégrant :

$$I(\lambda) = \frac{c}{\lambda^{m+1}}$$

et comme $I(1) = c$, il en résulte du rapport $\frac{I(\lambda)}{I(1)}$, la formule :

$$\frac{\oint_c (z-a)^m f[a+\lambda(z-a)]\, dz}{\oint_c (z-a)^m f(z)\, dz} = \frac{1}{\lambda^{m+1}}$$

qui donne quelques cas particuliers intéressants.

La Chaire de Mathématique
Institut Politechnique Bucarest

О НЕСКОЛЬКО КЛАССИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ ТЕОРИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Краткое содержание)

Аналогично с выражением циклических постоянных безвирхевых полей, даются несколько вспомогательные функций с помощю которых находится прямые доказательства для несколько основых интегральных соотношений теорий аналитических функций.

ON SOME CLASSICAL INTEGRAL FORMULAE OF THE ANALYTICAL FUNCTIONS THEORY

(Summary)

By an analogy with the expression of the cyclic constants of the irrotational fields, it is given some auxiliary functions, with whiches aid, are obtained a direct demonstrations of a some fundamental integral relations of the analytical functions theory.

SUR QUELQUES FORMULES INTÉGRALES CLASSIQUES DE LA THÉORIE DE FONCTIONS ANALYTIQUES

(Résumé)

Par une analogie avec l'expression des constantes cycliques des champs irrotationels, on donnent quelques fonctions auxiliaires, à l'aide desquelles on obtiennent des démonstrations directes de quelques relations intégrales fondamentales de la théorie des fonctions analytiques.

ÜBER EINIGE KLASSISCHE INTEGRALFORMELN DER ANALYTISCHEN FUNKTIONENTHEORIE

(Zusammenfassung)

Durch Analogie mit dem Ausdrück der zyklischen Konstanten der wirbelfreien Felder, werden einige Hilfsfunktionen gegeben, durch welche direkte Beweisen, von fundamentalen Integralbeziehungen der analytischen Funktionentheorie erhalten werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

AEROTERMODINAMICA

662.76

CONSIDERAȚII ASUPRA STUDIULUI COMBUSTIEI ÎNTR-UN AMESTEC DE GAZ ÎN MIȘCARE *)

de V. N. CONSTANTINESCU

1. *Introducere.*

Problema arderii unui amestec omogen de gaz care se scurge cu o viteză constantă U_0, combustia fiind amorsată și întreținută de un stabilizator, a fost pusă pentru prima oară de Scurlock în 1948 [1] care a soluționat-o pentru cazul scurgerii bidimensionale în canale de înălțime constantă. Ulterior, în 1951 Tsien [2] a reluat aceiași problemă rezolvînd-o de o manieră mult mai simplă, introducînd și efectul compresibilității. Th. von Karman în 1953 [3] a remarcat analogia care există între acest fenomen și scurgerea fluidelor compresibile, frontul combustiei reprezentînd în fond o suprafață de discontinuitate pentru temperaturi și densități. Plecînd de la aceste rezultate, autorul a extins în 1955 [4] problema la scurgeri axial-simetrice și în 1956 [5] la camere de combustie cu secțiune variabilă. De asemenea probleme asemănătoare au fost studiate și de C. Ernest [6] și E. Larisch [7].

În lucrările de mai sus s-a studiat fenomenul presupunîndu-se că arderea este inițiată de un stabilizator central. În cele ce urmează vom studia cazul cînd arderea pornește de la pereți. Acest gen de combustie schematizează fenomenul care se produce în zona centrală a camerelor de combustie din statoreactoare și de asemenea în unele arzătoare industriale (ca de exemplu în tubul central al arzătorului tip T. Vuia [8]). Fenomenul va fi studiat atît pentru camere de combustie constantă cît și variabilă, (caz care prezintă interes în anumite situații [5]) și se va lua în considerare și efectul compresibilității amestecului gazos.

★

Vom studia problema în aceleași ipoteze ca și Tsien, adică vom presupune că variația căldurilor specifice ale amestecului datorită combustiei este neglijabilă și vom presupune atît amestecul nears cît și cel ars ca fiind gaze perfecte, omogene și cu structură chimică stabilă (nu se produce disociație). În plus se va neglija conductibilitatea termică și difuziunea.

---

*) Lucrare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București din 27—28 iunie 1957.

Vom privi frontul flăcării ca o discontinuitate pentru temperatură și densitate. Această ipoteză este în concordanță cu realitatea fizică, deoarece, conform teoriei și experiențelor asupra frontului flăcării efectuate de J. O. Hirschfelder [9], grosimea frontului plăcii este în general redusă, mai mică de 1 mm. În consecință se pot întrebuința aceleași metode ca și pentru studiul scurgerii gazelor la traversarea unei unde de șoc.

Astfel să considerăm mișcarea pe normala la frontul flăcării și să afectăm mărimilor scurgerii din amontele frontului de combustie indicele 1, iar din avalul frontului, indicele 2. Considerînd frontul flăcării staționar și că gazul nears se mișcă către acesta cu viteza w_1 și îl părăsește cu viteza w_2, ecuația de continuitate se scrie

$$\varrho_1 w_1 = \varrho_2 w_2 \tag{1}$$

unde ϱ este densitatea.

În aceleași condiții ecuația impulsului se scrie

$$\varrho_1 w_1^2 + p_1 = \varrho_2 w_2^2 + p_2 \tag{2}$$

unde p este presiunea.

În sfîrșit ecuația energiei se scrie:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_1}{\varrho_1} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{w_2^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_2}{\varrho_2}\right) \tag{3}$$

unde λ este raportul dintre temperatura de stagnare a gazului ars T_0' și temperatura de stagnare a gazului nears T_0.

$$\lambda = \frac{T_0'}{T_0}. \tag{4}$$

Parametrul λ caracterizează deci combustia. Într-adevăr notînd cu q aportul de căldură pe unitatea de masă datorit reacției chimice, λ poate fi scris sub forma

$$\lambda = \frac{q}{\frac{w_1^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_1}{\varrho_1}} + 1 \cong 1 + \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{\varrho_1 q}{p_1}. \tag{5}$$

Vom considera viteza w_1 cunoscută fie printr-o analiză teoretică detailată a frontului flăcării, fie prin experiențe [9]. Considerînd drept necunoscute, w_2, ϱ_2, p, T_2, ecuațiile (1), (2), (3) conduc la relațiile:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{w_2}{w_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} &= \lambda + \frac{\varkappa+1}{2}\lambda(\lambda-1)M_1^2 + \frac{\varkappa+1}{2}\lambda(\lambda-1)\{1+(\varkappa+1)(\lambda-1)\}M_1^4 + \dots \\
\frac{p_2}{p_1} &= 1 - \varkappa(\lambda-1)M_1^2 - \frac{\varkappa+1}{2}\varkappa\lambda(\lambda-1)M_1^4 - \\
&\quad - \frac{\varkappa+1}{2}\varkappa\lambda(\lambda-1)[1+(\varkappa+1)(\lambda-1)]M_1^6 + \dots \\
\frac{T_2}{T_1} &= \lambda - \frac{\varkappa-1}{2}\lambda(\lambda-1)M_1^2 - \frac{\varkappa^2-1}{2}\lambda^2(\lambda-1)M_1^4 + \dots
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

In aceste relații numărul Mach M_1 este egal cu

$$M_1 = \frac{w_1}{a_1} \tag{7}$$

a_1 fiind viteza sunetului în amontele frontului flăcării. Deoarece w_1 este de ordinul 0,3 m/s iar a_1 de ordinul 370 m/s, rezultă că numărul Mach M este foarte redus, de ordinul 10^{-3}. In consecință neglijînd în relațiile (7) termenii care conțin puteri superioare ale numărului Mach, se obțin relațiile simple:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \lambda\,; \quad p_2 = p_1\,; \quad \frac{T_2}{T_1} = \lambda \tag{8}$$

care caracterizează variația parametrilor scurgerii la traversarea frontului flăcării.

Viteza w_1 poate fi considerată constantă, ea variind doar cu temperatura, dar într-o măsură extrem de redusă. Într-adevăr cercetările efectuate de H. Sacksse și E. Bartholomé [10, 11] asupra cambustiei unui amestec de metan și oxigen și asupra altor amestecuri combustibile au arătat că variația vitezei w_1, $\frac{\partial w^1}{\partial T}$ este de ordinul 0,003 m/s °k.

In cele ce urmează vom considera că relațiile (8) sînt aplicabile pe normala la frontul flăcării.

2. *Ecuațiile integrale ale problemei.*

Să consiedrăm mai întîi mișcarea plană (camere de secțiune dreptunghiulară) incompresibilă, adică efectuîndu-se la un număr Mach inițial:

$$M_0 = \frac{u_0}{a_0} \tag{9}$$

redus.

Scurgerea fiind uniformă, vom considera că într-o secțiune oarecare x înaintea frontului flăcării, viteza este constantă și egală cu u_1, în toată

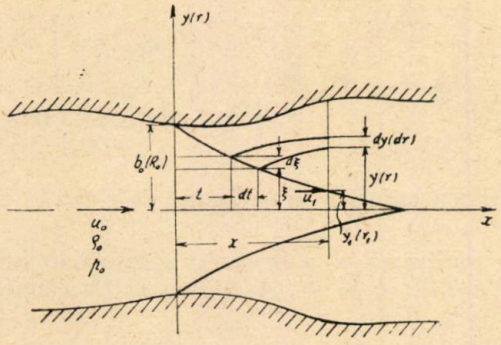


Fig. 1

regiunea nearsă. Fie creșterea lățimii flăcării de la ξ la $\xi + d\xi$ cînd x variază de la t la $t + dt$.

Debitul masic al gazului nears în secțiunea t este $2\varrho_1 \xi v_1$, v_1 fiind viteza gazului nears u_1 în secțiunea t. Creșterea debitului de gaz ars este egală cu scăderea debitului de gaz nears adică :

$$dm = -2\xi_1 d(\xi v_1). \tag{10}$$

Cînd gazul ars a ajuns în secțiunea x, această creștere este, ținînd seama de relațiile (8)

$$dm = 2\varrho_2 u dy = 2\frac{\varrho_1}{\lambda} u dy. \tag{11}$$

Egalînd relațiile (10) și (11) rezultă

$$dy = -\lambda \frac{d(\xi v_1)}{u}. \tag{12}$$

Aplicînd acum ecuația lui Bernoulli între secțiunile t și x, pe tubul de curent corespunzătoare, rezultă

$$u = \sqrt{\lambda}\sqrt{u_1^2 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) v_1^2} \tag{13}$$

și deci ecuația (12) se scrie

$$dy = -\sqrt{\lambda} \frac{d(\xi v_1)}{\sqrt{u_1^2 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) v_1^2}}. \tag{14}$$

Dacă introducem variabilele adimensionale

$$\eta = \frac{y}{b}; \quad \eta_1 = \frac{y_1}{b_1}; \quad U = \frac{u_1}{u_0}; \quad V = \frac{v_1}{u_0} \tag{15}$$

ecuația (14) poate fi scrisă sub forma

$$d\eta = -\sqrt{\lambda} \frac{b_0}{b} \frac{d\left[\frac{b}{b_0}\eta_1(V) V\right]}{\sqrt{U^2 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) V^2}} \tag{16}$$

unde $2b_0$ este înălțimea camerei în secțiunea inițială în care este amorsată combustia ($x = 0$).

Pentru a găsi înălțimea y_1 a frontului flăcării în funcție de U, putem integra ecuația (16) de la b la y_1. Se obține astfel ecuația integrală

$$\eta_1(U) = 1 - \sqrt{\lambda} \int_1^U \frac{b_0}{b} \frac{d\left[\frac{b_0}{b}\eta_1(V) V\right]}{\sqrt{U^2 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) V^2}}. \tag{17}$$

În cazul camerelor de secțiune constantă ($b_0 = b = \text{const}$), integrînd prin părți membrul secund al ecuației (15) se obține ecuația integrală:

$$\eta_1(U) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda - 1}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda U^2 - (\lambda - 1)}}\right] + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_1^U \frac{V^2}{\left[U^2 - \frac{\lambda - 1}{\lambda} V^2\right]^{3/2}} \eta_1(V)\, dV \qquad (18)$$

sau

$$1 - \eta_1(U) = \frac{\lambda}{(\lambda-1)^{3/2}}\left[\arcsin\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} - \arcsin\frac{1}{U}\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}\right] + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_1^U \frac{V^2}{\left[U^2 - \frac{\lambda - 1}{\lambda} V^2\right]^{3/2}} [1 - \eta(V)]\, dV \qquad (19)$$

ecuația mai complicată decît (18) dar comparabilă cu cea obținută de Scurlock [1] în ipoteza existenței unui stabilizator central. În cazul camerelor de secțiune variabilă, se pot obține ecuații asemănătoare cu (18) sau (19) dacă se consideră cunoscută variația parametrică a înălțimii camerei $b(U)$ în funcție de U [7].

★

Pentru mișcarea axial-simetrică (combustia în camere de secțiune circulară), urmînd aceleași raționamente, debitul masic al gazului near în secțiunea t este $\varrho_1 \pi \xi^2 v_1$ și în locul relației (10) se poate scrie

$$dm = -\varrho_1\, d(\pi \xi^2 v_1) \qquad (20)$$

iar pentru secțiunea x

$$dm = 2\varrho_2 \pi r u dr = \frac{2\pi\varrho_1}{\lambda} r u dr. \qquad (21)$$

Din egalitatea acestor două relații rezultă

$$2 r dr = -\lambda \frac{d(\xi^2 v_1)}{u} \qquad (22)$$

sau, ținînd seama că u are expresia (13)

$$d(r^2) = -\sqrt{\lambda}\, \frac{d(\xi^2 v_1)}{\sqrt{u_1^2 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) v_1^2}}. \qquad (23)$$

Introducînd variabile adimensionale analoge cu (15)

$$\eta = \frac{r}{R}; \quad \eta_1 = \frac{r_1}{R}; \quad U = \frac{u_1}{u_0}; \quad V = \frac{v_1}{u_0} \qquad (24)$$

unde $R(x)$ este raza camerei în secțiunea x, ecuația (23) se scrie

$$d\eta^2 = -\sqrt{\lambda}\frac{R_0^2}{R_1^2}\frac{d\left[\frac{R^2}{R_0^2}\eta_1^2(V)\,V\right]}{\sqrt{U^2-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)V^2}} \tag{25}$$

unde Ro este raza camerei la $x=0$.

Pentru a găsi raza r_1 a frontului flăcării, vom integra ecuația (25) de la R la r_1, obținînd astfel ecuația integrală

$$\eta_1^2(U) = 1 - \sqrt{\lambda}\int_1^U \frac{R_0^2}{R^2}\frac{d\left[\frac{R^2}{R_0^2}\eta_1^2(V)V\right]}{\left[U^2-\frac{\lambda-1}{\lambda}V^2\right]}. \tag{26}$$

În cazul camerelor de secțiune constantă ($R = Ro = \text{const}$) ecuația (26) printr-o integrare prin părți devine.

$$\eta_1^2(U) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda-1}\left[1-\frac{1}{\sqrt{\lambda U^2-(\lambda-1)}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_1^U \frac{V^2}{\left[U^2-\frac{\lambda-1}{\lambda}V^2\right]^{3/2}}\eta_1^2(V)dV\right] \tag{26}$$

sau,

$$1-\eta_1^2(U) = \frac{\lambda}{(\lambda-1)^{3/2}}\left[\arcsin\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}-\arcsin\frac{1}{U}\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_1^U \frac{V^2}{\left[U^2-\frac{\lambda-1}{\lambda}V^2\right]^{3/2}}[1-\eta_1^2(V)\,V]\,dV. \tag{28}$$

Din examinarea ecuațiilor (17, (18), (19) și (26), (27), (28) se constată o echivalență totală între aceste grupuri. Cu alte cuvinte soluția ecuației integrale (18) $\eta_1(U)$ pentru camere dreptunghiulare este aceeași cu soluția $\eta_1^2(U)$ a ecuației integrale (27) pentru camere circulare, deoarece ecuațiile sînt identice ca formă, iar condițiile la limită sînt aceleași. Același lucru se poate afirma și pentru soluțiile η_1 și η_1^2 ale ecuațiilor (17) și (26) cu condiția ca

$$\frac{b(U)}{b_0} = \frac{R^2(U)}{R_0^2}. \tag{29}$$

În plus ecuațiile integrale (19) și (28) au aceeași formă cu ecuațiile care se obțin în cazul cînd stabilizatorul nu este plasat la perete ci central [4], avînd în loc de η_1, $1-\eta_1$ respectiv în loc de η_1^2, $1-\eta_1^2$.

3. *Studiul combustiei în regim incompresibil.*

Rezolvarea ecuațiilor integrale de mai sus, deși posibilă prin metode aproximative [2], numerice [1] sau analitice [7], conduce la calcule

laborioase și greu de utilizat în aplicații. De aceea, în cele ce urmează vom folosi ideea lui Tsien [2] de a introduce în locul distribuției de viteze într-o secțiune (soluțiile ecuațiilor de mai sus), o relație simplă, liniară sau parabolică, care, deși la prima vedere pare aproximativă, este după cum se va arăta, foarte apropiată de distribuți inițială.

Într-adevăr în fig. 2 s-au reprezentat distribuțiile de viteze în diferite secțiuni pentru cele două tipuri de scurgere considerate (plană și axial

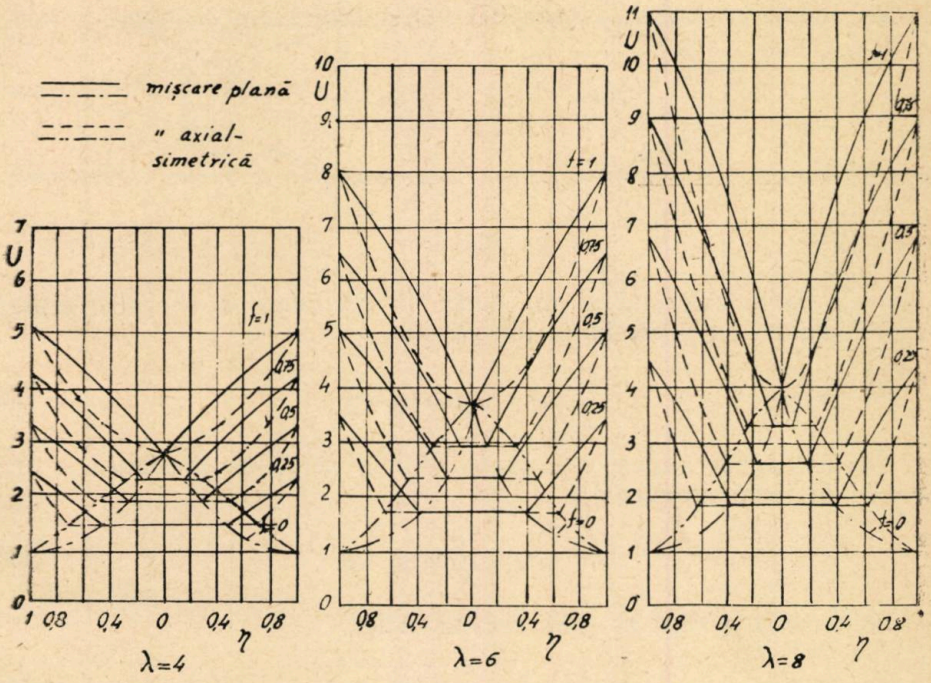


Fig. 2

simetrică), obținute prin rezolvarea ecuațiilor integrale (18) și (27) după procedeul lui Scurlock, pentru diferite valori λ și fracțiuni de gaze arse din debitul total adică

$$f = 1 - \frac{\varrho_1 y_1 u_1}{\varrho_1 b_0 u_0} = 1 - \eta_1 U \tag{30}$$

pentru mișcarea plană și

$$f = 1 - \frac{\varrho_1 \pi r_1^2 u_1}{\varrho_1 \pi R_0^2 u_0} = 1 - \eta_1^2 U. \tag{31}$$

In consecință distribuția vitezelor în zona arsă pentru camere de secțiune constantă este foarte apropiată de una lineară (fig. 3 a) pentru mișcarea plană și de una parabolică, pentru mișcarea axial-simetrică (fig. 3 b).

Viteza maximă la perete poate fi calculată cu ajutorul ecuației lui Bernoulli. Într-adevăr, scriind ecuația lui Bernoulli între un punct din

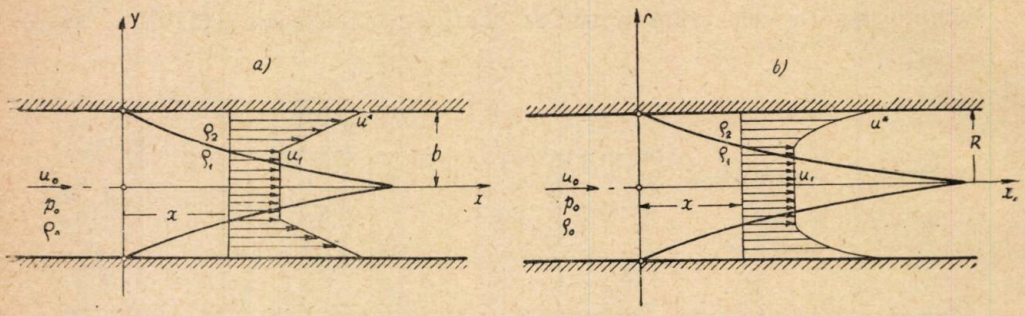


Fig. 3

amontele stabilizatorului și un punct în secțiunea x în zona nearsă, rezultă, notînd cu p presiunea din zona x

$$\frac{\varrho_1}{2}(u_1^2 - u_0^2) = p_0 - p. \tag{32}$$

Scriind acum aceiași ecuație pe x, linia peretelui, presiunea p fiind aceeași în toată secțiunea x.

$$\frac{\varrho_2}{2}(u^{*2} - u_0^2) = p_0 - p. \tag{33}$$

Din relațiile (32) și (33) rezultă astfel

$$\frac{u^*}{u_0} = \sqrt{1 + \lambda\left(\frac{u_1^2}{u_0^2} - 1\right)}. \tag{34}$$

În aceste condiții, distribuția vitezelor pentru problema plană va fi dată de relația

$$u = \frac{u_1 b - u^* y_1}{b - y_1} + \frac{u^* - u_1}{b - y_1} y \qquad (y_1 \leqslant y \leqslant b) \tag{35}$$

iar pentru mișcarea axial-simetrică

$$u = \frac{u_1 R^2 - u^* r_1^2}{R^2 - r_1^2} - \frac{u^* - u_1}{R^2 - r_1^2} r^2 \qquad (r_1 \leqslant r \leqslant R). \tag{36}$$

Scriind acum pentru mișcarea plană ecuația de continuitate

$$\varrho_2 \int_{y_1}^{b} u \, dy + \varrho_1 u_1 y_1 = \varrho_1 u_0 b \tag{37}$$

ținînd seama că u este dat de relația (35), se obține, integrînd și utilizînd mărimile adimensionale (15)

$$\eta_1 = \frac{y_1}{b} = \frac{1 - \frac{1}{2\lambda}\left[U + \sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}\right]}{\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}} \tag{38}$$

iar pentru fracțiunea de gaze arse (30)

$$f = \frac{(U-1)\left[U + \sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}\right]}{(2\lambda - 1) U - \sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}}. \tag{39}$$

Pentru mișcarea axial simetrică, ecuația de continuitate se scrie

$$\varrho_2 \int_{r_1}^{R} 2\pi r u dr + \pi r_1^2 u_1 = \pi R^2 u_0 \tag{40}$$

și ținînd seama că u este dat de relația (36), procedînd analog se obține

$$\eta_1 = \frac{r_1}{R} = \frac{1 - \frac{1}{2\lambda}\left[U + \sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}\right]}{\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) U - \frac{1}{1\lambda}\sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}} \tag{41}$$

iar pentru fracțiunea de gaze arse (31) se obține aceeași relație (39).

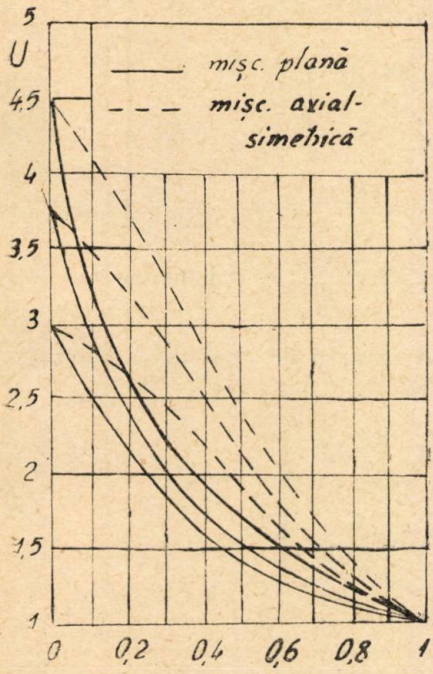


Fig. 4

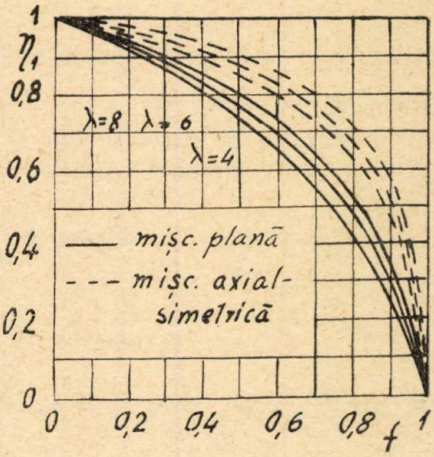


Fig. 5

În diagramele din fig. 4 și 5 s-au reprezentat $\eta_1(U)$ și respectiv $\eta_1(f)$ pentru diferite valori λ, pentru cele două tipuri de mișcări studiate.

Se constată că arderea în camere circulare se face în condiții mai bune decît pentru o cameră dreptunghiulară din cauza formei și poziției stabilizatorului (pentru același f, η_1 este mai mare în prima situație). Concluziile sînt inverse decît în cazul cînd stabilizatorul este plasat central [4], rezultat normal.

Ecuația frontului flăcării poate fi scrisă, observînd că înclinarea α a frontului flăcării este

$$\sin\alpha = -\frac{w_1}{u_1} \tag{42}$$

în care s-a notat, ca și mai înainte, cu w_1 viteza normală de combustie. Deoarece unghiul α are valori mici, se poate scrie, aproximînd sinusul cu tangenta:

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{w_1}{u_1} = -\frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U} \tag{43}$$

pentru problema plană, și

$$\frac{dr_1}{dx} = -\frac{w_1}{u_1} = -\frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U} \tag{44}$$

pentru problema axial-simetrică.

Ecuația frontului flăcării se scrie astfel:

$$\left.\begin{aligned} x &= -b\frac{u_0}{w_1}\int_1^U V\frac{d\eta_1}{dV}\,dV \\ x &= -R\frac{u_0}{w_1}\int_1^U V\frac{d\eta_1}{dV}\,dV \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

pentru cele două probleme considerate în care $\frac{d\eta_1}{dU}$ se calculează din relațiile (38) și (41).

Lungimea pe care trebuie să o aibă camera de combustie pentru ca arderea să se poată efectua complet este

$$\left.\begin{aligned} L &= -b\frac{u_0}{w_1}\int_1^{U_m} V\frac{d\eta_1}{dV}\,dV \\ L &= -R\frac{u_0}{w_1}\int_1^{U_m} V\frac{d\eta_1}{dV}\,dV \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

în care U_m este viteza U la $\eta_1 = 0$

$$U_m = \frac{1}{\lambda - 1}\left[\sqrt{4\lambda^3+\lambda^2-2\lambda+1} - 2\lambda\right]. \tag{47}$$

Camere de secțiune variabilă. Problema poate fi tratată într-un mod asemănător, dacă se face ipoteza că variațiile secțunii sînt suficient

de lente pentru a nu afecta în mod sensibil profilul vitezelor în secțiune [5].

În aceste condiții, relațiile (35) și (36) rămîn valabile. Scriind atunci, pentru problema plană ecuația continuității

$$\varrho_1 \int_{y_1}^{b} u dy + \varrho_1 u_1 y_1 = \varrho_1 u_0 b_0 \tag{48}$$

de unde, procedînd ca în cazurile precedente, rezultă y_1 de forma:

$$y_1 = \varphi(U, x) = \frac{b_0 - \frac{b}{2\lambda}\left[U + \sqrt{1+\lambda(U^2-1)}\right]}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}. \tag{49}$$

Pentru mișcarea axial-simetrică, ecuația continuității se scrie

$$\varrho_1 \int_{r_1}^{R} 2\pi r u dr + \pi \varrho_1 r_1^2 u_1 = \pi \varrho_1 R_0^2 u_0 \tag{50}$$

de unde:

$$r_1 = \sqrt{\frac{R_0^2 - \frac{R^2}{2\lambda}\left[U + \sqrt{1+\lambda(U^2-1)}\right]}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}}. \tag{51}$$

Fracțiunea de gaze arse este, pentru mișcarea bidimensională

$$f = 1 - \frac{\varrho_1 y_1 u_1}{\varrho_1 b_0 u_0} = 1 - \frac{y_1}{b_0} U \tag{52}$$

sau (49):

$$f = \frac{\left(\frac{b_0}{b} U - 1\right)\left[\sqrt{1+\lambda(U^2-1)} + U\right]}{(2\lambda-1)U - \sqrt{1+\lambda(U^2-1)}} \tag{53}$$

iar pentru mișcarea axial-simetrică

$$f = 1 - \frac{\pi \varrho_1 r_1^2 u_1}{\pi \varrho_1 R_0^2 u_0} = 1 - \frac{r_1^2}{R_0^2} U \tag{54}$$

sau:

$$f = \frac{\left(\frac{R_0^2}{R^2} U - 1\right)\left[\sqrt{1+\lambda(U^2-1)} + U\right]}{(2\lambda-1)U - \sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}. \tag{55}$$

Rezultă deci relații asemănătoare cazului camerelor de combustie de secțiune constantă. Diferența constă că aceste expresii conțin acum și pe $b(x)$ respectiv $R(x)$ și de aceea nu mai pot fi tratate separat de problema determinării ecuației frontului flăcării.

Astfel pentru mișcarea plană, relația (43) se scrie

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial U}\frac{dU}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U} \tag{56}$$

adică, ținînd seamă că $y_1=\varphi(U,x)$ este dat de relația)49) :

$$\left\{\frac{b}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U-\frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}-\right.$$

$$-\frac{bU-b_0}{2\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}\left.\frac{2\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}-U}{\left[\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U-\frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}\right]^2}\right\}\frac{dU}{dx}+$$

$$+\left\{\frac{U}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U-\frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}-1\right\}\frac{db}{dx}=\frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U}. \tag{57}$$

In mod asemănător, pentru mișcarea axial-simetrică, se obține ecuația diferențală :

$$\left\{\frac{R^2}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U-\frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}=\right.$$

$$-\frac{R^2U-R_0^2}{2\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}\left.\frac{2\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}-U}{\left[\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U-\frac{1}{2\lambda}\sqrt{1-\lambda(U^2-1)}\right]^2}\right\}\frac{dU}{dx}+$$

$$+\left\{\frac{U}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U-\frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}-1\right\}\frac{dR^2}{dx}=$$

$$=2\frac{w_1}{u_0}\frac{1}{U}\sqrt{\frac{R_0^2-\frac{R^2}{2\lambda}\left[U+\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}\right]}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U-\frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}}. \tag{58}$$

Condiția la limită a acestor ecuații fiind $U=1$ la $R=R_0$.

Aceste ecuații permit fie determinarea funcției $U(x)$ cînd se cunoaște $b(x)$ respectiv $R(x)$, fie $b(x)$ respectiv $R(x)$ cînd se cunoaște $U(x)$.

4. *Influența compresibilității.*

In considerațiile de mai sus s-a presupus mișcarea ca fiind incompresibilă, adică efectuindu-se la un număr Mach M_0 (9) foarte redus. Este însă necesar ca la viteze de scurgere mai mari să se țină seama de influența compresibilității amestecului nears în special. Într-adevăr putem considera scurgerea în zona arsă ca fiind tot incompresibilă, cu alte cuvinte că densitatea gazului ars

$$\varrho_2 = \frac{\varrho_1}{\lambda} \tag{59}$$

este constantă în secțiune, deoarece viteza sunetului este de $\sqrt{\lambda}$ ori mai mare în zona arsă, iar numărul Mach în același raport mai mic. Această aproximație mai este justificată de faptul că λ este în general destul de mare și, în plus, după cum se va arăta, nu este posibilă o combustie completă la numere Mach M_0 prea mari.

Aplicînd ecuația presiunii $\frac{u^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\varrho} = \text{const.}$ în mod asemănător ca pentru cazul incompresibil, se deduce că viteza maximă u^* este dată de aceeași relație (34), fapt care arată că distribuția vitezelor la perete nu este modificată de compresibilitate. În consecință putem admite și că distribuția vitezelor în secțiune nu este afectată sensibil de compresibilitatea amestecului nears, fapt care ne permite să evităm rezolvarea unor ecuații integrale și mai complicate decît cele scrise în § 1.

Legătura dintre presiunea p_1, densitatea ϱ_1 și viteza u_1 a gazului nears este

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_1}{p_0} &= \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_0^2 (U^2 - 1)\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \\ \frac{\varrho_1}{\varrho_0} &= \left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_0^2 (U^2 - 1)\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Pentru mișcarea plană, ecuația continuității se scrie acum

$$\varrho^2 \int_{y_1}^{b} u\,dy + \varrho_1 u_1 y_1 = \varrho_0 u_0 b_0 \tag{61}$$

de unde ținînd seama de (60) și procedînd ca în cazul mișcării incompresibile, se obține

$$y_1 = \varphi(U, x) = \frac{b_0\left[1 - \frac{\varkappa - 1}{2} M_0^2 (U^2 - 1)\right]^{-\frac{1}{\varkappa - 1}} - \frac{b}{2\lambda}\left[U + \sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}\right]}{\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) U - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1 + \lambda(U^2 - 1)}} \tag{62}$$

iar pentru f:

$$f = 1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_0}\frac{y_1}{b_0} U. \tag{63}$$

În mod asemănător, pentru mișcarea axial-simetrică se obține

$$r_1 = \sqrt{\frac{R_0^2\left[1-\frac{\varkappa-1}{2}M_0^2(U^2-1)\right]^{-\frac{1}{\varkappa-1}} - \frac{R^2}{2\lambda}\left[U+\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}\right]}{\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U-\frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda(U^2-1)}}} \tag{64}$$

iar

$$f = 1-\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\frac{r_1^2}{R_0^2}U. \tag{65}$$

În cazul camerelor de secțiune constantă, relațiile de mai sus sînt aplicabile cu $b = b_0 = \text{const.}$, respectiv $R = R_0 = \text{const.}$ În acest ultim caz, relațiilor de mai sus li se asociază cîte o relație de tipul (56) obținîndu-se ecuații diferențiale asemănătoare.

Ca și pentru combustia în prezența unui stabilizator plasat central [4, 5] se constată existența unui număr Mach critic, de la care combustia nu se mai poate efectua complet, frontul flăcării fiind „suflat" în zona centrală. Explicația acestui fenomen poate fi dată observînd că în aceste cazuri în regiunea nearsă numărul Mach local ar deveni mai mare decît 1 și nu ar mai putea fi îndeplinite relațiile (8). În rest compresibilitatea nu afectează sensibil nici variația lui η_1 cu f, nici variația lui η_1 cu U.

Existența unui număr Mach critic este importantă deoarece camerele de combustie trebuiesc proiectate astfel încît numărul Mach inițial M_0 nu trepuie să depășească numărul Mach critic M_{oc}.

Să considerăm cazul din fig. 6 în care camera de combustie are secțiunea variabilă, dar se termină cu o secțiune constantă de înălțime

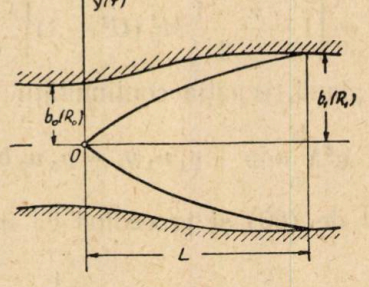


Fig. 6

$b = b_1$, respectiv de rază $R = R_1$. Acest caz include evident și cazul camerelor de combustie constantă.

În această situație numărul Mach critic M_{oc} poate fi determinat punînd condițiile

$$\frac{\partial y_1}{\partial u_1} = 0 \quad \text{la } y = 0\,; \quad u_1 = u_{1c}\,(U = U_c) \tag{66}$$

pentru mișcarea plană, și

$$\frac{\partial r_1}{\partial u_1} = 0 \quad \text{la } r = 0\,; \quad u_1 = u_{1c}\,(U = U_c) \tag{67}$$

pentru mișcarea axial-simetrică.

Punînd aceste condiții cu ajutorul relațiilor (62) și (64) se obține sistemul

$$\left.\begin{aligned} \left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U_c - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda\,(U_c^2-1)} &= U_c - \frac{b_0}{b_1}\left[1 - \frac{\varkappa-1}{2}M_{0c}^2\,(U_c^2-1)\right]^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \\ 1-\frac{1}{2\lambda}-\frac{U_c}{\sqrt{1-\lambda\,(U_c^2-1)}} &= 1-\frac{b_0}{b_1}M_{0c}^2\,U_c\left[1-\frac{\varkappa-1}{2}M_0^2\,(U_c^2-1)\right]^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

pentru problema bidimensională, și

$$\left.\begin{aligned} \left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)U_c - \frac{1}{2\lambda}\sqrt{1+\lambda\,(U_c^2-1)} &= U_c - \frac{R_2^0}{R_1^2}\left[1-\frac{\varkappa-1}{2}M_{0c}^2\,(U_c^2-1)\right]^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \\ 1-\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{2}\,\frac{U_c}{\sqrt{1+\lambda\,(U_c^2-1)}} &= 1-\frac{R_0^2}{R^2}M_{0c}^2\,(U_c\left[1-\frac{\varkappa-1}{2}M_{0c}^2\,(U_c^2-1)\right]^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

pentru problema axial-simetrică. Aceste relații reprezintă cîte un sistem de două ecuații și două necunoscute M_{oc} și U_c dacă se consideră $\frac{b_0}{b_1}\left(\frac{R_0}{R_1}\right)$ ca parametri.

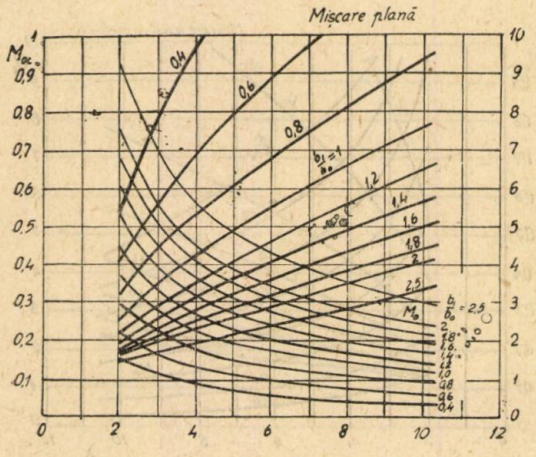


Fig. 7

Rezultatele, pentru problema plană sînt prezentate în fig. 7 și fig. 8, iar pentru problema axial-simetrică în fig. 9 și fig. 10.

Din aceste diagrame se constată că numărul M_{oc} crește cu $\frac{b_1}{b_0}$ respectiv $\frac{R_1}{R_0}$. El are însă în general valori reduse ($\simeq 0{,}15$ pentru camere de secțiune constantă). În plus, se constată avantajul camerelor de

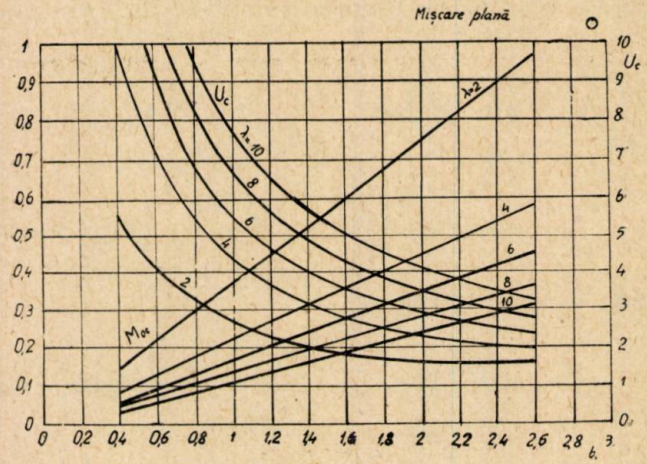


Fig. 8

combustie circulare, deoarece în acest caz intervine raportul $\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2$ și nu $\frac{b_1}{b_0}$ ca pentru camerele de secțiune dreptunghiulară.

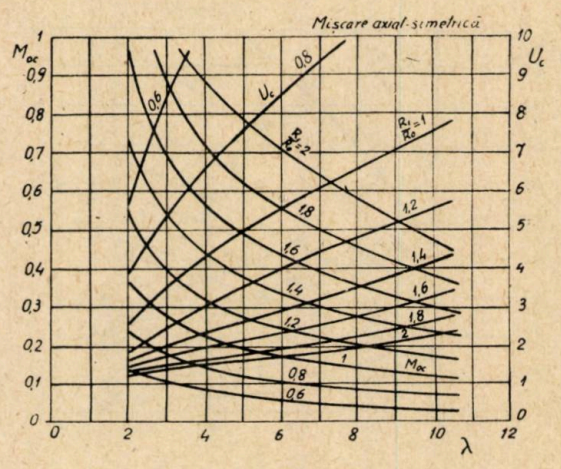
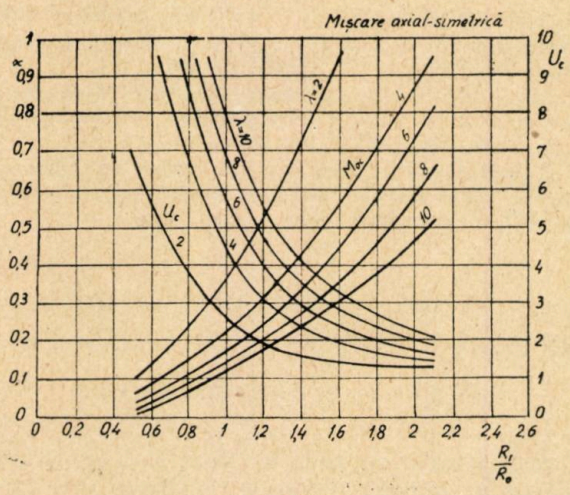


Fig. 9

În sfîrșit relațiile obținute, permit și calculul celorlalte elemente care interesează ca lungimea zonei de combustie, sau forma camerei pentru

a avea o combustie în condiții optime, cîmpul de temperatură, de entropii, cîmpul de vîrtejuri creat de zona arsă, etc.



Fig, 10

5. *Concluzii.*

Din considerațiile de mai sus rezultă că, păstrînd aceleași ipoteze simplificatoare ca și Tsien, se poate studia combustia unui amestec gazos în mișcare în camere de secțiune dreptunghiulară sau circulară, constantă sau variabilă, în ipoteza că arderea este de la perete. În plus se poate ține seama și de efectul compresibilității amestecului nears, care este important prin existența unui număr Mach critic de la care combustia nu se mai poate efectua complet.

Laboratorul de construcții aeronautice
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. **A. C. Scurlock** — „Flame Stabilisation and Propagation in High-Velocity Gas Streams", Meteor Report Nr. 19, Massachusetts Institute of Technology, 1948.
2. **H. S. Tsien** — „Influence of the Flame Front to the Flow Field", Journal of Applied Mechanics, Transactions of the A.S.M.E., 1951, vol. 18, Nr. 2, pp. 188—194.
3. **Th. von Karman** — „Aerothermodynamic and Combustion Theory", Aerotecnica, 1953, vol. XXXIII, Nr. 1, pp. 80—87.
4. **V. N. Constantinescu** — „Asupra extinderii problemei Tsien-Scurlock la mișcări axial-simetrice", Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, Ed. Academiei R.P.R., vol. VII, nr. 2, 1956, pp. 323—335.
5. **V. N. Constantinescu** — „Considerații asupra arderii laminare în camere de secțiune variabilă", Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, Ed. Academiei R..PR., vol. VII, Nr. 4, 1956, pp. 851—861.
6. **C. Ernst** — „Propagation à faible vitesse d'une flamme dans un écoulement compressible", Technique et Science Aéronautique, 1955, Nr. 1, pp. 1—9.

7. E. Laricsh — „Propagarea arderii în camere cu secţiune variabilă", Studii şi Cercetări de Mecanică Aplicată, Ed. Academiei R.P.R., vol. VII, Nr. 4, 1956, pp. 862—870.
8. I. Meţianu — „Generatorul de abur T. Vuia", Ed. Academiei R.P.R., 1957.
9. J. O. Hirschfelder and C. E. Curtis — „Theory of Flame Propagation", Journal of Chemical Physics, vol. 17, 1949, p. 1076.
10. H. Sachsse — „Über die Temperaturabhängigkeit der Flammengeschwindigkeit und das Temperaturdefälle in der Flammenfront", Zeitschrift für physikalische Chemie, (A), vol. 180, 1937, pp. 305—313.
11. H. Sachse und E. Bartholomé — „Beiträge zur Frage der Flammengeschwindigkeit", Zeitschrift für Elektrochemie und angewandte physikalische chemie, vol. 53, 1949, pp. 183—190.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ ИССЛЕДОВАНИЯ ГОРЕНИЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СМЕСИ ГАЗА

(Краткое содержание)

В работе исследуется горение в смеси газа с плоским или осесимметричным движением, причём горение начинает от стенок. Применяя упрощающие гипотезы Скурлока и Тзяна, составляются интегральные уравнения задачи. Из анализа решений этих уравнений получается, что распределение скоростей по сечению для сгоревшей зоны можно считать линейным при камерах прямоугольного сечения, и параболическим при камерах кругового сечения. При этих условиях исследуются все интересующие нас элементы движения, как для камер постоянного сечения, так и для камер переменного сечения.

В последней части работы учитывается и эффект сжимаемости несгоревшей смеси, причем выявляется существование критического числа Маха, сверх которого сгорание не может быть полным.

CONSIDERATIONS ON THE COMBUSTION WITHIN A MOVING GAS MIXTURE

(Summary)

In this paper one considers the combustion phenomenon of a moving gas mixture, for two-dimensional and axis-simetrical flows, the combustion being started from the walls. For this purpose one writes the integral equations of the problem, by considering Scurlock and Tsien's hypothesis. From the combustion equations analysis one points out that the velocity distribution of the burned gas is almost linear for two-dimensional flow and parabolic for the axis-simetrical one. By using the above mentioned facts one determines the variation of the motion parameters (e. g. the velocity, the pressure and the temperature distributions, the flamme front equation, etc.), for both constant and variable cross section of the combustion chamber. Finally one studies the same problem for the case of compressible unburned gas, and one obtains the critical Mach number, from which the combustion is no more completely effectuated.

CONSIDERATIONS SUR L'ÉTUDE DE LA COMBUSTION DANS UN MÉLANGE DE GAZ EN MOUVEMENT

(Résumé)

On étude la combustion dans un mélange de gaz en mouvement bidimensionnel ou axialo-symétrique, la combustion étant initiée à partir des parois. On écrit les équations intégrales du problème en gardant les hypothèses de Scurlock et Tsien. D'après l'analyse des solutions de ces équations on constate que la distribution des vitesses en section, dans la zone brûlée, est très rapprochée d'une distribution linéaire pour l'écoulement bidimensionnel et d'une distribution parabolique, pour l'écoulement axialo-symétrique. Dans ces conditions on étudie tous les éléments du mouvement qui intéressent, aussi bien pour les chambres de combustion à section constante que pour celles à section variable. Ensuite on tient compte de l'influence de la compressibilité du mélange de gaz non brûlé, en relevant l'existence d'un nombre de Mach critique, à partir duquel la combustion ne peut plus être effectuée complètement.

BETRACHTUNGEN UBER DAS STUDIUM DER VERBRENNUNG EINER IN BEWEGUNG SICH BEFINDENDEN GASMISCHUNG

(Zusammenfassung)

Es wird die in einer bidimensionälen und axial-aymetrischen Bewegung sich befindende Verbrennung einer Gasmischung, einer näheren Betrachtung unterzogen, mobei die Verbrennung von den Wänden ausgeht. Es werden zunächst unter Beibehaltung der Hypothesen von Scurlock und Tsien die integralen Gleichungen des Problems aufgetragen. Aus der Analyse der Lösungen dieser Gleichungen geht hervor, dass in der ausgebrannten Zone die Geschwindigkeitsverteilung bei bidimensionälen Bewegungen einer lineären und bei axial-symetrischen Bewegungen einer parabolischen Verteilung sich sehr stark nähert. Unter solchen Umständen, unterziehen wir alle uns interessirenden Grundbestandteile der Bewegung, sowohl für die Verbrennungskammern mit veränderlicher Schnittfläche, einer näheren Betrachtung. Alsdann muss man in Erwägung ziehen den Einfluss der Zusammendrückbarkeit der unverbrannten Gasmischung unter kritischen Zahl Mach, von der aus die Verbrennung nicht mehr vollkommen stattfinden kann.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958: Fascicola 1

HIDRAULICA

532

COMPARAISON ENTRE LES CANAUX TRAPÉZOÏDAUX ET LES CANAUX PARABOLIQUES

par ȘTEFAN ZAREA

Le choix de la forme géométrique de la section transversale d'un canal, à l'hypothèse que la pente longitudinale et la rugosité des rives soient connues, présente un grand intérêt pratique.

Les canaux à section transversale trapézoïdale sont les plus répandus. Toutefois, les canaux à contour curviligne de la section transversale, possèdent une capacité de transport plus grande à celle d'un canal trapézoïdal optime, ayant la même aire.

Nous nous proposons d'étudier le cas du canal parabolique en le comparant avec le canal trapézoïdal.

Une exemplification de celui-ci a été donnée [1], mais une démonstration à caractère général n'a pas été faite encore.

1. *Notations.* Dans les calculs qui suivront, on note avec :

A — l'aire de la section transversale du courant du liquide,
R — le rayon hydraulique,
P — le périmètre mouillé,
B — la largeur du canal au niveau de la surface libre,
i — la pente longitudinale du fond du canal,
C — le coefficient de Chézy,
n — le coefficient de rugosité,
$1 : m_t$ — la pente du talus du canal trapézoïdal,
$1 : m_p$ — la pente de la tangente à la parabole dans le point d'intersection avec le plan de la surface libre (v. fig. 2).

Pour toutes les grandeurs qui se rapportent au canal trapézoïdal nous utiliserons l'index t, quand à celles qui se rapportent au canal parabolique, l'index p (v. fig. 1, 2).

2. *Hypothèses.* La comparaison entre le canal trapézoïdal et le canal parabolique est faite dans l'hypothè qu'ils sont équivalents au point de vue hydraulique.

On peut considérer que deux canaux sont équivalents du point de vue hydraulique s'ils transportent le même débit et si la pente longitudinale et la rugosité des rives sont identiques, donc

$$\begin{aligned} Q_t &= Q_p = Q \\ i_t &= i_p = i \\ n_t &= n_p = n \end{aligned} \tag{2.1}$$

On considère le canal trapézoïdal optime.
Pour le canal parabolique on choisit un profil d'équation [1] :

$$x^2 = 2py \tag{2.2}$$

Un tel canal parabolique est optime [2] seulement pour la valeur $m_p = \frac{B_p}{4h_p} = 0{,}510$. A cause de cela on ne peut pas choisir pour la comparaison le canal parabolique optime du point de vue hydraulique.

3. *Les grandeurs géométriques importantes des canaux.*

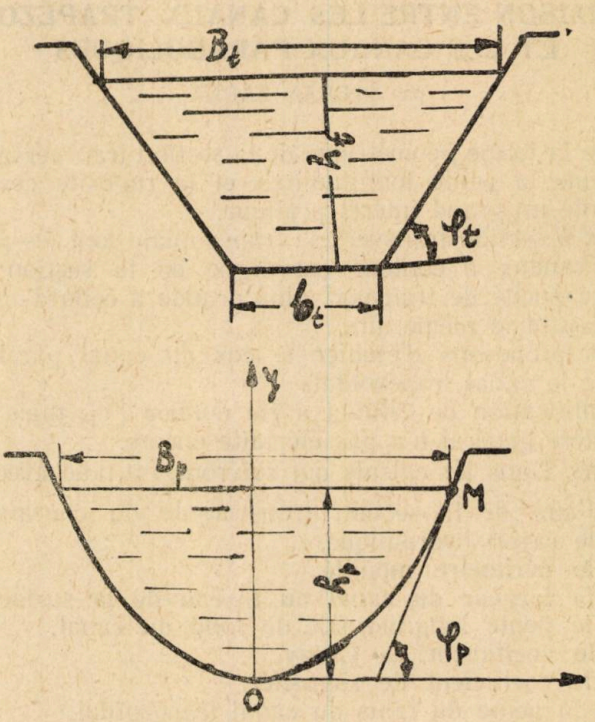


Fig. 1, 2

Il est connu que pour le canal trapézoïdal optime, il y a les expressions suivantes pour :
l'aire

$$A_t = [2\sqrt{1+m_t^2} - m_t]\, h_t^2 \tag{3.1}$$

le périmètre mouillé

$$P_t = 2\,[2\sqrt{1+m_t^2} - m_t]\, h_t \tag{3.2}$$

le rayon hydraulique

$$R = \frac{h_t}{2} \tag{3.3}$$

l'emprise

$$B_t = 2\,h_t \sqrt{1 + m_t^2} \tag{3.4}$$

Pour le canal parabolique représenté par l'équation (2.2) nous déduirons les expressions des mêmes grandeurs.

Par définition (v. fig. 2)

$$m_p = \operatorname{cotg} \varphi_t \tag{3.5}$$

En dérivant l'équation de la parabole, en tenant compte de (3.5) et (2.2) et en écrivant que le point M (v. fig. 2) se trouve sur la parabole, on peut déduire :

$$\begin{aligned} p &= m_p^2 \cdot h_p \\ \text{et} \qquad B_p &= 4 m_p \cdot h_p \end{aligned} \tag{3.6}$$

L'aire de la section transversale du courant de liquide de ce canal est

$$A_p = \frac{8}{3} m_p \cdot h_p^2 \tag{3.7}$$

Le périmètre mouillé a l'expression

$$P_p = 2\,h_p \left[\sqrt{1 + m_p^2} + m_p^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + m_p^2}}{m_p} \right] \tag{3.8}$$

Ainsi que le rayon hydraulique du canal parabolique est exprimé par

$$R_p = \frac{4}{3} \cdot \frac{m_p \cdot h_p}{\sqrt{1 + m_p^2} + m_p^2 \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 + m_p^2}}{m_p}} \tag{3.9}$$

4. *Détermination de la fonction* $m_p = f\,(m_t\,;\, h_p/h_t)$

Si on tient compte de la formule de Chézy pour la vitesse :

$$V = C \sqrt{Ri}$$

et de la formule de Pawlowski pour le coefficient C

$$C = \frac{1}{n} R^y$$

l'expression du débit est

$$Q = \frac{\sqrt{i}}{n} A R^{y + \frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

En tenant compte de (4.1), on peut déduire à propos des conditions (2.1) la relation suivante.

$$A_p \cdot R_p^{y + \frac{1}{2}} = A_t \cdot R_t^{y + \frac{1}{2}} \tag{4.2}$$

Si nous considérons le rapport h_p/h_t comme un paramètre, cette relation définit m_p comme une fonction de m_t.

En effet, en tenant compte des formules (3.1), (3.3), (3.7) et (3.9) on peut déduire de (4.2)

$$\frac{8}{3} m_p \left[\frac{4}{3} \frac{m_p}{\sqrt{1+m_p^2} + m_p^2 \, ln \dfrac{1+\sqrt{1+m_p^2}}{m_p}} \right]^{y+\frac{1}{2}} h_p^{y+\frac{5}{2}} = [2\sqrt{1+m_t^2} - m_t] \, h_t^{y+\frac{5}{2}} \tag{4.3}$$

La fonction $m_p = f(m_t ; h_p/h)$ est représentée graphiquement dans la fig. 3, pour $y = \frac{1}{6}$; 0,3 et $h_p/h_t = 0{,}9$; 1 ; 1,1.

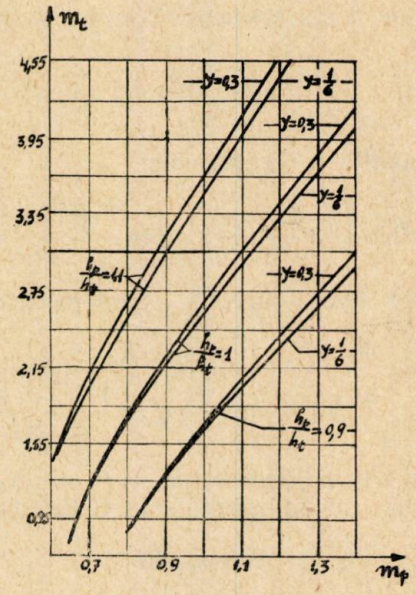


Fig. 3

La fonction (4.3) établit la possibilité de déterminer la pente m_p du canal parabolique équivalent du point de vue hydraulique avec un canal trapézoïdal.

5. *Détermination des rapports* A_p/A_t, $\frac{P_p}{P_t}$, $\frac{B_p}{B_t}$.

En tenant compte de (3.1) et (3.7) on déduit l'expression du rapport

$$\frac{A_p}{A_t} = \frac{8}{3} \frac{m_p}{[2\sqrt{1+m_t^2} - m_t]} \left(\frac{h_p}{h_t}\right)^2 \tag{5.1}$$

Dans la fig. 4 est représentée la variation du rapport A_p/A_t en fonction de m_p pour deux valeurs de l'exposant y et pour trois valeurs du rapport h_p/h_t.

La variation du rapport A_p/A_t en fonction de m_p ou m_t peut être calculée en tenant compte de la relation (4.3).

On peut observer que si $\frac{h_p}{h_t} > 1$ le rapport $\frac{A_p}{A_t}$ diminue et si $\frac{h_p}{h_t} < 1$ le rapport $\frac{A_p}{A_t}$ augmente.

De (3.2) et (3.8) on déduit :

$$\frac{P_p}{P_t} = \frac{\sqrt{1+m_p^2} + m_p \ln \frac{1+\sqrt{1+m_p^2}}{m_p}}{2\sqrt{1+m_t^2} - m_t} \cdot \frac{h_p}{h_t} \tag{5.2}$$

La variation du rapport des périmètres mouillés en fonction de m_p est donnée dans la fig. 5.

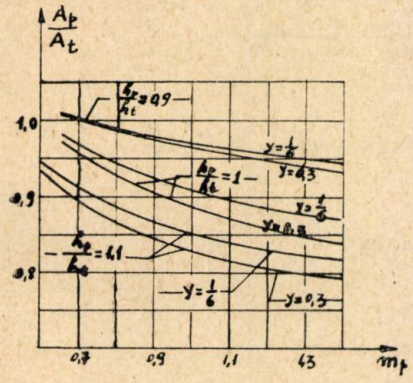


Fig. 4

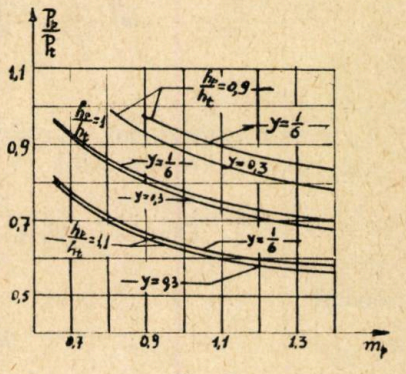


Fig. 5

On peut observer que $\frac{P_p}{P_t}$ est d'autant plus petit que le rapport $\frac{h_p}{h_t}$ augmente.

En tenant compte de (3.4) et (3.6) nous avons :

$$\frac{B_p}{B_t} = \frac{2m_t}{\sqrt{1+m_t^2}} \cdot \frac{h_p}{h_t} \tag{5.3}$$

La représentation graphique de cette relation en fonction de m_p est donnée dans la fig. 6.

De même quand $\frac{h_p}{h_t}$ augmente, le rapport $\frac{B_p}{B_t}$ diminue.

Exemple. On doit déterminer les dimensions du canal trapézoïdal et du canal parabolique équivalent du point de vue hydraulique, si on connaît :

$$Q = 14{,}8 \ \text{m}^3/\text{s} \ ; \ n = 0{,}0004 \ ; \ y = \frac{1}{6}$$

$$i = 0{,}0004 \ ; \ m_t = 2{,}541$$

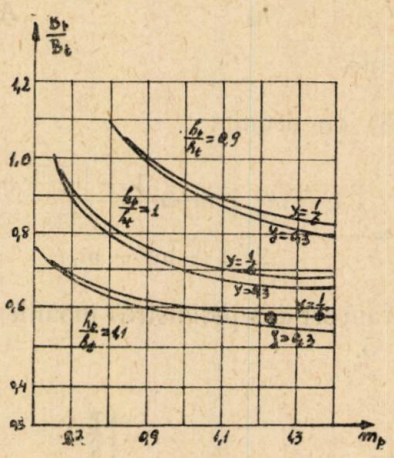


Fig. 6

Le canal trapézoïdal considéré est de section optime.

De l'expression du débit

$$Q = \frac{\sqrt{i}}{n}\left[2\sqrt{1+m_t^2} - m_t\right]\left(\frac{h_t}{2}\right)^{2/3} h_t^2$$

on déduit

$$h_t = 2 \ \text{m}.$$

De la relation $b_t = 2(\sqrt{1+m_t^2} - m_t)h_t$ on déduit

$$b_t = 1{,}552 \ \text{m}.$$

Le rayon hydraulique, l'emprise et l'aire de la section hydraulique ont les valeurs :

$$R_t = h_t/2 = 1 \ \text{m}$$

$$B_t = 2\sqrt{1+m_t^2}\, h_t = 10{,}925 \ \text{m}$$

et

$$A_t = \left[2\sqrt{1+m_t^2} - m_t\right] h_t^2 = 11{,}75 \ \text{m}^2$$

L'esquisse du canal trapézoïdal obtenu est donnée dans la fig. 7.

Nous déterminerons les dimensions du canal parabolique à l'hypothèse que $h_p = h_t$.

La diagrame de la fig. 3 nous permet de déterminer la pente $m_p = 1{,}0$.

Ainsi on peut calculer les grandeurs qui nous intéressent :

$$A_p = 10{,}7 \text{ m}$$

$$B_p = 8 \text{ m}$$

Le rapport $\frac{A_p}{A_t}$ est

$$\frac{A_p}{A_t} = \frac{10{,}7}{11{,}75} = 0{,}91 ,$$

valeur qui coincide avec celle déduite de la diagramme representée dans la fig. 3 pour $y = \frac{1}{6}$

Dans la fig. 7 on a esquissé aussi le canal parabolique.

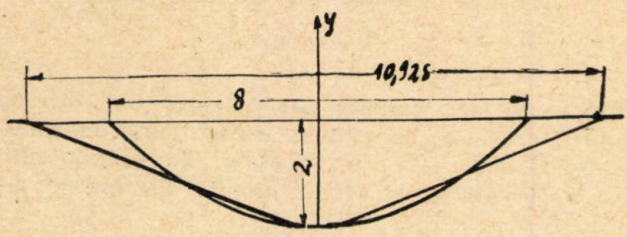


Fig. 7

Le laboratoire de Hydraulique
Institut Politechnique Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. **Chablinski, I. V. et Bourlakov, V. E.** — Ghidrot. i Meliorat., 1953, No. 5, p. 37...44.
2. **Bourlakov, V. E.** — Torfianaia prom., 1954, No. 2, p. 24...25.

СРАВНЕНИЕ МЕЖДУ ТРАПЕЦОИДАЛЬНЫМИ И ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ КАНАЛАМИ

(краткое содержанне)

Демонстрируется, что параболические каналы имеют лучшие гидравлические характеристики чем оптимальные трапецоидальные каналы.

В гипотезах (2.1) установлено соотношение между склонами откосов, вышеупомянутых двух каналов и указано влияние параметров y и $\frac{h_p}{h_t}$.

Вариация отношений $\frac{A_p}{A_t}, \frac{P_p}{P_t}, \frac{B_p}{B_t}$ в зависимоти от m_p дана в рис. 4, 5, 6.

COMPARISON BETWEEN TRAPEZOIDAL AND PARABOLICAL CHANNELS

(Summary)

The paper shows that the parabolical channels have better hydraulic characteristics than the optimal trapezoidal ones.

In the hypothesis (2.1) the relation between the slopes of the two channels was established, and the influence of the y and h_p/h_t parametres was shown.

The variation of $\frac{A_p}{A_t}, \frac{P_p}{P_t}$ and $\frac{B_p}{B_t}$ versus m_p is given in fig 4, 5, 6.

COMPARAISON ENTRE LES CANAUX TRAPÉZOÏDAUX ET LES CANAUX PARABOLIQUES

(Résumé)

On demontre que les canaux paraboliques ont des caractéristiques hydrauliques meilleures que les canaux trapezoïdaux optimes.

Dans les hypothèses (2.1) on a établi la relation entre les pentes des talus des deux canaux et on a montré l'influence des paramètres y et h_p/h_t.

La variation des rapports $\frac{A_p}{A_t}, \frac{P_p}{P_t}, \frac{B_p}{B_t}$ en fonction de m_p est donnée dans les fig. 4, 5, 6.

VERGLEICH ZWISCHEN TRAPEZOIDALEN UND PARABOLISCHEN KANÄLEN

(Zusammenfassung)

Es wurde gezeigt, dass parabolische Kanäle bessere hydraulische Charakteristiken als optimale trapezoidale Kanäle haben.

Durch den Hypothesen (2.1) wurde die Beziehung zwischen den Abhängen der beiden Kanäle festgesetzt und der Einfluss der Parameter y und h_p/h_t gezeigt.

Die Variation der Verhältnisse $\frac{A_p}{A_t}, \frac{P_p}{P_t}, \frac{B_p}{B_t}$ als Funktion von m_p ist in den Fig. 5, 5, 6 gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

CHIMIE

621.357/621.393.645.1

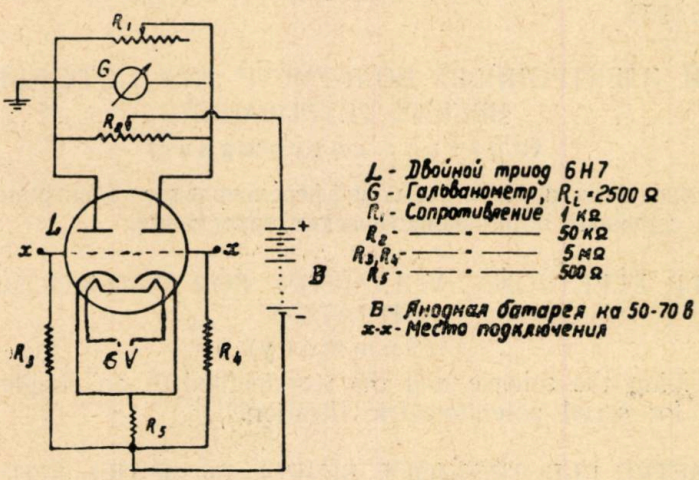
ПРОСТОЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ВОЛЬТМЕТР ДЛЯ ПОТЕНЦИОМЕТРИЧЕСКИХ ТИТРОВАНИЙ

ГЕОРГЕ ХАГИМАШ

Электронные приборы широко используются в частности при проведении химических анализов.

Электронный вольтметр для потенциометрических титровании, предложенный и проверенный нами (рис. I), отличается простотой конструкции, легкостью использования и небольшой стоимостью. По сравнению с обыкновенными потенциометрами постоянного тока с высоким внутренним сопротивлением — вольтметр представляет то преимущество, что позволяет следить визуально за ходом титрования с помощью гальванометра без добавочных компенсаций. Титрование происходит быстро и производится удобно, осооенно если циферблат гальванометра — широк.

Вольтметр можно собирать на любои панели, но контакты $x — x$ желательно ставить на фарфоровой подставке.



Благодаря дифференциальному действию вольтметра нет необходимости в строгом соблюдении цифр, указанных на рис. 1. Так, например, анодное напряжение можно взять большим, чем 100 в, а сопротивление негативации-меньше 1 $M\Omega$.

Проверка вольтметра была сделана титрованием растворов сульфата цинка с раствором смеси красной и желтой кровяной соли. Индикаторным электродом служил — платиновыи, а электродом сранения — каломельный. Эталонныи раствор был составлен растворением 2 г химически чистого цинка в 50 мл конц. серной кислоты и разбавлением до 250 мл. Титри-

рующии раствор содержал 40 г/л K_4 $[Fe(CN)_6]$ и 16 г/л K_3 $[Fe(CN)_6]$. После установления титра этого последнего раствора провели ряд определении цинка в цинкатных растворах состава, указанного в работе (I).

Проведение титрования. Стакан с двумя электродами, исследуемым раствором и мешалкой ставят под бюреткой подходящеи формы, содержащей титрующнй раствор. После кратковременного перемешивания раствора электроды ячейки присоединяют к клемам $x-x$ вольтметра.

Включают затем ток накала лампы. После 5—10 минут включают и анодную батарею и отрегулируют сопротивление R_1 и R_2 так, чтобы стрелка гальванометра находилась на 0.

Произведя одно пробное титрование регулируют сопротивление R_1 во время титрования так, чтобы стрелка гальванометра к концу титрования осталась под верхним предельным делением шкалы. Если для этого R_1 оказывается недостаточным, то используют добавочно и сопротивление R_2.

После такой регулировки прибора-можно перейти к серийному титрованию анализируемых растворов.

Чувствительность прибора достаточно большая для того, чтобы точность анализа зависела от тонкости используемой бюретки.

Лаборатория электрохимии
Бухарестский Политехнический
Институт.

ЛИТЕРАТУРА

Н. П. Федотьев, Г. Хагимаш — Журнал Прикладной Химии, № 5, 1104-1112, 1955.

ПРОСТОЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ВОЛЬТМЕТР ДЛЯ ПОТЕНЦИОМЕТРИЧЕСКИХ ТИТРОВАНИЙ

(Краткое содержание)

Рекомендуется простая схема дифференциального электронного вольтметра для серийных потенциалистических титрований.

SIMPLE ELECTRONIC VOLTMETRE FOR POTENTIOMETRIC TITRATION

(Summary)

Describing the scheme and the workmethod of an simple electronic voltmetre for serial potentiometric titration.

VOLTMETRE ÉLECTRONIQUE SIMPLE POUR DES TITRATIONS POTENTIOMÉTRIQUES

(Résumé)

On décrit le montage et l'utilisation d'un voltmètre electronique simple, adapté aux titrations potentiométriques en serie.

EINFACHES RÖHRENVOLTMETER FÜR POTENTIOMETRISCHE TITRIERUNGEN

(Zusammenfassung)

Es wrd das Schema und die Arbeitsmethode eines einfaches Röhrenvoltmeters für potentiometrische Serien-Titrierungen beschrieben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

621.357

ВАННЫ ДЛА ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОГО ХРОМИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ СУЛЬФАТА ХРОМА*

КОНСТАНТИН ФИРОЮ

Ванны для хромирования, использованные до настоящего времени составлялись, безразлично от преследуемой цели (декоративное, твердое, пористое или черное хромирование), на основе хромовой кислоты.

Наряду с известными преимуществами эти ванные представляют и некоторые недостатки, как например:

— очень низкие выходы по току;

— большой расход электрической энергии для восстановления шестивалентного хрома в металлический хром;

— сильно корродирующее действие на материал футеровки ванны;

— вредное действие на организм.

В современной литературе имеется ряд указаний на возможность устранения указанных недостатков использованием ванн, содержащих трехвалентный хром в виде сульфата.

Ванны на основе сульфата хрома имеют характер значительно менее агрессивный, безвредны и дают в то же время два раза меньший расход энергии при тех же выходах по току.

Ванны такого рода, предложенные до сих пор, не приносят улучшений выхода по току, а наоборот получаются выхода несколька пониженные по сравнению с обыкновенными ваннами.

Главными недостатками ванн сульфата хрома по сравнению с хромовокислыми являются:

— Плотные и блестящие осадки получаются лишь при относительно тонких осадках (до 10 μ). Это позволяет использовать пока эти ванны только в декоративных целях.

— Отражательная способность поверхности хрома из этих ванн равна 30-40%, в то время как таковая для хрома, осажденного из хромовокислых ванн представляет 60%,

Первые публикации относительно ванн на основе сульфата хрома появились недавно.

Так, в 1951 г. был опубликован первый патент такого рода [1], а в 1953 г. начались появляться работы коллектива Иошида [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], имея также теоретический характер в связи с другой ванной.

Указанные две ванны различаются между собой только добавками, обе имея на основе двойную соль сульфата хрома и аммония $[C_{r2}\ (S0_4)_3 \cdot (NH_4)_2\ SO_4 \cdot 24H_20 \cdot]$

Заслуга японских исследователей состоит в том, что они попытались изучать процесс хромирования из этих ванн и из теоретической точки зрения.

---

* Работа представленная на научной сессии педагогическая состава Послитехнического Института г. Бухареста октябрь 1958 г.

В 1956 г. [9] советские исследователи начинают публиковать материалы с теоретическим характером.

Однако, в настоящее время не располагаем достаточным материалом для разработки подходящей теории.

Все большее внимание, которое уделяется за границей процессу хромирования на основе сульфата хрома заставило нас заняться этим вопросом.

Настоящая работа содержит результаты экспериментальных исследований с двумя типами ванн, а именно: ванна, предложенная японцами (ванна I) и ванна, предложенная нами (ванна II).

ВАННА I

Хромировочная ванна, которая служила первым предметом исследования японским исследователям, была так называемая ванна стандард — следующего состава:

— $Cr_2(SO_4)_3$: 0,5 Мол/л
— $(NH4)_2 SO_4$: 3,2—3,3 Мол/л
— $(NH4)_2 CO$: 4 Мол/л
— pH : 2,3

Осадки, полученные из этом ванны — неудовлетворительные по блеску и сцеплению.

После многочисленных опытов, те же исследователи значительно улучшили ванны-стандард добавлением $H_3 BO_3$ (0,5 Мол/л) и небольшого количества $Cr_2 O_3$ (0,5—3 г/л.) Отмечаем, однако, что мочевина входящая в состав этих ванн разлагается вследствие окисления, как во время работы, так и в перерывах.

Таким образом, в течение 25оч. при температуре 40°С, мочевина, разлагающаяся во время электролиза, представляет 23%, а в течении такого же времени без электролиза лишь 7% из общего количества находящейся в ванне мочевины.

В виду этого необходимо, чтобы количество мочевины в ваннах от времени до времени пополнялось до соответствующего содержания.

Хотя разложение мочевины не сказывается вредно на процесс хромирования, это явление является недостатком ванны I, так как мочевина расходуется бесполезно даже во время бездействия ванны.

Так как способ приготовление электролиза оказывает большое влияние на результаты опытов, необходимо соблюдать указанные ниже условия.

В овъем воды равный половине приготовляемого раствора кладут нужное количество сульфата хрома в форме аммонийных квасцов, нагревают до кипения, поддерживая эту температуру в течении 30 минут и затем добавляют остаток сульфата аммония. После этого раствор охлаждают ниже 60° и добавляют к нему соответствующие количества мочевины, борной кислоты и хромового ангидрида (таблица 1).

После растворения последних и полного охлаждения раствора, добавляется необходимое по объему количество воды и затем добавляется серная кислота до получения желаемого pH.

Электролит приготовленный таким образом выдерживается в течении 48 часов при постоянной температуре в 45°C для установления равновесия комплексных ионов в растворе.

В качестве анодов по Иошида применяются электроды состава, в процентах: 4—A_g, 8—S_n, 0,5—Co и остальное 87,5% Pb.

Электроды, приготовленные из такого сплава, в достаточной степени сопротивляются анодному растворению и то, что является более важным не благоприятствует нежеланному процессу окислению C_r^{3+} в C_r^{6+}.

Так как во время электролиза замечается тенденция роста pH для поддерживания этого необходимы периодические добавления серной кислоты.

Иногда, в особенности после приготовления электролита, pH раствора оказывается лишком маленьким. В этом случае корректировка pH производится всегда добавлением карбоната аммония в твердом виде. Избегают использование гидроокиси аммония, так как это сказывает отрицательное влияние на качество осадков. После каждой корректировки pH рекомендуется выдерживать электролит при постоянной температуре для восстановления равновесия комплексных ионов (8-10 часов при 45°C).

На основе этих литературных указаний было проведено 49 опытов для установления влияния температуры и плотности тока на выход по току и вид обложений хрома при различных концентрациях $C_r O_3$.

Состав изученных ванн указан в таблице 1.

ТАБЛИЦА I

Название ванны	Состав ванн (г/л)					pH
	$C_{r_2}(SO_4)_3$	$(NH_4)_2 SO_4$	$(NH_4)_2 CO$	$H_3 BO_3$	$C_r O_3$	
a	196	432	240	31	0,5	2,5
в	196	432	240	31	1,0	2,5
c	196	432	240	31	2,0	2,5

Катодами служили медные пластинки размером: 55×8×0,5 мм.

Во время элтктролиза катоды прикреплялись в специальное приспособление, позволяющее экранировать одну сторону электрода, таким образом, чтобы электролиз шел всегда на одной стороне пластинки, равной 1 см².

Анодная площадь равнялась также 1 см², остальная же часть его про ерхности была покрыта полихлорвиниловым лаком.

Все опыты были проведены с электродами, расположенными на расстоянии в 46 мм.

Для поддержания постоянной температуры электролизер был введен в ультратермостат.

Как личную констатацию отметим, что лучшие результаты в отношении сцепления осадков получаются, если образцы вводят в электролит в мокром состоянии — тотчас же после обезжирования и промывки водой.

Принимая во внимание вязкость электролита. это явление может быть объснено следующим образом.

Хромовые ванны составленные на основе слуфата хрома являются чрезвычайноь вязкими, следовательно плохо смачивают электроды.

Введением в электролит катодов с мокрой поверхностью — последняя смачивается однородной пленкой разбавленного электролита — что благоприятствует равномерному распределению линий тока на ней.

Работы проводились с помощью обыкновенной электролизной установки.

В прилагаемых таблицах приводятся результаты опытов (таблицы 2, 3 и 4).

ТАБЛИЦА 2

Выход по току и вид осадков хрома (ванна а).

№ электрода	Температура хромирования, °С	Плотность тока на катоде, А/дм²	Напряжение на ванне, в	Выход по току, %	Вид осадка
1	25	2,5	3,30	1,6	Молочный на всей поверхности электрода.
2		5	3,55	3,1	Блестящий за исключением средней части — матовой.
3		10	4,15	4,0	Блестящий на всей поверхности электрода.
4		15	4,80	3,2	Блестящий с коричневыми пятнами на отдельных участках.
5		20	5,50	2,3	Матовый с коричневыми пятнами по окраинам.
6	35	5	3,35	3,7	Молочный по всеи поверхности электрода.
7		10	3,80	4,6	Блестящий по всей поверхности электрода.
8		15	4,20	5,1	Блестящий за исключением слегка матовых краев электрода.
9		20	4,65	4,1	Матовый по всей поверхности электрода.
10		25	5,40	3,3	Матовый по всей поверхности электрода.
11	45	5	3,10	4,5	Молочный по краям и светло-коричневыи в центре электр.
12		10	3,50	5,6	Блестящий по окраинам и молочный в иентре элечтрода.
13		15	3,85	6,2	Блестящий по всей поверхности электрода.
14		20	4,25	6,5	Блестящии по всей поверхности электрода.
15		25	4,65	5,2	Полу-блестящий по всей поверхности электрода.
16		30	5,10	4,8	Полу-блестящий в центре и матовый по краям электрода.

ТАБЛИЦА 3

Выход по току и вид осадков хрома (ванна в).

№ электрода	Температура хромирования, °С	Плотность тока на катоде, А/дм²	Напряжение на ваннс, в	Выход по току, %	Вид осадка
17	25	2,5	3,20	1,9	Молочный по всей поверхности электрода
18		5	3,50	3,2	Блестящий по окраинам и молочный в центре электрода.
19		10	4,10	4,5	Блестящий по всей поверхности электрода.
20		15	4,75	4,0	Блестящий с коричневыми пятнами на отдельных участках,
21		20	5,40	3,1	Блестящий, темно-коручневыи.
22	35	5	3,30	3,5	Молочный по всей поверхности электрода.
23		10	3,75	3,9	Блестящий по всей поверхности электрода.
24		15	4,15	5,5	Блестящий по всей поверхности електрода.
25		20	4,60	5,0	Блестящий по всей поверхности электрода.
26		25	5,20	4,6	Полу-блестящий по всей поверхности электрода.
27		30	5,85	3,6	Матовый по всей поверхности электрода.
28	45	5	3,10	3,1	Молочный по окраинам и коричневый в центре электрода.
29		10	3,50	5,4	Блестящий по окраинам и молочный в центре электрода.
30		15	3,85	6,3	Блестящий по всей поверхности электрода.
31		20	4,30	5,7	Блестящий по всей поверхности электрода.
32		25	4,70	4,9	Блестящий по всей поверхности электрода.
33		30	5,25	4,0	Матовый по всей поверхности электрода.

ТАБЛИЦА 4

Выход по току и вид осадков хрома (ванна с).

№ электрода	Температура хромирования, °С	Плотность тока на катоде, А/дм²	Напряжение на ьанне, в	Выход по току, %	Вид осадка
34	25	2,5	3,10	3,3	Серый по окраинам и молочный в центре электрода.
35		5	3,45	3,5	Матовый свеже-коричневого цвета.
36		10	4,05	4,6	Блестящий по всей поверхности электрода.
37		15	4,70	3,1	Матовый в центре и коричневый не окраинам электрода.
38		20	5,30	1,5	Матовый коричневого цвета.
39	35	5	3,25	3,1	Серый по всей поверхности электрода.
40		10	3,70	3,8	Матовый по всей поверхности электрода; сцепление слабо по окраинам.
41		15	4,35	4,4	Полу-блестящий со слабым сцеллением по окраинам.
42		20	4,90	3,7	Матовый по всей проверхности электрода.
43		25	5,50	3,0	Матовый и по окраинам окрашенный в коричневый цвет.
44	45	5	3,10	1,6	Матовый со срединой электрода окрашенный в черный цвет.
45		10	3 50	3,8	Матовый по всей провержности электрсда.
46		15	3,85	4,2	Матовый по всей поверхности электрода.
47		20	4,35	4,0	Матовый и окрашенный в фиолетовый цвет почти по всей поверхности электрода.
48		25	4,80	3,8	Матовый и окрашенный в фиолетовый цвет почти половина поверхности электрода.
49		30	5,30	3,6	Матовый и окрашенный в фиолетовый цвет только малая части поверности электрода.

ВАННА II

Вторая часть работы была выполнена к помощью той же аппаратуры, и при тех же условиях работы, что и первая часть.

Были также соблюдены те же правила при приготовлении электролита для хромирования и при поправке pH.

Изучаемые ванны имеют составы, указанные в таблице 5.

ТАБЛИЦ 5

Название ванны	Состав ванн (г/л)				pH
	$Cr_2(SO_4)_3$	$(NH_4)_2SO_4$	H_3BO_3	C_oSO_4	
д	196	432	31	0,5	2,5
е	196	432	31	1,0	2,5
ф	196	432	31	1,5	2,5

Из таблицы 5 видно, что композиция этих ванн отличается от композиции ванн из первой части работы отсутствием мочевины и заменой добавки $C_r\ 0_3$ с $C_0\ SO_4$.

Для наилучшего сравнения всех выполненных опытов, через ванны I и II проводилось одинаковое количество электричества.

Приводим ниже экспериментальные результаты, полученные из этих ванн (таблицы 6, 7 и 8).

ТАБЛИЦА 6

Выход по току и вид осадков хрома (ванна д).

№ электрода	Температура хромирования, °С	Плотность тока на катоде, А/дм²	Напряжение на ванне, в	Выход по току, %	Вид осадка
50	25	2,5	2,85	6,2	Молочный со слабым сцеплением по краям электрода.
51		5	3,20	14,9	Полу-блестящий со слабым сцеплением по краям электрода.
52		10	3,30	13,0*)	Полу-блестящий, чешуйчатый и со слабым сцеплением по краям электрода.
53		15	4,05	7,0*)	Серый, чешуйчатый и с очень слабым сцеплением по краям электрода.
54	35	5	3,20	13,5	Молочный со слабым сцеплением по краям электрода.
55		10	3,45	16,1	Полу-блестящий со слабым сцеплением по краям электрода.
56		15	3,65	15,0	Блестящий, чешуичатый и с очень слабым сцеплением по краям электрода.
57		20	3,90	13,0	Серый, чешуйчатый и со слабым сцеплением.
58	45	5	3,10	12,5	Молочный се слабым сцеплением по краям электрода.
59		10	3,25	17,0	Молочный, чешуйчатый и со слабым сцеплением по краям электрода.
60		15	3,45	17,9	Молочный в центре и полу-блестящий чешуйчатый по краям электрода.
61		20	3,70	13,3	Матовый с шероховатостями.
62		25	4,00	10,4	Матовый с шероховатостями и серый углам электрода.

*) Выход по току в этих опытах вычислялся приблизительно, ввиду отскакивания хрома от поверхности электрода,

ТАБЛИЦА 7

Выход по току и вид осадков хрома (ванна е).

№ электрода	Температура хромирования °С	Плотность тока на катоде, А/дм²	Напряжение на ванне, в	Выход по току, %	Вид осадка
63	25	2,5	2,80	4,2	Блестящий и окрашенный в коричневый цвет по всей поверхности электрода.
64		5	3,15	10,9	Блестящий за исключением небольшого участка в центре электрода слегка молочного цвета.
65		10	3,50	12,4	Блестящий по всей поверхности электрода.
66		15	3,90	9,5	Блестящий в центре электрода и матовый по краям.
67	35	5	2,95	4,1	Молочный по окраинам и коричневыи цвета в центре электрода.
68		10	3,30	11,0	Блестящий по всей поверхности электрода.
69		15	3,60	10,0	Блестящий в центре и матовый по краям электрода.
70		20	3,90	6,2	Матовый-серый по всей поверхности электрода.
71	45	5	2,80	3,0	Молочный по краям и коричневый по остальной поверхности электрода.
72		10	3,05	6,5	Молочный по всей поверхности электрода.
73		15	3,35	10,8	Блестящий по всей поверхности электрода.
74		20	3,65	9,5	Блестящий по всей поверхности электрода.
75		25	3,95	5,6	Блестящий в центре и матовый по углам электрода.

ТАБЛИЦА 8

Выход по току и вид осадков хрома (ванна ф).

№ электрода	Температура хромирования. °С	Плотность тока на катоде, А/дм²	Напряжение на ванне, в	выход по току, %	Вид осадка
76	25	2,5	2,80	3,1	Блестящий и окрашенный в коричневый цвет по всей поверхности электрода.
77		5	3,20	9,3	Полу-блестящий с легким молочиым оттенком.
78		10	3,55	10,9	Блестящий за исключением углов слегка матовых.
79		15	3,95	9,3	Полу-блестящий в центре и матовый по окраинам электрода.
80	35	5	2,90	3,0	Блестящий и окрашенный в коричневый цвет по всей поверности электрода.
81		10	3,25	10,7	Блестящий по всей поверхности электрода.
82		15	3,55	10,0	Блестящий за исключением слегка матовых углов.
83		20	3,85	7,0	Матовый по окраинам и полу-блестящий в центре электрода.
84	45	10	3,00	2,8	Блестящий и окрашенный в коричневый цвет по всей поверхности электрода.
85		15	3,40	9,3	Полу-блестящий с матовыми углами.
86		20	3,65	10,8	Блестящий с матовыми углами.
87		25	3,90	6,4	Полу-блестящий по всей поверхности электрода.
88	55	15	3,10	4,6	Блестящий и коричневый по всей поверхности электрода.
89		20	3,35	7,7	Блестящий по всей поверхности и слегка молочныи в центре электрода.
90		25	3,65	10,4	Блестящий с матовыми углами
91		30	3,85	7,5	Матовый по всей поверьности электрога.

ТАБЛИЦА 8 (продолжение)

Выход по току и вид осадков хрома (ванна ф)

№ электрода	Температура хромирования, °С	лотность тока на катоде, А/дм²	Напрсжение на ванне, в	Выход по току, %	Вид осадка
92	65	20	3,15	3,1	Блестящий, коричневый по всей поверхности электрода.
93		25	3,35	5,5	Молочный по окраинам и коричневый в центре электрода.
94		30	3,60	10,0	Полу-блестящий по всей поверхности электрода.
95		35	3,85	8,0	Блестящий по всей поверхности электрода.
96		40	4,00	7,0	Полу-блестящий по всей поверхности электрода.

ВЫВОДЫ

Из изучения и сравнений результатов опыта можно сделать следующие выводы:

1. Выход по току как функция плотности тока проходит через максимум; этот максимум тем менее выражен, чем больше повышается температура хромирования.

2. Максимальный выход по току для определенной температуры хромирования соответствует одновременно с наилучшим сцеплением и блеском отложению.

3. Выходы по току, полученные в одинаковых условияк работы с помощью ванны II больше, нежели полученные с ванной I.

Так, при 45° С и 15 А/дм² (таблица 3) выход по току равен 6,3%, в то время как в ванне II (таблица 7) при тех же условиях работы он равен 10,80%.

4. Напряжения на ванне для ванны II меньше, чем для ванны I.

Например, при 45°С и 20 А/дм² (таблица 7) напряжение равно 3,65 в, а у ванны I (таблица 3) при тех же условиях работы оно равно 4,30 в.

5. Сцепление и блеск зависят от толщины слоев. При ванне I достигается удовлетворительное сцепление и блеск до толщин в 10μ, а при ванне II до 2μ, что совершенно достаточно для хромирования в декоративных целях.

6. Рабочий предел плотности тока для данной температуры больше для ванны I чем II.

Так, при температуре в 45°C этот предел равен 15-25 А/дм² для ванны I (таблица 3) и 15-20 А/дм² для ванны II (таблица 7).

7. Ванна II проще и дешевле, чем ванна I.

8. Считаем, что наилучшие результаты получаются для ниже следующих условий электролиза.

а) *Ванна I*

— $Cr_2(SO_4)_3$	:	196 г/л
— $(NH_4)_2SO_4$	:	432 г/л
— $(NH_4)_2CO$	:	240 г/л
— H_3BO_3	:	31 г/л
— Cr_2O_3	:	1 г/л
— pH	:	2,5
— Температура хромирования	:	35 — 45°C
— Плотность катодного тока	:	10 — 25 А/дм²
— Выход по току	:	5,50 — 6,30%

в) *Ванна II*

— $Cr_2(SO_4)_3$	:	196 г/л
— $(NH_4)_2SO_4$	:	432 г/л
— H_3BO_3	:	31 г/л
— C_oSO_4	:	1 г/л
— pH	:	2,5
— Температура хромирования	:	35 — 45°C
— Плотность катодного тока	:	10 — 20 А/дм²
— Выход по току	:	6,5 — 11%

Лаборатория Электрохимии
Бухарестский Политехнический Институт

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойд А. Снавели, Шарль Л., Фауст и Жон Е. Вриде.* Американский патент 2.693.444, 12.02.1951.
(Фиде Централблат 1956, 19, 5407).

2. *Иошида Т.* Ж. Кем. Химический журнал. Индустриально-химическое японское общество, отделение, 1953, 56, № 3, 140—142; № 10, 735—437; № 12, 912—914, 915-917; 57, № 1, 13—15; № 2, 95—97, 97—98; № 10, 698—701; № 12, 884—887; 1955, 58, № 2, 86—89, 96—91.
(Фиде Реф. Химический журнал, 1955, № 16, 275; 1956, № 9, 309; № 17, 278; № 22, 276).

3. *Иошида Т.* Англинский патент 1.056.407, 26.02.1954.
(Фиде Реф. Химический журнал, 1956, № 9, 313).

4. *Иошида и Хатторе.* Химический журнал. Индустриально-химическое японское общество. Отделение, 1953, 56, № 2, 67—69.
(Фиде Реф. Химический журнал, 1955, № 16, 275).

5. *Иошида, Хара, Арай.* Химическии журнал. Индустриально-химическое японское общество, Отделение 1953, 56, № 4, 220—221; № 11, 826.
(Фиде Реф. Химический журнал, 1956, № 9, 309).
6. *Иошида, Каварада, Хара.* Химический журнал. Индустриально-химическое японское общество, Отделение 1953, 57, № 1, 11—13; № 2, 94—95.
(Фиде Реф. Химическии журнал, 1956, № 9, 309).
7. *Иошида, Мацумото.* Химический журнал. Индустриально-химическое японское общество, Отделение, 1953, № 5, 360—362.
(Фиде Реф. Химический журнал, 1956, № 9, 310).
8. *Иошида, Оцука.* Химический журнал. Индустриально-химическое японское общество, Отделение 1953, № 11, 791—794.
(Фиде Реф. Химический журнал, 1956, № 9, 310).
9. *Агладзе Р. И. и Ионатамишвели Т. В.* Тр. Института металла и горн. дела А Н Груц ССР, 1956, 7, 147—155.
(Фиде Реф. Химический журнал 1957, № 2, 323).
10. *Целл Мелвин Р.* Металл Финишинг, 1957, 55, № 1, 57—58.
(Фиде Реф. Химический журнал 1957, № 18, 236).

ВАННЫ ДЛЯ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОГО ХРОМИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ СУЛЬФАТА ХРОМА

(Краткое содержание)

Работа содержит результаты экспериментов, полученные при электрическом осаждении хрома из ванн, составленных на основе сульфата хрома.

Было исследовано влияние: температуры, плотности тока и концентрации добавочных агентов на выход по току и вид осадка в двух ваннх.

Первая из этих ванн была предложена коллективом японских исследователей, а вторая ванна предложена нами.

По сравнению с ваннами хромовой кислоты, ванны сульфата хрома представляют следующие преимущества: дают пониженный расход электроэнергии, являются менее агрессивными и вредными и также облее дешевыми,

ELECTROCHROMING IN CHROMIUM SULFATE BATHS

(Summary)

This work contains the results obtained concerning electrochroming in chromium sulfate baths.

The influence of temperature, current density and bath concentration on current efficiency and on the aspect of chromium layers in two different electrolytic baths has been investigated.

The first bath composition was based on a formula, proposed by a group of japanese investigators, and the second had been formulated by us.

Compared with chromium cid baths, the following advantages can be ascribed to the chromium sulfate ones: they are less energy consuming, their aggressivity and nocivity are not so high, and they are less expensive.

LE CHROMAGE ELECTROLYTIQUE DANS BAINS AU SULFATE DE CHROME

(Résumé)

Dans cet ouvrage on présente les résultats obtenus dans les expériences concernant le chromage électrolytique dans les bains au sulfate de chrome.

On a étudié l'influence exerceé par la température,la densité du courant et la teneur du bain en composants, sur le rendement de courant et l'aspect des couches de chrome obtenues dans les deux bains d'électrolyse différents, dont le premier a été proposé par un collectif de chercheurs japonais, et le second par nous.

Par rapport aux bains à l'acide chromique,ceux au sulfate de chrome présentent les avantages suivants: réduction de la consommation d'énergie électrique, un caractère moins nocif et agrésif et un prix moins élevé.

DIE VERCHROMUNG IN CHROMSULFATBÄDERN

(Zusammenfassung)

Die Arbeit stellt die bei der elektrolytischen Chromierung in Cromsulfatbädern erziehlten Versuchsergebnisse dar.

Es wurden die Einflüsse der Termperatur, der Stromdichte und der Konzentration an Zusätzen auf den Stromwirtkungsgrad und das Aussehen der Chromschichten in zwei verschiedenen Elektrolysebäder untersucht.

Das erste Bad wurde gemäss dem Vorschlag einer Arbeitsgruppe japanischer Forscher, und das zweite Bad nach einem eigenen Vorschlag zusammengesetzt.

Im Vegleich mit den Chromsäurebädern, die Chromsulfatbäder bieten folgande Vorteile: sie bedürfen einen kleineren Stromverbrauch, sie sind weniger angreifend und gesundheitsschädlich und weniger kostspielig.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

ELECTROTEHNICA

CZ 621.3 : 517.5 : 2.2

SUR L'APPLICATION DE LA METHODE DES DISCONTINUITES A L'ANALYSE HARMONIQUE DES FONCTIONS PERIODIQUES *)

par ALEXANDRE TH. POPESCO

1. L'ÉVOLUTION DE CETTE MÉTHODE: LES CONTRIBUTIONS DE I. ONDRACEK, TRAIAN LALESCU, ERNEST ABASON ET ALBERT EAGLE

On sait que la méthode en question permet de calculer les harmoniques en sinus et cosinus, c'est-à-dire les coefficients de Fourier A_n et B_n des fonctions formées par des lignes polygonales, des arcs de paraboles, des sinusoïdes, etc. en fonction de incidents géométriques ou des discontinuités de cette fonction, soit en fonction des sauts d'ordonnées, de tangente et en général des sauts d'un ordre quelconque K des dérivées des fonctions respectives, définies par la relation:

$$s_p^{(K)} = F^{(K)}(x_p) - \Phi^{(K)}(x_p) \qquad (1)$$

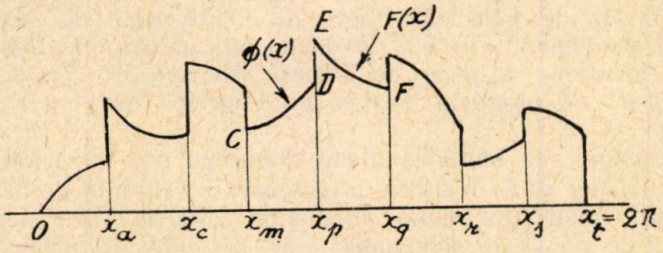


Fig. 1

$F(x)$ et $\Phi(x)$ représentant les fonctions de droite resp. de gauche du point de discontinuité d'abscisse x_p et $F^{(K)}(x_p)$ et $\Phi^{(K)}(x_p)$ représentant les valeurs des dérivées d'ordre K de ces fonctions pour $x = x_p$.

Les formules qui donnent les valeurs des coefficients de Fourier A_n et B_n définis par les relations:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad \text{et} \qquad (2)$$

*) Communication présentée à la II-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest (20-24 juin 1956)

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx \qquad (3)$$

sont les suivantes :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n} \sum s \sin nx - \frac{1}{n^2} \sum s' \cos nx + \frac{1}{n^3} \sum s'' \sin nx$$

$$+ \frac{1}{n^4} \sum s''' \cos nx - \frac{1}{n^5} \sum s^{IV} \sin nx - \frac{1}{n^6} \sum s^{V} \cos nx + + - - \qquad (4)$$

$$\pi B_n = \frac{1}{n} \sum s \cos nx - \frac{1}{n^2} \sum s' \sin nx - \frac{1}{n^3} \sum s'' \cos nx$$

$$+ \frac{1}{n^4} \sum s''' \sin nx + \frac{1}{n^5} \sum s^{IV} \cos nx - \frac{1}{n^6} \sum s^{V} \sin nx - + + \qquad (5)$$

Dans ces relations, les sommes $\sum s.\cos nx$, $\sum s'.\sin nx$ etc. se rapportent à tous les points de discontinuité de la fonction donnée $f(x)$ où il existe des sauts d'ordonnée s, des sauts de tangente s' et des sauts de dérivées du deuxième ordre s'', du troisième ordre s''', etc.

La méthode a été imaginée pour la première fois par le professeur Traian Lalesco et publiée en 1919 dans la Revue Générale de l'Electricité (2), pour les fonctions polygonales.

Cette méthode a été généralisée pour les fonctions formées par des arcs de parabole d'un ordre quelconque par le Dr. Ing. Ernest Abason qui l'a publiée en 1920 (3).

Enfin, sans avoir pris connaissance des travaux antérieurs de Lalesco et d'Abason, Mr. le Prof. A. Eagle de l'Université de Manchester, a retrouvé indépendement, en 1925, le même procédé de calcul sous la forme généralisée identique à celle de Ernest Abason, et qui a été publiée dans son livre : „A practical treatise on Fourier's theorem and harmonic analysis .4).

En Allemagne, la méthode a été présentée aux électriciens en 1931 par MM. G. Köhler et A. Walther, professeurs à l'Institut de Mathématique de Darmstadt, dans la revue allemande „Archiv für Elektrotechnik" (7, 9, 10, 16), qui l'on dénommée, par la suite, la méthode Lalesco-Abason-Eagle.

Enfin, en Angleterre, la méthode des discontinuités a été de nouveau et récemment recommandée à tous ceux qui s'occupent de l'analyse harmonique des fonctions présentant des discontinuités par Mr. Karl Klötter, dans la revue anglaise „Proceedings of the I.R.E." (17).

Cette méthode présente des avantages incontestables sur la méthode classique qui consiste dans le calcul, à l'aide des procédés habituels d'intégration, pour chacun des intervalles que présente la fonction, des coefficients de Fourier, représentés par les expressions (2) et (3) ci-dessus.

Malheureusement, la méthode n'a pas encore été soumise à une étude critique assez complète pour que l'on puisse se rendre compte nettement en quoi consiste sa supériorité, quelles sont ses limités d'application etc., ce qui a fait que dans l'utilisation de cette méthode aient

été commises une série d'erreurs ou d'exagérations, même de la part de ses propres auteurs.

Par exemple, Mr. L. W. B. Jolley qui a appliqué cette méthode à l'analyse harmonique de quelques fonctions simples dans son livre „Alternating current rectification and allied problems" (6) affirme que la méthode des discontinuités est d'une considérable utilité pour l'intégration de certaines fonctions de la forme :

$\int f(x) \begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix} dx$ qui ne seraient pas intégrables par d'autres procédés.

Malheureusement, cette affirmation ne correspond pas à la réalité, comme on le verra plus loin.

Ensuite, MM. A. Walther, A. Eagle, L. W. B. Jolley ont appliqué cette méthode aussi bien aux fonctions polygonales et paraboliques qu'aux fonctions sinusoïdales, ce qui a été fait d'une manière non rationelle et a mis en discussion, tout d'abord, le problème de la nécessité de la convergence de certaines séries qui apparaissent dans l'expression des harmoniques recherchées — ce qui constitue une autre erreur de la part de ceux qui se sont occupés de cette question — et ensuite le problème des erreurs que l'on peut commettre lorsque les formules de la méthode des discontinuités conduisent à des valeurs indéterminées de la forme $\frac{0}{0}$ pour les harmoniques.

Enfin, un autre genre d'erreur„ très importante, a été commise par l'auteur même de cette méthode, Ernest Abason, qui au Congrès International d'Electricité de Paris de 1932 a présenté les formules de calcul de la méthode des discontinuités non pas sous la forme normale des relations (4) et (5) ci-dessus, mais sous la forme des relations suivantes :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}\sum s \sin n\omega x - \frac{1}{n^2}\sum s' \cos n\omega x + \frac{1}{n^3}\sum s'' \sin n\omega x$$

$$\pi B_n = \frac{1}{n}\sum s \cos n\omega x - \frac{1}{n^2}\sum s' \sin n\omega x - \frac{1}{n^3}\sum s'' \cos n\omega x$$

qui sont erronées, ainsi que sous l'avons déjà montré (13), leurs vraies expressions étant celles obtenues en remplaçant au dénominateur de chaque terme „n" par „$n\omega$".

Il résulte de ce qu'il a été dit ci-dessus, que la mise au point de la manière correcte d'application de la méthode des discontinuités, est réellement nécessaire afin d'éviter à l'avenir la répétition des erreurs que nous venons de signaler. Cette étude critique est d'autant plus nécessaire que la méthode des discontinuités possède de grands mérites et peut rendre de réels services si l'on connait aussi bien les limites de son domaine d'application que la modalité rationnelle de son emploi.

A cette occasion, il est utile de mentionner que la méthode des discontinuités pour l'analyse harmonique des fonctions polygonales a été employée (sans être désignée sous ce nom) avant Traian Lalesco et notamment par I. Ondracek qui, en 1916, a publié dans la revue „Elektrotechnik und Maschinenbau" (1) un article où il est justement question de l'analyse harmonique des fonctions polygonales à l'aide des sauts

d'ordonnées et de tangentes aux différents points de discontinuité de la fonction étudiée. On peut donc dire, que la méthode des dscontinuités a été conçue séparément par quatre auteurs, dans l'ordre chronologique : Ondracek (1916) et Lalesco (1919) pour les fonction polygonales, Abason (1920) et Eagle (1925) pour les fonctions paraboliques d'un ordre quelconque.

2. LA MÉTHODE DES DISCONTINUITÉS APPLIQUÉE À L'ANALYSE HARMONIQUE DES FONCTIONS PARABOLIQUES D'UN ORDRE QUELCONQUE.

2.1. — *L'exposé de la méthode fait par E. Abason.*

E. Abason considère une fonction $f(x)$ formée par une série d'arcs de parabole ainsi qu'il est représenté sur la *fig. 1*. On considère tout d'abord la fonction périodique élémentaire $\Phi(x)$ formée par un seul arc de parabole d'ordre m (la courbe CD sur la fig. 1) dont l'équation est :

$$\Phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m \tag{8}$$

et qui est compris entre les abscisses x_m et x_p de la fonction générale $f(x)$.

Les coefficients de Fourier a_n et b_n de cette fonction élémentaire sont :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(x)\sin nx\,dx \tag{9}$$

On peut écrire :

$$\pi(a_n + jb_n) = \int_{x_m}^{x_p} \Phi(x)[\cos nx + j\sin nx]\,dx = \int_{x_m}^{x_p} \Phi(x)\,e^{jnx}\,dx \tag{10}$$

En intégrant par parties on obtient :

$$\int \Phi(x)\,e^{jnx}\,dx = e^{jnx}\left\{\left[\frac{1}{n^2}\Phi'(x) - \frac{1}{n^4}\Phi'''(x) + \frac{1}{n^6}\Phi^V(x) - + \ldots\right]\right.$$

$$\left. - \frac{j}{n}\left[\Phi(x) - \frac{1}{n^2}\Phi''(x) + \frac{1}{n^4}\Phi^{IV}(x) - + \ldots\right]\right\} \tag{11}$$

En remplaçant e^{jnx} par $\cos nx + j\sin nx$ on obtient :

$$\int \Phi(x)e^{jnx}\,dx = \left\{\left[\frac{1}{n_2}\Phi'(x) - \frac{1}{n^4}\Phi'''(x) + \frac{1}{n^6}\Phi^V(x) - + \ldots\right]\cos nx\right.$$

$$\left. + \left[\frac{\Phi(x)}{n} - \frac{1}{n^3}\Phi''(x) + \frac{1}{n^5}\Phi^{IV}(x) - + \ldots\right]\sin nx\right\} + \tag{12}$$

$$+j\left\{\left[\frac{1}{n^2}\Phi'(x)-\frac{1}{n^4}\Phi'''(x)+\frac{1}{n^6}\Phi^V(x)-+\ldots\right]\sin nx\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\Phi(x)}{n}-\frac{1}{n^3}\Phi''(x)+\frac{1}{n^5}\Phi^{IV}(x)-+\ldots\right]\cos nx\right.$$

En tenant compte de la relation :

$$\pi(a_n+jb_n)=\int_0^{2\pi}\Phi(x)\,e^{jnx}\,dx=\int_{x_m}^{x_p}\Phi(x)\,e^{jnx}\,dx \tag{13}$$

et intégrant l'égalité (12) entre les limites x_m et x_p et tenant compte ensuite de la relation (13), il résulte :

$$\begin{aligned}\pi a_n=&\left[\frac{1}{n^2}\Phi'(x_p)-\frac{1}{n^4}\Phi'''(x_p)+\frac{1}{n^6}\Phi^V(x_p)-+\ldots\right]\cos nx_p\\&+\left[\frac{1}{n}\Phi x_p)-\frac{1}{n^3}\Phi''(x_p)+\frac{1}{n^5}\Phi^{IV}(x_p)-+\ldots\right]\sin nx_p\\&-\left[\frac{1}{n^2}\Phi'(x_m)-\frac{1}{n^4}\Phi'''(x_m)+\frac{1}{n^6}\Phi V(x_m)-+\ldots\right]\cos nx_m\\&-\left[\frac{1}{n}\Phi(x_m)-\frac{1}{n^3}\Phi''(x_m)+\frac{1}{n^5}\Phi^{IV}(x_m)-\ldots\right]\sin nx_m\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\pi b_n=&\left[\frac{1}{n^2}\Phi'(x_p)-\frac{1}{n^4}\Phi'''(x_p)+\frac{1}{n^6}\Phi^V(x_p)-+\ldots\right]\sin nx_p\\&-\left[\frac{1}{n}\Phi(x_p)-\frac{1}{n^3}\Phi''(x_p)-\frac{1}{n^5}\Phi^{IV}(x_p)-+\ldots\right]\cos nx_p\\&-\left[\frac{1}{n^2}\Phi'(x_m)-\frac{1}{n^4}\Phi'''(x_m)+\frac{1}{n^6}\Phi^V(x_m)-+\ldots\right]\sin nx_m\\&+\left[\frac{1}{n}\Phi(x_m)-\frac{1}{n^3}\Phi''(x_m)+\frac{1}{n^5}\Phi^{IV}(x_m)-+\ldots\right]\cos nx_m\end{aligned} \tag{15}$$

De même que Traian Lalesco, E. Abason, au lieu de s'occuper des coefficients a_n et b_n s'intéresse à l'expression du terme général de la série Fourier :

$$h_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{16}$$

Tenant compte des relations (15) et (16) de πa_n et πb_n, la relation (16) devient :

$$\pi(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{1}{n}\Phi(x_m)\sin n(x-x_m)-\frac{1}{n}\Phi(x_p)\sin n(x-x_p)$$

$$-\frac{1}{n^2}\Phi'(x_m)\cos n(x-x_m)+\frac{1}{n^2}\Phi'(x_p)\cos n(x-x_p$$

$$-\frac{1}{n^3}\Phi''(x_m)\sin n(x-x_m)+\frac{1}{n^3}\Phi''(x_p)\sin n(x-x_p)$$

$$-\frac{1}{n^4}\Phi'''(x_m)\cos n(x-x_m)-\frac{1}{n^4}\Phi'''(x_p)\cos n(x-x_p) \qquad (17)$$

. . . . . .

Passant à la fonction périodique générale $f(x)$, représentée sur la *fig. I*, et désignant par $\Phi(x)$ et $F(x)$ les fonctions élémentaires représentées par les arcs CD et EF adjacents au point d'abscisse x_p et appliquant finalement à ces fonctions élémentaires les formules (17), il résulte que le point d'abscisse $x = x_p$ contribue à la valeur du groupe

$$\pi(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

avec l'expression :

$$\frac{1}{n}\left[-\Phi(x_p)+F(x_p)\right]\sin n(x-x_p)+\frac{1}{n^2}\left[\Phi'(x_p)-F'(x_p)\right]\cos n(x_p)$$

$$+\frac{1}{n^3}\left[\Phi''(x_p)-F''(x_p)\right]\sin x(x-x_p)+\frac{1}{n^4}\left[-\Phi'''(x_p)+F'''(x_p)\right]\cos n(x-x_p) \qquad (18)$$

Il en résulte que le terme général de la série Fourier de la fonction entière $f(x)$, défini par la relation

$$H_n = A_n \cos nx + B_n \sin nx \qquad (19)$$

s'obtiendra en sommant les contributions de tous les points de discontinuité donnés par les relations (18) c'est-à-dire que nous aurons :

$$\pi H_n = \pi(A_n \cos nx + B_n \sin nx) = \sum \frac{1}{n} s \sin n(x-x_p) - \sum \frac{1}{n^2} s' \cos n(x-x_p)$$

$$-\sum \frac{1}{n^3} s'' \sin n(x-x_p) + \sum \frac{1}{n^4} s''' \cos n(x-x_p)$$

. . . . . (20)

relation dans laquelle nous avons noté par :

$$s_p^{(K)} = F^{(K)}(x_p) - \Phi^{K)}(x_p) \qquad (21)$$

la valeur du saut des dérivées d'ordre K des fonctions $F(x)$ et $\Phi(x)$ situées à droite, resp. à gauche, du point de discontinuité d'abscisse $x = x_p$ correspondant à cette abscisse.

Pour obtenir les valeurs séparées des coefficients πA_n et πB_n on développe les expressions $\sin n(x-x_p)$ en égalant les coefficients de $\cos nx$ et de $\sin nx$, dans les deux membres de l'égalité (20).

On obtient finalement les relations définitives :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}\sum s \sin nx - \frac{1}{n^2}\sum s' \cos nx + \frac{1}{n^3}\sum s'' \sin nx + \frac{1}{n^4}\sum s''' \cos nx - \frac{1}{n^5}\sum s^{IV} \sin nx - \frac{1}{n^6}\sum s^{V} \cos nx + + \ldots \quad (22)$$

$$\pi B_n = \frac{1}{n}\sum s \cos nx - \frac{1}{n^2}\sum s' \sin nx - \frac{1}{n^3}\sum s'' \cos nx + \frac{1}{n^4}\sum s''' \sin nx + \frac{1}{n^5}\sum s^{IV} \cos nx - \frac{1}{n^6}\sum s^{V} \sin nx - + + \ldots \quad (23)$$

2.2. — *L'exposé de la méthode des discontinuités fait par Mr. Albert Eagle.*

Mr. A. Eagle procède de la manière suivante :

Soit I_α, I_β, $I_\gamma \ldots I_\alpha^1$, I_β^1, $I_\gamma^1 \ldots I_\alpha^2$, I_β^2, I_γ^2 les discontinuités de la fonction aux points d'abscisses α, β, γ pour lesquels :

$$I^{(K)}(\alpha) = F^{(K)}(\alpha) - \Phi^{(K)}(\alpha) \quad (24)$$

représente le saut des dérivées d'ordre (K) au points d'abscisse (α), $F(x)$ et $\phi(x)$ étant les fonction représentées par les arcs de paraboles situés à droite, resp. à gauche du point d'abscisse α.

Les coefficients de Fourier A_n et B_n de la fonction entière étant :

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{et} \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

il résulte :

$$A_n + jB_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\ e^{jnx} \, dx \quad (25)$$

En integrant par parties, on obtient :

$$A_n + jB_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{f(x)\ e^{jnx}}{nj}\right] - \frac{1}{\pi nj}\int f'(x)\ e^{jnx} \, dx \quad (26)$$

Eagle suppose tout d'abord que $f(x)$ est représentée par une fonction analytique entre les abscisses 0 et α et par une autre fonction entre les abscisses α et 2π, de sorte qu'en considérant les limites *pour le premier terme* de l'expression (26), il obtient :

$$A_n + jB_n = \frac{1}{\pi jn}\left\{f(\alpha - 0)\ e^{jn\alpha} - f(0)\ e^{jn0} + f(2\pi)\ e^{jn2\pi} - f(\alpha + 0)\ e^{jn\alpha}\right\} \quad (27)$$

Dans l'hypothèse qu'il n'existe aucune discontinuité au point $x = 0$, on a la relation $f(2\pi) = f(0)$ et $e^{2\pi jn} = e^{jn0}$, de sorte que l'expression ci-dessus (27) devient :

$$-\frac{e^{jn\alpha}}{\pi jn}\left[f(\alpha+0)-f(\alpha-0)\right]=\frac{jI_\alpha\, e^{jn\alpha}}{\pi n} \qquad (28)$$

étant donnée la définition des discontinuités $I_\alpha^{(K)}$ de la relation (24).

S'il existe également d'autres discontinuités aux points d'abscisses β, γ, etc., il résulte, nous dit Eagle, qu'en fractionnant l'intégration en intégrations partielles de 0 à α, de α à β, etc.... le premier terme de la relation (26) deviendra :

$$\frac{1}{\pi n}\sum I_\alpha\, e^{jn\alpha} \qquad (28\text{ bis})$$

le signe $\sum$ se rapportant aux discontinuités d'ordre 0 de la fonction $f(x)$, c.-à-d. aux discontinuités des ordonnées de la fonction aux point $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, etc.

Si nous intégrons de la même façon, par parties, le deuxième terme de la relation (26), nous obtenons :

$$-\frac{1}{\pi nj}\left[\frac{f'(x)\, e^{jnx}}{nj}\right]+\frac{1}{\pi n^2 j^2}\int f''(x)\, e^{jnx}\, dx \qquad (29)$$

D'une manière exactement semblable, la valeur du premier terme de cette expression est :

$$-\frac{1}{\pi n^2}\sum I'_\alpha\, e^{jn\alpha} \qquad (30)$$

où I'_α est la discontinuité de $f'(x)$ pour $x = \alpha$ et le signe $\sum$ s'étend à toutes ces discontinuités.

Procédant de la même manière, on obtient le résultat final :

$$\pi(A_n + jB_n)=\frac{1}{n}\sum I_\alpha\, e^{jn\alpha}-\frac{1}{n^2}\sum I'_\alpha\, e^{jn\alpha}-\frac{1}{n^3}\sum I''_\alpha\, e^{jn\alpha}+$$
$$+\frac{1}{n^4}\sum I'''_\alpha\, e^{jn\alpha}\ldots \qquad (31)$$

Eagle fait remarquer que cette série est finie.

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient finalement :

$$\pi A_n=-\frac{1}{n}\sum I_\alpha \sin n\alpha-\frac{1}{n^2}\sum I'_\alpha \cos n\alpha+\frac{1}{n^3}\sum I''_\alpha \sin n\alpha+$$
$$+\frac{1}{n^4}\sum I'''_\alpha \cos n\alpha-\frac{1}{n^5}\sum I^{IV}_\alpha \sin n\alpha-\frac{1}{n^6}\sum I^{V}_\alpha \cos n\alpha++-- \qquad (32)$$

$$\pi B_n = \frac{1}{n}\sum I_\alpha \cos n\alpha - \frac{1}{n^2}\sum I'_\alpha \sin n\alpha - \frac{1}{n^3}\sum I''_\alpha \cos n\alpha +$$

$$+\frac{1}{n^4}\sum I'''_\alpha \sin n\alpha + \frac{1}{n^5}\sum I^{IV}_\alpha \cos n\alpha - \frac{1}{n^6}\sum I^{V} \sin n\alpha - \ldots \quad (33)$$

c.-a-d. les mêmes formules que celles de E. Abason, avec la différence que les sauts de la fonction sont notés par $I^{(K)}$ au lieu de $s^{(K)}$.

3. — *Nouvel exposé, de l'auteur, de la méthode des discontinuités.*

La démonstration de E. Abason est un peu longue, vu que l'auteur, ainsi que nous l'avons vu, fait un détour inutile pour arriver aux valeurs des coefficients A_n et B_n, en calculant tout d'abord le terme général de la série Fourier $H_n = A_n \cos nx + B_n \sin nx$.

La démonstration de Mr. Eagle ne présente pas cet inconvénient, mais on peut lui reprocher qu'au commencement il fait l'hypothèse inutile que la fonction $f(x)$ est formée seulement de deux fonctions partielles, ce qui n'est pas du tout nécessaire ; on fait ensuite $f(0) = f(2\pi)$, c.-à-d. on fait l'hypothèse que la fonction ne possède pas de discontinuités à l'origine, ce qui prête à une confusion, en ce qu concerne l'obligation de prendre en considération pour le calcul des coefficients A_n et B_n les discontinuités des extrémités de la période $x = 0$ et $x = 2\pi$, (Voir à ce sujet, l'observation de la page 11).

C'est pour ces raisons et d'autres encore que nous allons présenter un nouvel exposé du principe de la méthode des discontinuités, que nous considérons comme étant le plus simple, le plus général et qui montre la vraie nature du problème.

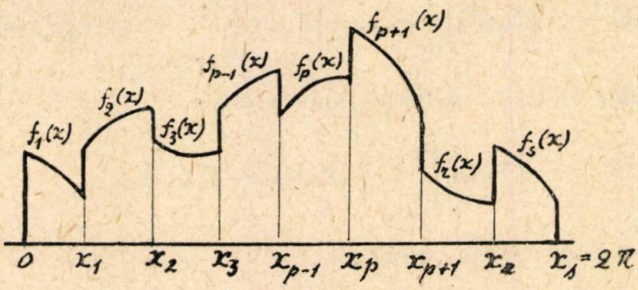


Fig. 2

Soit une fonction périodique $f(x)$ représentée dans la fig. 2 et formée de plusieurs fonctions élémentaires $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_p(x)$, $f_s(x)$ correspondant aux intervalles $x_0 - x_1$, $x_1 - x_2$, $x_{p-1} - x_p$, ..., $xr - x_s = 2\pi$.

Les coefficients de Fourier de la fonction générale $f(x)$ sont donnés par les relations :

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{et} \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Contrairement au procédé suivi tant par E. Abason que par A. Eagle, nous allons nous occuper tout d'abord d'un seul de ces coefficients, par exemple de A_n.

Puisque $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_p(x) + \ldots$
le coeffcient A_n s'obtient par une somme des intégrations partielles :

$$\pi A_n = \int_0^{x_1} f_1(x)\cos nx\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\cos nx\,dx + \ldots + \int_{x_{p-1}}^{x_p} f_p(x)\cos nx\,dx + \\ + \ldots + \int_{x_{s-1}}^{x_s=2\pi} f_s(x)\cos nx\,dx \qquad (34)$$

correspondant aux s intervalles de la fonction $f(x)$.

L'emploi de cette dernière relation constitue le procédé habituel de calcul du coefficient A qui consiste à effectuer une intégration partielle pour chaque intervalle et que nous allons nommer *„la méthode classique des intervalles"*.

Nous donnerons à cette méthode des intervalles une nouvelle forme :

Soient $F_1(x)$, $F_2(x) \ldots F_p(x) \ldots, F_s(x)$ les intégrales indéfinies de l'expression (26), c'est-à-dire en général :

$$F_p(x) = \int f_p(x)\cos nx\,dx. \qquad (35)$$

Avec ces notations, la valeur de A_n devient :

$$\pi A_n = \Big[F_1(x)\Big]_0^{x_1} + \Big[F_2(x)\Big]_{x_1}^{x_2} + \ldots + \Big[F_p(x)\Big]_{x_{p-1}}^{x_p} + \ldots + \Big[F_s(x)\Big]_{x_{s-1}}^{x_s=2\pi} \qquad (36)$$

Et comme pour le terme général nous avons :

$$\Big[F_p(x)\Big]_{x_{p-1}}^{x_p} = F_p(x_p) - F_p(x_{p-1}) \qquad (37)$$

nous obtenons pour πA_n la valeur :

$$\pi A_n = \Sigma\,[F_p(x_p) - F_p(x_{p-1})] \qquad (38)$$

$$\pi A_n = [F_1(x_1) - F_1(0)] + [F_2(x_2) - F_2(x_1)] + \ldots + [F_p(x_p) - F_p(x_{p-1})] + \\ + [F_s(x_s) - F_s(x_{s-1})].$$

Cette relation représente évidement l'ancien mode de calcul du coefficient A_n, présenté sous une forme un peu différente de la relation (34).

Chaque intervalle $x_{p-1} - x_p$ c.-à-d. chaque fonction $f_p(x)$ de l'intervalle d'ordre p contribuera à la valeur du coefficient A_n par l'expression :

$$F_p(x_p) - F_p(x_{p-1}).$$

Or, nous observons qu'il existe une autre façon de faire la somme des termes de la relation (38), la valeur de A_n pouvant s'écrire également :

$$\pi A_n = [0 - F_1(0)] + [F_1(x_1) - F_2(x_1)] + [F_2(x_2) - F_3(x_2)] + \ldots$$
$$\ldots + [F_p(x_p) - F_{p-1}(x_p)] + \ldots + [F_s(x_s) - 0] \qquad (39)$$

c.-à-d. nous avons groupé deux à deux les termes qui proviennent des points $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p \ldots x_s = 2\pi$ pour lesquels la fonction présente des discontinuités.

Cette relation peut être interprétée dans le sens que chaque point de discontinuité x_p de la fonction générale $f(x)$ contribue à la valeur du coefficient A_n par l'expression :

$$F_p(x_p) - F_{p+1}(x_p)$$

c.-à-d. sous une forme générale abréviée, la valeur de πA_n peut s'écrire :

$$\pi A_n = \Sigma [F_p(x_p) - F_{p+1}(x_p)] \qquad (41)$$

le signe Σ s'étendant à tous les points pour lesquels la fonction présente des dicontinuités, y compris l'origine d'abscisse $x = 0$ et l'extremité $x_s = 2\pi$, pour ces deux derniers points la fonction $F(x)$ située à gauche de l'origine et à droite de l'extrémité $x_s = 2\pi$ *etant* considérée comme égale à zéro.

Voici donc les deux moyens de calcul du coefficient A_n d'une fonction périodique présentant des discontinuités :

I. *Ou l'on considère la contribution apportée par les différents intervalles de la fonction,* et dans ce cas on applique la formule :

$$\pi A_n = \Sigma [F_p(x_p) - F_p(x_{p-1})] \qquad (41)$$

ceci représentant la manière habituelle de calcul que nous allons toutefois désigner — vu la forme un peu plus générale que nous lui avons donnée — comme *la nouvelle méthode des intervalles.*

II. *Ou l'on considère la contribution apportée par les différents points de discontinuité* x , et dans ce cas on applique la formule :

$$\pi A_n = \Sigma [F_p(x_p) - F_{p+1}(x_p)] \qquad (42)$$

Ce deuxième mode de calcul n'est autre chose que la méthode des discontinuités présentée sous une forme plus générale et que nous allons désigner donc comme *la méthode généralisée des discontinuités.*

Observation.

On comprend immédiatement que si nous avions noté par $S_p(x)$ la valeur de l'intégrale indéfinie

$$S_p(x) = \int f_p(x) \sin nx \, dx$$

la valeur du coefficient πB_n aurait été donnée par des formules identiques à celle obtenues pour πA_n, c.-à-d. :

$$\pi B_n = \Sigma\,[S_p(x_p) - S_p(x_{p-1})] \quad \text{pour la nouvelle méthode des intervalles} \tag{44}$$

$$\pi B_n = \Sigma\,[S_p(x_p) - S_{p+1}(x_p)] \quad \text{pour la méthode généralisée des discontinuités} \tag{45}$$

4. *Déduction des formules de calcul développées pour la méthode des discontinuités et pour la nouvelle méthode des intervalles.*

Nous allons appliquer maintenant les formules (41) et (42) pour le cas général d'un fonction $f(x)$ constituée — ainsi que nous l'avons supposé — par une série de fonctions partielles, $f_1(x)$, $f_2(x)$ etc. dont nous ne préciserons pas, pour le moment, la nature, pour plus de généralité.

Nous nous intéresserons tout d'abord seulement du coefficient A_n, en calculant l'intégrale indéfinie

$$F_p(x) = \int f_p(x)\cos nx\,dx$$

En intégrant par parties, nous obtenons premièrement

$$F_p(x) = \int f_p(x)\cos nx\,dx = \frac{f_p(x)\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\int f'_p(x)\sin nx\,dx$$

Répétant l'opération sur l'intégrale du second membre nous aurons :

$$F_p(x) = \frac{1}{n} f_p(x)\sin nx + \frac{1}{n^2} f'_p(x)\cos nx - \frac{1}{n^2}\int f''_p(x)\cos nx\,dx$$

formule de récurrence qui nous permet de trouver finalement :

$$F_p(x) = \frac{1}{n} f_p(x)\sin nx + \frac{1}{n^2} f'_p(x)\cos nx - \frac{1}{n^3} f''_p(x)\sin nx -$$

$$- \frac{1}{n^4} f'''_p(x)\cos nx + + - - \text{ etc.} \tag{47}$$

Tenant compte de cette valeur de l'intégrale indéfinie du terme général, la valeur de πA_n donnée par la formule (42) de la méthode des discontinuités $\pi A_n = \Sigma\,[F_p(x_p) - F_{p+1}(x_p)]$ s'écrit :

$$\pi A_n = \sum \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{f_p(x_p) - f_{p+1}(x_p)}{n}\sin nx_p + \dfrac{f'_p(x_p) - f'_{p+1}(x_p)}{n^2}\cos nx_p \\ - \dfrac{f''_p(x_p) - f''_{p+1}(x_p)}{n^3}\sin nx_p - \dfrac{f'''_p(x_p) - f'''_p(x_p)}{n^4}\cos nx_p + + - - \end{array} \right\} \tag{48}$$

Si nous exprimons par :

$$s_p^{(k)} = f_{p+1}^{(k)}(x_p) - f_p^{(k)}(x_p)$$

le saut des dérivées d'ordre K au point x_p de la fonction située à droite, par rapport à la fonction située à gauche du point x_p, nous obtenons :

$$\pi A_n = \sum \left[-\frac{s_p \sin nx_p}{n} - \frac{s'_p \cos nx_p}{n^2} + \frac{s''_p \sin nx_p}{n^3} + \frac{s'''_p \cos nx_p}{n^4} - - + + \right] \quad (50)$$

formule qui, laissant de côté les indices p, peut s'écrire :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}\sum s \sin nx - \frac{1}{n^2}\sum s' \cos nx + \frac{1}{n^3}\sum s'' \sin nx$$

$$+\frac{1}{n^4}\sum s''' \cos nx - \frac{1}{n^5}\sum s''' \sin nx - \frac{1}{n^6}\sum s^{v} \cos nx + + - - \quad (51)$$

le signe Σ se rapportant — pour chaque terme — à tous les points de discontinuité où il existe des sauts s, s', s'' etc.

C'est la formule trouvée par E. Abason et A. Eagle pour le coefficient πA_n.

Pour le calcul du coefficient B_n nous procédons de la même manière, calculant l'intégrale indéfinie :

$$S_p(x) = \int f_p(x) \sin nx \, dx$$

Une première intégration par parties nous donne :

$$S_p(x) = \int f_p(x) \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} f_p(x) \cos nx + \int \frac{f'_p(x) \cos nx \, dx}{n}$$

et tenant compte de la relation (47) pour le calcul de l'intégrale du second membre, on obtient immédiatement :

$$S_p(x) = \int f_p(x) \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} f_p(x) \cos nx + \frac{1}{n^2} f'_p(x) \sin nx +$$

$$+\frac{1}{n^3} f''_p(x) \cos nx - \frac{1}{n^4} f^{IV}(x) \sin nx - \frac{1}{n^5} f^{IV}_p(x) \cos nx + \frac{1}{n^6} f^{V}_p(x) \sin nx - + + - \quad (53)$$

En tenant compte de cette valeur de l'intégrale indéfinie du terme général, la valeur de πB_n donné par la formule (45) sera :

$$\pi B_n = \sum [S_p(x_p) - S_{p+1}(x_p)]$$

On trouve immédiatement la valeur finale :

$$\pi B_n = \frac{1}{n}\sum s \cos nx - \frac{1}{n^2}\sum s' \sin nx - \frac{1}{n^3}\sum s'' \cos nx$$

$$+\frac{1}{n^4}\sum s''' \sin nx + \frac{1}{n^5}\sum s^{IV} \cos nx - \frac{1}{n^6}\sum s^{V} \sin nx - + + - - \text{ etc} \quad (54)$$

c.-à-d. la formule de Abason-Eagle.

Ceci est, nous pensons, l'exposé le plus simple, le plus clair et en même temps le plus général de la méthode des discontinuités. Il en résulte, très nettement, qu'à la base des formules Abason-Eagle (51) et (54) se trouvent les relations (41) et 53 quexpriment les intégrales indefinies $\int f_p(x) \cdot \cos nx \cdot dx$ et $\int f_p(x) \cdot \sin nx dx$ en fonction des dérivées successives de la fonction $f_p(x)$ et que par conséquent ces formules s'appliquent seule

ment aux fonctions $f_p(x)$ intégrables par parties et pour lesquelles, en outre, les expressions (47) et (53) des intégrales indéfinies conduisent à des valeurs finies et bien déterminées.

Ainsi, la méthode des discontinuités pourra être appliquée avec succès, sous la forme des formules Abason-Eagle, spécialement à l'analyse des fonctions formées par des arcs de parabole d'un ordre quelconque, fonctions pour lesquelles la méthode a été premièrement destinée, vu que le nombre des dérivées de ces fonctions est limité et par conséquant les expressions (51) et (54) ont un nombre fini de termes.

La méthode des discontinuités peut également s'appliquer aux fonctions exponentielles et surtout aux fonctions sinusoïdales, comme on le verra plus loin, pour lesquelles les expressions (47) et (53) et donc (51) et (54) donneront lieu, au moins en apparence, à un nombre infini de termes, dont la somme sera en tout cas calculable.

Les formules Abason-Eagle ne pourront pourtant s'appliquer, même dans ce dernier cas, que sous la forme générale que nous lui avons donnée, c.-à-d. en utilisant les formules (40) :

$$\pi A_n, \pi B_n = \sum [F_p(x_p) - F_{p+1}(x_p)]$$

dans lesquelles les intégrales indéfinies $F_p(x) = \int f_p(x) \begin{matrix}\cos nx \\ \sin nx\end{matrix} dx$ seront calculées par d'autres méthodes du calcul intégral que par la méthode d'intégration par parties ce qui fera que, pour ces cas, l'utilisation de la méthode des discontinuités ne présentera plus un intérêt aussi grand que pour le cas des fonctions mentionnées ci-dessus.

Avant de montrer l'avantage du calcul de l'analyse harmonique par la méthode des discontinuités, il est intéressant de voir ce que devient la formule (41) de la *nouvelle méthode des intervalles.*

En introduisant dans cette formule la valeur de l'intégrale indéfinie de la relation (47) et désignant par y, y', y'' etc. la valeur de la fonction d'un intervalle quelconque $f_p(x)$, resp. les dérivées $f'_p(x)$. $f''_p(x)$ etc. et par x_{p-1} et x_p les limites d'intégration d'un intervalle quelconque $x_{p-1} - x_p$, on obtient pour πA_n la valeur :

$$\pi A_n = \frac{1}{n}\sum \left[y \sin nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^2}\sum \left[y' \cos nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} - \frac{1}{n^3}\sum \left[y'' \sin nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

$$- \frac{1}{n^4}\sum \left[y''' \cos nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^5}\sum \left[y^{IV} \sin nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^6}\sum \left[y^{V} \cos nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} - - \tag{55}$$

et pour πB_n

$$\pi B_n = -\frac{1}{n}\sum \left[y \cos nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^2}\sum \left[y' \sin nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^3}\sum \left[y'' \cos nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

$$- \frac{1}{n^4}\sum \left[y''' \sin nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} - \frac{1}{n^5}\sum \left[y^{IV} \cos nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^6}\sum \left[y^{V} \sin nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} \tag{56}$$

5. LES AVANTAGES DE L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DES DISCONTINUITÉS PAR RAPPORT À LA MÉTHODE CLASSIQUE DES INTERVALLES ET À LA NOUVELLE MÉTHODE DES INTERVALLES

Dans la suite, nous nous occuperons tout d'abord du cas où la fonction totale $f(x)$ à analyser est constituée par une série d'arcs de parabole d'un ordre quelconque m, d'équation :

$$f_p(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \alpha^1 x + \alpha_0$$

qui présente comme cas particulier le cas des fonctions linéaires c.-à-d. des fonctions polygonales dont l'analyse harmonique se rencontre très souvent en électrotechnique.

Pour l'analyse de ces fonctions, on est maintenant en possession de trois catégories de formules :

1) les formules Abason-Eagle (51) et (54) de la méthode des discontinuités ;

2) les formules de l'auteur de la nouvelle méthode des intervalles (55) et (56) ;

3) les formules de l'ancienne méthode des intervalles (la méthode classique des intervalles) qui sont les suivantes :

$$\pi A_n = \int_0^{x_1} f_1(x) \cos nx \, dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) \cos nx \, dx + \cdots + \int_{x_{p-1}}^{x_p} f_p(x) \cos nx \, dx \cdots +$$

$$\pi A_n = \int_0^{x_1} f_1(x) \sin nx \, dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) \sin nx \, dx + \cdots + \int_{x_{p-1}}^{x_p} f_p(x) \sin nx \, dx + \cdots \quad (57)$$

Jusqu'à présent, on a évidemment fait la comparaison seulement entre la méthode des discontinuités et la méthode classique des intervalles, la nouvelle méthode des intervalles n'étant pas connue sous la forme que nous lui avons donnée.

Aussi bien les auteurs de la méthode des discontinuités, E. Abason et A. Eagle, que tous ceux qui se sont occupés de la méthode des discontinuités, ont souligné que l'avantage de celle-ci consiste en ce que la calcul des coefficients A_n et B_n se réduit à une simple somme des termes donnés par les formules (51) et (54) et obtenus par la dérivation des fonctions partielles dont est composée la fonction à analyser $f(x)$, tandis que le calcul fait d'après la méthode classique des intervalles réclame une série d'intégrations des mêmes fonctions partielles, ce qui évidemment est beaucoup plus difficile et plus laborieux.

A cela il faut ajouter un autre grand avantage, sur lequel, à notre connaissance, on n'a pas assez insisté :

A l'inspection des formules Abason-Eagle (51) et (54), on constate que la formule qui donne la valeur du coefficient B_n se déduit immédiatement à partir de la formule pour le coefficient A_n, en remplaçnt dans celle-ci :

$$\cos nx \quad \text{par} \quad \sin nx$$

et (58)

$$\sin nx \quad \text{par} \quad -\cos nx.$$

Par conséquent, le calcul des coefficients A_n et B_n fait par la méthode des discontinuités *est réduit de moitié* par rapport à la méthode classique des intervalles, qui réclame l'effectuation de calculs également pour les intégrales partielles $\int f_p(x)\cos nx dx$ pour A_n et pour les intégrales $\int f_p(x)\sin nx dx$ pour B_n.

On comprend donc que la méthode des discontinuités apporte une simplification considérable par rapport à la méthode classique des intervalles. Nous donnerons d'ailleurs un seul exemple pour illustrer cette affirmation (voir page 17 et suivantes).

Il reste maintenant à préciser le rôle et l'importance que peut avoir l'emploi des formules (55) et (56) de l'auteur, concernant la nouvelle méthode des intervalles.

Il est facilement compréhensible que ces formules sont également plus convenables que les formules de la méthode classique des intervalles, vu qu'elles présentent approximativement les mêmes avantages que la méthode des discontinuités et, notamment, elles contiennent également seules les dérivées des fonctions partielles y', y'', etc. Ensuite, ces formules simplifient également de moitié le calcul des coefficients, A_n et B_n parce que la formule (56) pour le calcul de B_n se déduit immédiatement de la formule (55) pour A_n, *en remplaçant* ici aussi cos nx par sin nx et sin nx par $-$ cos nx, ainsi qu'il a été le cas pour les formules Abason-Eagle.

Il ne reste maintenant qu'a faire la comparaison entre les formules de la méthode des discontinuités et les formules de la nouvelles méthode des intervalles. A cet égard, l'on peut affirmer, commme on le verra d'ailleurs par des exemples numériques, que la méthode des discontinuités est plus avantageuse que la nouvelle méthode des intervalles même, bien que les formules (55) et (56) de cette dernière renferment les mêmes termes y, y', y'' etc. que les formules Abason-Eagle, et en nombre égal, car les sauts s', s'' etc. sont définis comme la différence de deux termes pareils :

$$s_p^{(K)} = y_{p+1}^{(K)} - y_p^{(K)}.$$

Cet avantage est tout d'abord très net pour les fonctions polygonales qui présentent des sauts d'ordonnées s et de tangente s' que l'on peut relever immédiatement sur la figure représentant la fonction à analyser.

Ensuite, si en certains points de discontinuité il existe des sauts nuls, lorsqu'on applique la méthode des discontinuités ces sauts ne sont

plus pris en considération, tandis que pour appliquer la méthode des intervalles, il faut considérer tous les termes, sans exception, deux pour chaque intervalle et à la fin du calcul seulement, on constate que les termes qui proviennent du point de discontinuité, où le saut était nul, sont égaux et de signes contraires, donnant, par conséquent, une somme nulle.

La méthode des discontinuités présente aussi un avantage réel par rapport à la méthode des intervalles au cas où en certains points de discontinuité, par ex. d'abscisses x_k, x_m, x_p les sauts d'un certain ordre, par ex. les sauts des tangentes s'_k, s'_m, s'_p sont identiques, ayant une valeur commune s'. Dans ce cas, la contribution de ces trois points peut s'écrire immédiatement sous la forme :

$$-\frac{s'}{n^2}[\cos nx_k + \cos nx_m + \cos nx_p] \qquad (59)$$

tandis qu'en appliquant la méthode des intervalles, on calcule six termes de la forme $\frac{y'}{n^2} \cdot \cos nx$ et ce n'est qu'à la fin des calculs que l'on constate que leur somme est égale à la somme ci-dessus.

On comprend d'après ce qui vient d'être dit, que l'avantage de la méthode des discontinuités est également important au cas où la fonction $f(x)$ à analyser est formée par plusieurs arcs de parabole identiques qui, justement, donnent lieu en différents points à des sauts identiques de différents ordres.

Il est nécessaire de remarquer que la méthode des discontinuités est d'autant plus avantageuse que le nombre des fonctions partielles $f_p(x)$ de la fonction $f(x)$ à analyser est plus grand, et pour le cas où la fonction $f(x)$ est formée d'un seul arc de courbe la méthode des discontinuités est parfaitement équivalente à la nouvelle méthode des intervalles.

Dans l'exemple de calcul qui suit et qui a été choisi, à dessein, avec des sauts de tangente et d'ordonnées nuls, qui mettent bien en évidence les avantages de la méthode des discontinuités, nous allons comparer cette dernière avec la nouvelle méthode des intervalles et avec la méthode classique.

6. EXEMPLE DE CALCUL COMPARATIF PAR LA MÉTHODE DES DISCONTINUITÉS, LA MÉTHODE DES INTERVALLES ET LA MÉTHODE CLASSIQUE, D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE POLYGONALE

Soit la fonction de la fig. 3 pour laquelle les points de discontinuité sont : O, A, B, C, D, E, F et G d'abscisses O, x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F et $x_G = 2\pi$.

Nous avons marqué sur la fig. 3 les coefficients angulaires K des segments de droite OA', $A''B'$, $B''C'$, et $C''D'$ et $-K_1$, $-K_2$, $-K_3$, ceux des segments $D'E'$, $E'F'$ et $F'G$ (K_1, K_2, K_3 étant positifs).

6.1. — *Le calcul des coefficients A_n et B_n d'après la méthode des discontinuités.*

Pour la fonction polygonale ci-dessus, qui comporte seulement des sauts d'ordonnées et de tangentes, les formules (51) et (54) se réduisent à leurs deux premiers termes :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}\sum s \sin nx - \frac{1}{n^2}\sum s' \cos nx \tag{60}$$

$$\pi B_n = \frac{1}{n}\sum s \cos nx - \frac{1}{n^2}\sum s' \sin nx \tag{61}$$

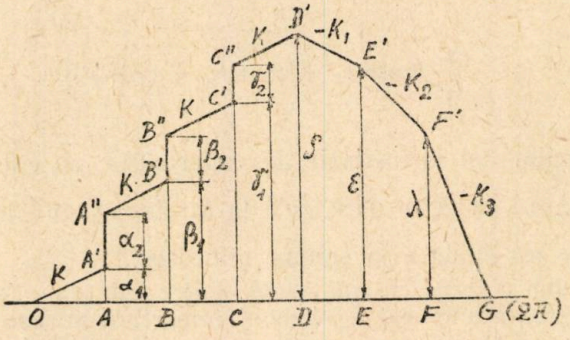


Fig. 3

Nous allons calculer simultanément les termes nécessaires pour le calcul des deux coefficients A_n et B_n.

a) *Calcul du terme* $-\frac{1}{n}\sum s \sin nx$ pour πA_n

Calcul du terme $\frac{1}{n}\sum s \cos nx$ pour πB_n.

On constate que les sauts d'ordonnée s existent seulement aux points de discontinuité A, B et C d'abscisses x_A, x_B et x_C ayant les valeurs :

$$s_A = \alpha_2 \quad s_B = \beta_2 \quad s_D = \gamma_2.$$

Par conséquent on aura :

$$-\frac{1}{n}\sum s \sin nx = -\frac{1}{n}[\alpha_2 \sin nx_A + \beta_2 \sin nx_B + \gamma_2 \sin nx_C], \tag{62}$$

et

$$\frac{1}{n}\sum s \cos nx = \frac{1}{n}[\alpha_2 \cos nx_A + \beta_2 \cos nx_B + \gamma_2 \cos nx_C]. \tag{63}$$

b) *Calcul du terme* $-\frac{1}{n^2}\sum s' \cos nx$ pour πA_n.

Calcul du terme $-\frac{1}{n^2}\sum s' \sin nx$ pour πB_n.

Il existe des sauts de tangente aux points O, D, E, F et G d'abscisses 0, x_D, x_E, x_F et $x_G = 2\pi$ ayant les valeurs :

Au point 0 $s'_0 = K$
„ „ D $s_D = -K_1 - K$
„ „ E $s'_E = -K_2 + K_1$
„ „ F $s'_F = -K_3 + K_2$
„ „ G $s'_G = 0 + K_3 = K_3$

Par conséquent, on aura pour πA_n :

$$-\frac{1}{n^2}\sum s' \cos nx = -\frac{1}{n^2}[K\cos n0 - (K_1+K)\cos nx_D - (K_2-K_1)\cos nx_E - \\ -(K_3-K_2)\cos nx_F + K_3\cos nx_G]. \tag{65}$$

De même pour πB_n :

$$-\frac{1}{n^2}\sum s' \sin nx = -\frac{1}{n^2}[K\sin n0 - (K_1+K)\sin nx_D - (K_2-K_1)\sin nx_E - \\ -(K_3-K_2)\sin nx_F + K_3\sin nx_G]. \tag{66}$$

La valeur du coefficient πA_n sera donc donnée en faisant la somme des relations (62) et (65) :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}[\alpha_2 \sin nx_A + \beta_2 \sin nx_B + \gamma_2 \sin nx_C] - \\ -\frac{1}{n^2}[K\cos n0 - (K_1+K)\cos nx_D - (K_2-K_1)\cos nx_E - (K_3-K_2)\cos nx_F + \\ + K_3\cos nx_G]. \tag{67}$$

Et tenant compte des relations :

$$K\cos n0 = K \text{ et } K_3\cos nx_G = K_3\cos n2\pi = K_3, \tag{68}$$

on obtient la valeur définitive :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}[\alpha_2 \sin nx_B + \beta_2 \sin nx_B + \gamma_2 \sin nx_C] - \\ -\frac{1}{n^2}[K - (K_1+K)\cos nx_D - (K_1-K_2)\cos nx_E - \\ -(K_3-K_2)\cos nx_F + K_3]. \tag{69}$$

La valeur du coefficient πB_n sera donnée en faisant la somme des termes des relations (63) et (66) :

$$\pi B_n = \frac{1}{n}[\alpha_2\cos nx_A + \beta_2\cos nx_B + \gamma_2\cos nx_C] - \\ -\frac{1}{n^2}[K\sin n0 - (K_1+K)\sin nx_D - (K_2-K_1)\sin nx_E - \\ -(K_3-K_2)\sin nx_F + K_3\sin nx_G]. \tag{70}$$

Et tenant compte des relations :

$$K\sin n0 = 0 \text{ et } K_3\sin nx_G = K_3\sin n2\pi = 0, \tag{71}$$

on obtient la valeur définitive :

$$\pi B_n = \frac{1}{n}[\alpha_2 \cos nx_A + \beta_2 \cos nx_B + \gamma_2 \cos nx_C] -$$

$$-\frac{1}{n^2}[-(K_1 + K)\sin nx_D - (K_2 - K_1)\sin nx_E - (K_3 - K_2)\sin nx_F]. \quad (72)$$

Observation concernant le calcul du coefficient B_n. Ainsi que nous l'avons dit page 16, la valeur du coefficient B_n pourrait être déduite immédiatement, sans aucun autre calcul, de la valeur du coefficient A_n en remplaçant dans l'expression de celui-ci (67) cos nx par sin nx et sin nx par $-\cos nx$.

Cependant, pour obtenir des valeurs correctes pour B_n il faut observer rigoureusement la règle suivante : *écrire toujours l'expression complète de* A_n, *sans faire aucune simplification des fonctions trigonométriques* sin nx et cos nx, c.-à-d. qu'il faut conserver dans l'expression de A_n des termes comme :

$$\cos n0 \quad \sin 2\pi n \quad \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{etc.},$$

sans mettre à leurs places leurs valeurs réelles qui sont :

$$1 \quad 0 \quad 0$$

Par les remplacements mentionnés on aurait mis correctement dans l'expression de B_n les termes

$$\sin n0 \quad -\cos 2n\pi \quad \sin(2n+1)\frac{\pi}{2},$$

dont les valeurs auraient été respectivement :

$$0 \quad -1 \quad -1$$

qui évidemment sont différentes des valeurs 1, resp. 0, resp. 0.

Ainsi, ayant déterminé la valeur de πA_n donnée par la relation (67) :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}[\alpha_2 \sin nx_A + \beta_2 \sin nx_B + \gamma_2 \sin nx_C] -$$

$$-\frac{1}{n^2}[K\cos n0 - (K_1 + K)\cos nx_D\,(K_2 - K_1)\cos nx_E -$$

$$-(K_3 - K_2)\cos nx_F + K_3 \cos nx_G] \quad (67, b)$$

qui a été calculée, à dessein, en tenant justement compte de la règle que nous venons de formuler, puisque nous avons conservé les termes K cos $n0$ et K_3 cos $n\,x_G = K_3$ cos $2n\pi$, nous pouvons en toute rigueur déduire de cette expression la valeur de B_n en remplaçant : cos nx par sin nx et sin nx par $-\cos nx$, obtenant ainsi la valeur :

$$\pi B_n = +\frac{1}{n}[\alpha_2 \cos nx_A + \beta_2 \cos nx_B + \gamma_2 \cos nx_C] -$$

$$-\frac{1}{n^2}[K\sin n0 - (K_1 + K_2)\sin nx_D - (K_2 - K_1)\sin nx_E -$$

$$-(K_3 - K_2)\sin nx_F + K_3 \sin nx_G], \quad (79, b)$$

qui est la valeur exacte et dans laquelle nous ferrons

$$K \sin 0 = 0 \text{ et } K_3 \sin n x_G = K_3, \sin 2\pi n = 0$$

ce qui nous conduira à la valeur définitive donnée par la relation (72).

Mais si l'on avait fait le remplacement en question dans la relation (69) qui donne la valeur définitive de πA_n, c.-à-d. dans laquelle on a déja introduit pour les termes $K \cos n0$ et $K_3 \cos 2n\pi$ leurs valeurs K resp. K_3, on aurait obtenu pour πB_n la valeur :

$$\pi B_n = \frac{1}{n} [\alpha_2 \cos n x_A + \beta_2 \cos n x_B + \gamma_2 \cos n x_C] -$$

$$- \frac{1}{n^2} [K - (K_1 + K_2) \sin n x_D - (K_2 - K_1) \sin n x_E -$$

$$- (K_3 - K_2) \sin n x_F + K_3] \qquad (73)$$

qui est inexacte.

Evidemment, le moyen très sûr d'éviter de pareilles erreurs est d'écrire simultanément les termes de B_n et ceux de A_n, ainsi que nous l'avons fait nous-mêmes, à dessein, pour l'exemple que nous avons traité.

Bien que cela ne complique pas trop les calculs, il est quand même préférable de ne calculer que le coefficient A_n et d'en déduire le coefficient B_n, en observant rigoureusement la règle indiquée ce qui simplifie au maximum les calculs.

C'est pourquoi, dans tous les exemples de calcul qui suivent, nous adopterons ce dernier procédé.

6.2. — *Le calcul des coefficients A_n et B_n par la nouvelle méthode des intervalles.*

Pour l'exemple que nous avons choisi, les formules (55) et (56) se réduisent à leurs deux premiers termes :

$$\pi A_n = \frac{1}{n} \sum \left[y \sin n x \right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^2} \sum \left[y' \cos n x \right]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

$$\pi B_n = - \frac{1}{n} \sum \left[y \cos n x \right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^2} \sum \left[y' \sin n x \right]_{x_{p-1}}^{x_p} \qquad (74)$$

x_{p-1} et x_p désignant les limites de gauche (g) et de droite (d) de chaque intervalle, ce qui permet d'écrire ,par exemple, pour πA_n :

$$\pi A_n = \frac{1}{n} \sum [y_d \sin n x_d - y_g \sin n x_g] +$$

$$+ \frac{1}{n^2} \sum [y'_d \cos n x_d - y'_g \cos n x_g] \qquad (75)$$

Nous allons calculer seul le coefficient πA_n et déduirons, à la fin, de son expression, la valeur du coefficient πB_n.

Calcul du terme $\frac{1}{n}\sum [y_d \sin nx_d - y_g \sin nx_g]$.

Les contributions des différents intervalles sont les suivantes :

l'intervalle OA $y_d = AA' = \alpha_1$ $y_g = 0$
Il résulte la somme : $\alpha_1 \sin nx_A - 0$

l'intervalle AB $y_d = \beta_1$ $y_g = \alpha_1 + \alpha_2$
Résultat : $\beta_1 \sin nx_B - (\alpha_1 + \alpha_2) \sin nx_A$

l'intervalle BC $y_d = \gamma_1$ $y_g = \beta_1 + \beta_2$
Résultat : $\gamma_1 \sin nx_C - (\beta_1 + \beta_2) \sin nx_B$

l'intervalle CD $y_d = \delta$ $y_g = \gamma_1 + \gamma_2$
Résultat : $\delta \sin x_D - (\gamma_1 + \gamma_2) \sin nx_C$

l'intervalle DE $y_d = \varepsilon$ $y_g = \delta$
Résultat : $\varepsilon \sin nx_F - \delta \sin nx_D$

l'intervalle EF $y_d = \lambda$ $y_g = \varepsilon$
Résultat : $\lambda \sin nx_F - \varepsilon \sin nx_E$

l'intervalle FG $y_d = 0$ $y_g = \lambda$
Résultat : $0 - \lambda \sin nx_F$

Faisant la somme de tous les termes on trouve finalement :

$$\frac{1}{n}\sum [y_d \sin nx_D - y_g \sin nx_g] = -\frac{1}{n}[\alpha_2 \sin nx_A + \beta_2 \sin nx_B + \gamma_2 \sin nx_C] \qquad (76)$$

On constate, ce que nous avons dit ci-dessus, que pour chacun des intervalles *OA, AB, BC,* et *CD* et surtout pour les intervalles *DE, EF* et *FG,* pour lesquels la *méthode des discontinuités n'a considéré aucun terme,* la méthode des intervalles a écrit 2 termes et ce n'est qu'à la fin des calculs que l'on a constaté que douze termes :

$$(\alpha_1 \sin nx_A - \alpha_1 \sin nx_A) + (\beta_1 \sin nx_B - \beta_1 \sin nx_B) + \ldots \text{ etc.} \ldots$$

s'annulent, deux à deux, et qu'il en reste seulement trois, notamment ceux indiqués dans la relation (71) qui donnent leur part de contribution au calcul du coefficient πA_n.

Calcul du terme $\frac{1}{n^2}\sum [y'_d \cos nx_d - y'_g \cos nx_g]$

Pour avoir les valeurs des dérivées y' de la fonction, on remarque que les fonctions des différents intervalles étant linéaires leurs dérivées se confondent avec le coefficient angulaire même du segment de droite représentatif.

Nous aurons ainsi :

Intervalle OA

L'équation de la droite OA' est :

$$y = Kx \text{ et donc } y' = K$$
$$y'_d = K \quad y'_g = K$$

In en résulte la somme : $K \cos nx_A - K \cos n0$

Intervalle AB

L'équation de la droite $A''B'$ *est :*

$$y = \alpha_1 + \alpha_2 + K(x - x_A) \text{ et donc } y' = K$$
$$y'_d = K \quad y'_g = K$$

Résultat : $K \cos nx_B - K \cos nx_A$

De la même manière, on obtient :

Intervalle BC $y'_d = K \quad y'_g = K$

Résultat : $K \cos nx_C - K \cos nx_B$

Intervalle CD $y'_d = K \quad y'_g = K$

Résultat : $K \cos nx_D - K \cos nx_C$

Intervalle DE $y'_d = -K_1 \quad y'_g = -K_1$

Résultat : $-K_1 \cos nx_E + K_1 \cos nx_D$

Intervalle EF $y'_d = -K_2 \quad y'_g = -K_2$

Résultat : $-K_2 \cos nx_F + K_2 \cos x_E$

Intervalle FG $y'_d = -K_3 \quad y'_g = -K_3$

Résultat : $-K_3 \cos nx_G + K_3 \cos nx_F$

Faisant la somme de tous ces résultats partiels, on obtient :

$$\frac{1}{n^2} \sum [\, y'_d \cos nx_D - y'_g \cos nx_g \,] = \frac{1}{n^2} [-K \cos n0 + (K + K_1) \cos nx_D +$$
$$+ (K_2 - K_1) \cos nx_E + (K_3 - K_2) \cos nx_F - K_3 \cos nx_G] \qquad (77)$$

On constate également ici que pour les points A, B et C pour lesquels les sauts de tangente s' sont nuls, la méthode des discontinuités n'a eu à considérer aucun terme, tandis que la méthode des intervalles a calculé inutilement six termes qui, à la fin, s'annulent deux à deux.

Faisant la somme des résultats (76) et (77) on obtient par la nouvelle méthode des intervalles le résultat final :

$$\pi A_n = \frac{1}{n} [-\alpha_2 \sin nx_A - \beta_2 \sin nx_B - \gamma_2 \sin nx_C] + \frac{1}{n^2} [-K \cos n0 +$$
$$+ (K + K_1) \cos nx_D + (K_2 - K_1) \cos nx_F + (K_3 - K_2) \cos nx_D - K_3 \cos nx_G] \qquad (78)$$

De cette valeur de πA_n dans l'expression de laquelle nous n'avons fait aucune réduction de lignes trigonométriques, nous déduisons immé-

diatement la valeur du coefficient πB_n, en remplaçant cos nx par sin nx et sin nx par — cos nx. On obtient de cette manière :

$$\pi B_n = \frac{1}{n}[\alpha_2 \cos nx_A + \beta_2 \cos nx_B + \gamma_2 \cos nx_C] +$$

$$+ \frac{1}{n^2}[-K \sin n0 + (K + K_1)\sin nx_D + (K_2 - K_1)\sin nx_E + \qquad (79)$$

$$+ (K_3 - K_2)\sin nx_F - K_3 \sin nx_G].$$

Tenant compte maintenant des valeurs de :

$$K \cos n0 = K \quad K_3 \cos nx_G = K_3 \cos 2n\pi = K_3$$

et

$$K \sin n0 = 0 \quad K_3 \sin nx_G = K_3 \sin 2n\pi = 0$$

on obtient les valeurs définitives de πA_n et de πB_n :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}[\alpha_2 \sin nx_U + \beta_2 \sin nx_A + \gamma_2 \sin nx_C] -$$

$$- \frac{1}{n^2}[K - (K + K_1)\cos nx_D - (K_2 - K_1)\cos nx_E - \qquad (80)$$

$$- (K_3 - K_2)\cos nx_F + K_3]$$

$$\pi B_n = \frac{1}{n}[\alpha_2 \cos nx_A + \beta_2 \cos nx_B + \gamma_2 \cos nx_C] -$$

$$- \frac{1}{n^2}[-(K + K_1)\sin nx_D + (K_2 - K_1)\sin nx_E - \qquad (81)$$

$$- (K_3 - K_2)\sin nx_F$$

qui sont les mêmes que celles trouvées par la méthode des discontinuités (relations 69 et 72).

6.3. — *Le calcul d'après la méthode classique des intervalles.*

La fonction polygonale donnée comportant sept intervalles : *OA*, *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* et *FG*, nous aurons :

$$\pi A_n = \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_0^{x_A} f_1(x)\cos nx\,dx + \int_{x_A}^{x_B} f_2(x)\cos nx\,dx + \ldots +$$

$$+ \int_{x_F}^{x_G = 2\pi} f_7(x)\cos nx\,dx$$

$$\pi B_n = \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \int_0^{x_A} f_1(x)\sin nx\,dx + \int_{x_A}^{x_B} f_2(x)\sin nx\,dx + \ldots +$$

$$+ \int_{x_F}^{x_G = 2\pi} f_7(x)\sin nx\,dx.$$

Nous allons calculer seulement les deux premières intégrales de πA_n pour montrer la difficulté impliquée par cette méthode.

Première intégrale de l'intervalle OA.

L'équation de la droite OA' est :

$$f_1(x) = y = Kx \qquad \text{où} \qquad K = \frac{\alpha_1}{x_A}$$

Nous aurons donc :

$$\int_0^{x_A} f_1(x) \cos nx \, dx = \int_0^{x_A} Kx \cos nx \, dx$$

Pour intégrer par parties on pose :

$$u = x \qquad v = \frac{\sin nx}{n}$$

et donc :

$$K \int_0^{x_A} x \cos nx \, dx = K \left[\frac{x \sin nx}{n} \right]_0^{x_A} - K \int_0^{x_A} \frac{\sin nx}{n} \, dx =$$

$$= K [x \sin nx]_0^{x_A} - \frac{K}{n} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{x_A}$$

Il résulte pour l'intervalle OA :

$$\int_0^{x_A} f_1(x) \cos nx \, dx = \frac{\alpha_1 \sin nx_A}{n} + \frac{K \cos nx_A}{n^2} - \frac{K}{n^2}. \tag{83}$$

Deuxième intégrale de l'intervalle AB.

L'équation de la droite $A''B'$ de cet intervalle est :

$$f_2(x) = y = \alpha_1 + \alpha_2 + K(x - x_A)$$

et comme on a

$$\alpha_1 = Kx_A$$

$$f_2(x) = y = \alpha_2 + Kx.$$

On aura donc :

$$\int_{x_A}^{x_B} f_2(x) \cos nx \, dx = \int_{x_A}^{x_B} (\alpha_2 + Kx) \cos nx \, dx = \underbrace{\int_{x_A}^{x_B} \alpha_2 \cos nx \, dx}_{M} + \underbrace{\int_{x_A}^{x_B} Kx \cos nx \, dx}_{N}.$$

Pour l'intégrale M on a immédiatement :

$$M = \alpha_2 \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{\alpha_2 \sin nx_A}{n} - \frac{\alpha_2 \sin nx_A}{n}.$$

Pour l'intégrale N on utilise le résultat obtenu antérieurement :

$$N = \int_{x_A}^{x_B} Kx \cos nx\,dx = K\left[\frac{x \sin nx}{n}\right]_{x_A}^{x_B} - \frac{K}{n}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{x_A}^{x_B}$$

$$N = \frac{Kx_B \sin nx_B}{n} - \frac{Kx_A \sin nx_A}{n} - \frac{K \cos nx_B}{n^2} + \frac{K \cos nx_A}{n^2}.$$

En faisant la somme $M + N$ on trouve pour l'intégrale de l'intervalle AB la valeur :

$$\int_{x_A}^{x_B} f_2(x)\cos nx\,dx = \frac{\alpha_1 \sin nx_A}{n} + \frac{K \cos nx_A}{n^2} - \frac{K}{n^2} + \frac{Kx_B \sin nx_B}{n} -$$

$$- \frac{Kx_A \sin nx_A}{n} - \frac{K \cos nx_B}{n^2} + \frac{K \cos nx_A}{n^2} \qquad (84)$$

On peut vérifier que les résultats (83) et (84) sont les mêmes que ceux obtenus pour les mêmes intervalles OA resp. AB par la nouvelle méthode des intervalles.

Le calcul nécessité par ces deux des sept intégrations partielles que comporte le calcul total de A_n, auxquelles il faut ajouter encore sept intégrales pour le coefficient B_n, est suffisant pour montrer quelle considérable simplification représente le calcul par la méthode des discontinuités et même celui par la nouvelle méthode des intervalles, présentée par l'auteur.

En ce qui concerne cette dernière, nous pensons que son emploi le plus indiqué est celui de servir comme méthode de vérification des calculs effectués par la méthode des discontinuités, étant de beaucoup supérieure à la méthode classique des intervalles.

7. L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DES DISCONTINUITÉS À D'AUTRES FONCTIONS QUE LES FONCTIONS PARABOLIQUES

Nous avons appliqué la méthode des discontinuités à une fonction polygonale qui est un cas particulier des fonctions paraboliques pour lesquelles le nombre de dérivées et donc le nombre des termes dans les formules Abason-Eagle (4) et (5) est fini.

Noua allons appliquer maintenant la méthode des discontinuités aux fonctions exponentielles qui donnent lieu à des séries d'un nombre infini de termes.

7.1. — *Application de la méthode des discontinuités aux fonctions exponentielles.*

Considérons, comme nous l'avons fait pour les fonctions paraboliques, une fonction $f(x)$ composée de plusiers fonctions partielles $f_1(x)$, $f_2(x)$ etc. de forme exponentielle, d'équation :

$$f_p(x) = K_p\, e^{ax}. \tag{85}$$

Nous ne nous intéresserons que du coefficient A_n.

De même que pour les fonctions paraboliques nous appliquerons la méthode des discontinuités, non pas directement sur la forme des formules Abason-Eagle, mais en utilisant notre méthode plus générale, ce qui est absolument la même chose, ainsi que nous l'avons déjà dit à la page 11.

Nous calculerons tout d'abord l'intégrale indéfinie :

$$F_p(x) = \int f_p(x) \cos nx\,dx = \int K_p\, e^{ax} \cos nx\,dx$$

pour la relation de base (47) de la méthode des discontinuités :

$$F_p(x) = \int f_p(x) \cos nx\,dx = \frac{1}{n} f_p(x) \sin nx + \frac{1}{n^2} f'_p(x) \cos nx - \frac{1}{n^3} f''_p(x) \sin nx -$$

$$- \frac{1}{n^4} f'''_p(x) \cos nx + + \ldots \tag{47b}$$

On constate immédiatement que les dérivées successives de la fonction élémentaire $f_p(x) = K_p\, e^{ax}$ se répètent et peuvent s'exprimer en fonction de la fonction même $f_p(x)$ et de sa dérivée $f'_p(x)$. En effet, on trouve :

$$f_p(x) = K_p\, e^{ax} \quad f'_p(x) = a\, K_p\, e^{ax} \quad f''_p(x) = a^2 f_p(x) \quad f'''_p(x) = a^2 f'_p(x) \quad f^{IV}_p(x) =$$

$$a^3 f_p(x) \quad f^{V}_p(x) = a^4 f'_p(x) \quad f^{VI}_p(x) = a^5 f_p(x) \quad f^{VII}_p(x) = a^6 f'_p(x), \text{ etc.} \tag{86}$$

Tenant compte de ces valeurs on trouve facilement :

$$F_p(x) = \int K_p\, e^{ax} \cos nx\,dx = \frac{n^2 - a^2}{n^4} \left[n f_p(x) \sin nx + \right.$$

$$\left. + f'_p(x) \cos nx \right] \left[1 + \frac{a^4}{n^4} + \frac{a^8}{n^8} + \ldots \right] \tag{87}$$

la dernière parenthèse contenant un nombre infini de termes.

En appliquant maintenant notre formule généralisée de la méthode des discontinuités :

$$\pi A_n = \Sigma \left[F_p(x_p) - F_{p-1}(x_p) \right]$$

on obtient :

$$\pi A_n = \frac{a^2 - n^2}{n^4} \left[1 + \frac{a^4}{n^4} + \frac{a^8}{n^8} + \ldots \right] \sum \left[sn \sin nx_p + s' \cos nx_p \right] \tag{88}$$

relation, dans laquelle nous avons noté par s resp. s' les sauts d'ordonnée resp. de tangente définis par les relations :

$$s = K_{p+1}\, e^{ax} - K_p\, e^{ax} = f_{p+1}(x_p) - f_p(x_p)$$

et

$$s' = a\, K_{p+1}\, e^{ax} - a\, K_p\, e^{ax} = f'_{p+1}(x_p) - f'_p(x_p).$$

On constate donc que la valeur du coefficient A_n est donnée par une série infinie de termes :

$$S = 1 + \frac{a^4}{n^4} + \frac{a^8}{n^8} + \frac{a^{12}}{n^{12}} + \dots \tag{90}$$

La série n'est convergente que si l'on a $\frac{a}{n} < 1$ c.-à-d. $n > a$, et dans ce cas, en sommant la série, on obtient :

$$S = \frac{1}{1 - \frac{a^4}{n^4}} = \frac{n^4}{n^4 - a^4}. \tag{91}$$

Tenant compte de cette valeur, il vient finalement :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n^2 + a^2} \sum [s\, n \sin nx_p + s' \cos nx_p] \tag{92}$$

relation qui paraît être valable seulement pour les harmoniques d'un ordre $n > a$.

Mais, au lieu d'appliquer au calcul de l'intégrale indéfinie $F(x) = \int f_p(x) \cos nx\, dx$ la formule (47) ainsi que nous l'avons fait ci-dessus, nous pouvons la calculer directement.

En intégrant par parties, deux fois de suite, on obtient le résultat :

$$\int K_p\, e^{ax} \cos nx = \frac{K_p\, e^{ax} \sin nx}{n} + \frac{a\, K_p\, e^{ax} \cos nx}{n^2} - \frac{a^2}{n^2} \int K_p\, e^{ax} \cos nx\, dx. \tag{93}$$

On tire de cette relation :

$$\int K_p\, e^{ax} \cos nx = \frac{1}{n^2 + a^2} [f_p(x)\, n \sin nx + f'_p(x) \cos nx] \tag{94}$$

et appliquant maintenant la formule des discontinuités

$$\pi A_n = \Sigma [F_p(x) - F_{p+1}(x_p)]$$

on trouve facilement :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n^2 + a^2} \sum [s\, n \sin nx_p + s' \cos nx_p] \tag{95}$$

c.-à-d. nous avons obtenu pour πA_n la même valeur que plus haut (relation 92) avec cette différence essentielle, que n'ayant formulé ici aucune

restriction en ce qui concerne la valeur de $\frac{a}{n}$, il résulte catégoriquement que cette relation est valable pour n'importe quelle valeur de n, ce qui est en contradiction avec le résultat trouvé ci-dessus par l'application de la formule (47), c.-à-d. par l'application des formules Abason-Eagle.

Ce paradoxe sera expliqué au paragraphe suivant, concernant l'application de la méthode des discontinuités aux fonctions sinusoïdales. En ce qui regarde les fonctions exponentielles, vu qu'elles intéressent beaucoup moins que les fonctions polygonales et paraboliques, nous n'insisterons pas autrement.

8. L'APPLICATION DE LA MÈTHODE DES DISCONTINUITÉS ABASON-EAGLE AUX FONCTIONS FORMÉES PAR DES ARCS DE SINUSOÏDE

8.1. — *Le problème de la nécesité de la convergence des séries infinies obtenues, soutenue par MM. A. Eagle, L. W. B. Jolley et R. Feinberg, et de l'inutilité de la convergence des mêmes séries, soutenue par MM. G. Köhler, A. Walther et T. Zech.*

Mr. A. Eagle a afirmé, le premier, que les formules de la méthode des discontinuités Abason-Eagle

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}\sum s \sin nx - \frac{1}{n^2}\sum s' \cos nx + \frac{1}{n^2}\sum s'' \sin nx + \ldots \text{etc.}$$

$$\pi B_n = \frac{1}{n}\sum s \cos nx - \frac{1}{n^2}\sum s' \sin nx - \frac{1}{n^3}\sum s'' \cos nx + + \ldots \text{etc.}$$

dont le nombre des termes est fini, quand on les applique aux fonctions paraboliques, peuvent être employées également aux fonctions pour lesquelles le nombre de termes devient infini, *à la condition que cette série soit convergente.* (C'est, en définitif, la condition que nous avons dû imposer nous-mêmes à la page 28. lorsque nous avons appliqué la méthode des discontinuités aux fonctions exponentielles).

Comme exemple, Mr. Eagle analyse la fonction périodique

$$y = h \sin \frac{x}{2}$$

pour laquelle x varie de $x = 0$ à $x = 2\pi$

L'application des formules Abason-Eagle à cette fonction donne lieu à la série convergente :

$$S = 1 + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{16n^2} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4n^2}} = \frac{4n^2}{4n^2 - 1} \qquad (96)$$

la valeur du coefficient πA_n étant :

$$\pi A_n = -\frac{h}{n^2} S = -\frac{4h}{4n^2 - 1}.$$

Après Mr. Eagle, Mr. L. W. B. Jolley (6) analyse quelques fonctions sinusoïdales, parmi lesquelles la fonction simple

$$y = \sin x$$

qui donne lieu à la série

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + \dots \tag{97}$$

qui est également convergente.

Enfin, MM. A. Walther et G. Köhler ont appliquée les formules Abason-Eagle — dans un article paru dans la revue „Archiv für Elektrotechnik (7) — parmi d'autres fonctions, à quelques fonctions sinusoïdales aussi.

Une première fonction a été une portion de sinusoïde $y = \sin x$ qui a fourni la série mentionnée ci-dessus (97).

Ensuite, MM. Walther et Köhler analysent la fonction :

$$y = \cos^2 \frac{\pi}{2\alpha} x \qquad \text{(voir p. 65)}$$

qui fournit la série :

$$S = 1 + \frac{\pi^2}{\alpha^2 n^2} + \frac{\pi^4}{\alpha^4 n^4} + \frac{\pi^6}{\alpha^6 n^6} + \dots \tag{98}$$

Il est à remarquer que sans faire aucune hypothèse sur la valeur de la raison :

$$\left(\frac{\pi}{\alpha n}\right)^2$$

de cette progression géométrique, Mr. Walther affirme que la valeur de la somme S de cette série est

$$S = \frac{1}{1 - \left(\frac{\pi}{\alpha n}\right)^2} = \frac{\alpha^2 n^2}{\alpha^2 n^2 - \pi^2}. \tag{99}$$

Or, cette affirmation n'est valable que dans la cas où la série S est une progresion géométrique décroissante, c.-à-d. lorsque :

$$\left(\frac{\pi}{\alpha n}\right)^2 < 1 \qquad \text{où} \qquad \frac{\pi}{\alpha n} < 1.$$

Pour le cas où $\frac{\pi}{\alpha n} > 1$, la série S étant divergente et la somme S devenant infinie, il semble que l'analyse harmonique de la fonction en question ne peut pas se faire par l'application des formules Abason-Eagle.

A une telle conclusion est arrivé également Mr. R. Feinberg (9), qui a publié un article à ce sujet dans la même revue „Archiv für Elektrotechnik' en 1933 (9).

En faisant l'analyse d'une fonction formée par des arcs de sinusoïde, d'équation générale

$$y = A \sin\lambda (\omega t - \alpha)$$

et obtenant pour le coefficient πA_n une valeur dans l'expression de laquelle entre la série

$$S_1 = 1 + \frac{\lambda^2}{n^2} + \frac{\lambda^4}{n^4} + \frac{\lambda^6}{n^8} + \ldots \qquad (100)$$

Mr. Feinberg tire la conclusion que l'on peut calculer seulement les harmoniques pour lesquells la série S_1 est convergente, c.-à-d. pour lesquells est satisfaite la condition :

$$\frac{\lambda}{n} < 1 \qquad \text{c. à. d.} \qquad n > \lambda.$$

Répondant à l'observation de Mr. Feinberg, Mr. le Prof. Walther affirme dans le même numéro de la revue ci-dessus mentionnée, que les *séries infinies* auxquelles donne lieu l'application de la méthode Abason-Eagle à l'analyse des fonctions sinusoïdales et qui se présentent sous les formes indiquées aux pos. (98) et (100), peuvent être considérées comme des simples séries géometriques décroissantes, *sans tenir compte de la condition de leur convergence.*

Mr. Walther justifie cette manière de procéder par des considérations tirées de la théorie des fonctions. Les coefficients Fourier A_n et B_n considéres comme dépendant du paramètre n pris non seulement comme un nombre entier, mais comme une variable complexe, sont des fonctions régulières analytiques de n. Par conséquent, d'après le principe du prolongement analytique, il résulte que si certaines expressions analytiques de A_n et B_n sont valables pour une série de valeurs de n, elles seront valables en général pour toutes le valeurs de $n = 0, 1, 2$ etc. de sorte que le practicien ne commettra pas une erreur s'il ne montre pas de scrupules concernant la condition de convergence des séries mentionnées ci-dessus.

Ce principe est exposé plus en détail en 1942 par Mr. Theodor Zech, de l'Institut de Matémathiques de Darmstadt. Les explications données

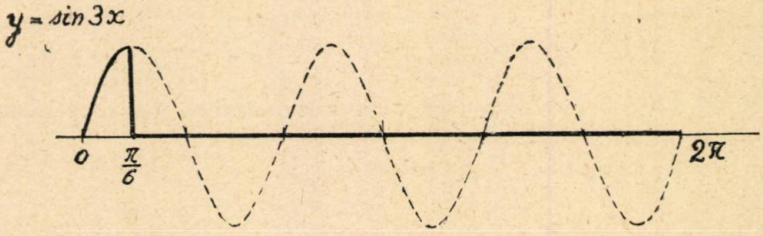


Fig. 4

par Mr. Walther„ aussi fondées qu'elles soient, sont à peu près impossibles à accepter, justement par un praticien qui se propose de faire l'analyse harmonique d'une certaine fonction.

En effet, si l'on applique les formules Abason-Eagle au calcul de l'harmonique fondamentale A_1 de la fonction représentée sur la fig. 4,

formée d'un arc de sinusoïde d'équation $y = \sin 3x$ compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{6}$, on trouve le résultat suivant :

$$\pi A_1 = -\frac{5}{2}(3 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \ldots) \qquad (101)$$

Il serait donc d'une absurdité sans pareille d'admettre que l'on puisse faire abstraction du fait que la série entre parenthèses est divergente et qu'elle a une valur infinie et de considérer que sa valeur peut être calculée comme pour une série géométrique décroissante, étant par conséquent égale à :

$$\frac{1}{1-3^2} = -\frac{1}{8}$$

ce qui donnerait pour l'harmonique A_1 de la relation (101) la valeur

$$A_1 = \frac{5}{16\pi}.$$

D'ailleurs ni Mr. Feinberg, ni surtout Mr. Eagle qui est, lui aussi, professeur de matémathiques et en plus l'auteur de la méthode des discontinuités, n'ont pu penser que l'on pouvait faire abstraction de la condition de convergence des séries qu'ils ont obtenues. Eh bien, malgré tout cela, ce qui constitue un paradoxe tout à fait incompréhensible, c'est que Mr. Walther a pourtant raison et que pour la série de la page 30 relation (98)

$$S = 1 + \frac{\pi^2}{\alpha^2 n^2} + \frac{\pi^4}{\alpha^4 n^4} + \frac{\pi^6}{\alpha^6 n^6} \ldots$$

il est parfaitement exact que l'on peut écrire, sans se préoccuper de sa convergence, que sa valeur est :

$$S = \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{\alpha^2 n^2}}$$

que dans le cas de la série obtenue par Mr. Feinberg

$$S_1 = 1 + \frac{\lambda^2}{n^2} + \frac{\lambda^4}{n^4} + \frac{\lambda^6}{n^6} + \ldots$$

la valeur de celle-ci se calcule de la même manière par la relation :

$$S_1 = \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{n^2}}$$

et qu'enfin, même pour la série que nous avons trouvée ci-dessus (101)

$$S = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \ldots$$

on peut écrire l'absurdité que sa valeur est :

$$S = \frac{1}{1-3^2} = -\frac{1}{8}$$

et que donc la valeur

$$A_1 = \frac{5}{16\pi}$$

que nous avons trouvée ci-dessus est la valeur exacte du coefficient A_1 !

Il est tout naturel de se demander quelle est l'explication de ces résultats paradoxaux, extrêmement bizarres, et qui n'a pas été donnée jusqu'à présent?

8.2. — *L'explication de l'auteur sur le problème de la convergence des séries : l'inexistance des séries infinies.*

L'explication de ce problème, sur lequel les deux groupes de mathématiciens ont des opinions opposées, consiste en ce que *contrairement aux opinions de tous ceux-ci, c.-à-d. de MM. A. Walther, G. Köhler, T. Zech, A. Eagle, R. Feinberg etc. il n'est pas du tout question ici de séries d'un nombre infini de termes.*

L'erreur commise par tous ceux qui se sont occupés de ce problème consiste en ce qu'ils ont négligé la vraie nature de la méthode des discontinuités, que nous avons expliquée au courant de cette étude, ce qui les a conduit à appliquer les formules Abason-Eagle même aux fonctions sinusoïdales, sans trop s'intéresser de la logique et de l'utilité de cette manière de procéder.

En effet, nous avons montré aux pages 12 et 13 que l'essence même des formules Abason-Eagle n'est autre que l'application au calcul des coefficients A_n et B_n, des intégrales indéfinies [rel. (47) et (53)]:

$$F(x) = \int f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{n} f(x)\sin nx + \frac{1}{n^2} f'(x)\cos nx - \frac{1}{n^3} f''(x)\sin nx - -$$

$$- \frac{1}{n^4} f'''(x)\cos nx + + \ldots \qquad (47)\text{ ter}$$

$$S(x) = \int f(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n} f(x)\cos nx + \frac{1}{n^2} f'(x)\sin nx + \frac{1}{n^3} f''(x)\cos nx -$$

$$- \frac{1}{n^4} f'''(x)\sin nx = + + \ldots \qquad (53)\text{ ter}$$

Si l'application directe des formules Abason-Eagle donne lieu à certaines séries, celles-ci ne peuvent être autres que celles que l'on obtient par l'application des expressions ci-dessus des intégrales indéfinies, aux fonctions sinusoïdales.

Proposons-nous donc de calculer à l'aide de la formule (47) pour le coefficient A_n l'intégrale indéfinie

$$F(x) = \int \sin(\lambda x - \varphi)\cos nx\,dx \qquad (102)$$

pour le cas général où la fonction $f(x)$ est une sinusoïde d'équation :

$$f(x) = A\sin(\lambda x - \varphi). \qquad (103)$$

Nous aurons :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= A\lambda\cos(\lambda x-\varphi)\\
f''(x) &= -A\lambda^2\sin(\lambda x-\varphi) = -\lambda^2 f(x)\\
f'''(x) &= -A\lambda^3\cos(\lambda x-\varphi) = -\lambda^2 f'(x)\\
f^{IV}(x) &= A\lambda^4\sin(\lambda x-\varphi) = \lambda^4 f(x)\\
f^{V}(x) &= A\lambda^5\cos(\lambda x-\varphi) = \lambda^4 f'(x)\\
f^{VI}(x) &= -A\lambda^6\sin(\lambda x-\varphi) = -\lambda^6 f(x)\\
f^{VII}(x) &= -A\lambda^7\cos(\lambda x-\varphi) = -\lambda^6 f'(x).
\end{aligned} \tag{104}$$

On constate donc que toutes les dérivées peuvent être exprimées en fonction de $f(x)$ et de $f'(x)$ seulement, comme d'ailleurs il a été également le cas pour les fonctions exponentielles étudiées à la page 27.

En introduisant ces valeurs dans la relation (47) on trouve :

$$F(x)=\int A\sin(\lambda x-\varphi)\cos nx\,dx = \frac{1}{n^2}\left[n f(x)\sin nx + f'(x)\cos nx\right]\left[1+\frac{\lambda^2}{n^2}+\frac{\lambda^4}{n^4}+\frac{\lambda^6}{n^6}+\ldots\right] \tag{105}$$

ou

$$F(x)=\frac{1}{n^2}\left[n\sin nx\sin(\lambda x-\varphi)+\lambda\cos nx\cos(\lambda x-\varphi)\right]\left[1+\frac{\lambda^2}{n^2}+\frac{\lambda^4}{n^4}+\frac{\lambda^6}{n^6}+\ldots\right]. \tag{106}$$

On constate que nous avons obtenue la série

$$S=1+\frac{\lambda^2}{n^2}+\frac{\lambda^4}{n^4}+\frac{\lambda^6}{n^6}+\ldots \tag{107}$$

qu'a obtenue Mr. Feinberg en appliquant directement les formules Abason-Eagle par la considération des sauts, pour le cas général, et MM. Eagle, Jolley et Walther pour des cas particuliers.

Cette série paraît avoir un nombre infini de termes, ce qui a mis en discussion la nécessité de sa convergence.

Nous allons montrer que la réalité est toute autre. Effectuons pas à pas l'intégration par parties pour le calcul de l'intégrale indéfinie :

$$F(x)=\int A\sin(\lambda x-\varphi)\cos nx\,dx. \tag{108}$$

En mettant : $u = A\sin(\lambda x-\varphi)$ et $dv = d\left[-\frac{1}{n}\sin nx\right]$, une premiére intégration par parties nous donne :

$$F(x)=\frac{1}{n}A\sin(\lambda x-\varphi)\sin nx-\frac{\lambda}{n}\int A\sin(\lambda x-\varphi)\sin nx\,dx \tag{109}$$

Continuons plus loin l'intégration par parties de l'intégrale du second membre en posant de nouveau

$$u = A \sin(\lambda x - \varphi) \text{ et } dv = d\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right].$$

Nous obtenons :

$$F(x) = \frac{1}{n} A \sin(\lambda x - \varphi) \sin nx + \frac{1}{n^2} A \cos(\lambda x - \varphi) \cos nx + \\ + \frac{\lambda^2}{n^2} \int A \sin(\lambda x - \varphi) \cos nx dx. \tag{110}$$

Or, on observe que l'intégrale du second membre est égale à $F(x)$ même, de sorte que le problème de la détermination de $F(x)$ est terminée, puisque de cette relation on déduit immédiatement :

$$F(x) = \frac{1}{n^2 - \lambda^2}\left[n A \sin(\lambda x - \varphi) \sin nx + \lambda A \cos(\lambda x - \varphi) \cos nx\right] \tag{111}$$

Au lieu de s'arrêter ici — ce qui serait tout à fait logique — la méthode des discontinuités sous la forme des formules Abason-Eagle va plus loin et continue l'inégration par parties et obtient, en prenant la relation (110) comme formule de récurrence :

$$F(x) = \frac{1}{n} A \sin(\lambda x - \varphi) \sin nx + \frac{\lambda}{n^2} A \cos(\lambda x - \varphi) \cos nx + \\ + \frac{\lambda^2}{n^2}\left[\frac{1}{n} A \sin(\lambda x - \varphi) \sin nx + \frac{\lambda}{n^2} A \cos(\lambda x - \varphi) \cos nx\right] \\ + \frac{\lambda^2}{n^2} \int A \sin(\lambda x - \varphi) \cos nx dx. \tag{112}$$

Pour simplifier les formules, nous adoptons les notations :

$$\frac{1}{n} A \sin(\lambda x - \varphi) \sin nx + \frac{\lambda}{n^2} \cos nx \cos(\lambda x - \varphi) = P \tag{113}$$

et

$$\frac{\lambda^2}{n^2} = R. \tag{114}$$

La relation (112) qui représente le résultat de quatre intégrations par parties devient :

$$F(x) = P + R[P + RF(x)] = P(1 + R) + R^2 F(x). \tag{115}$$

Si nous intégrons par parties encore deux fois, il viendra :

$$F(x) = P(1 + R + R^2) + R^3 f(x) \tag{116}$$

et finalement en répétant l'integration par parties $2p$ fois, nous obtiendrons:

$$F(x) = P(1 + R + R^2 + R^3 + \ldots + R^{p-1}) + R^p F(x). \tag{117}$$

N'importe quelle serait la valeur de p, c.-à-d. le nombre d'intégrations par parties auquel on s'arrête, cette relation nous fournit le résultat :

$$F(x)\,(1 - R^p) = P\,(1 + R + R^2 + \ldots + R^{p-1}) \tag{118}$$

c'est-à-dire :

$$F(x) = \frac{P\,(1 + R + R^2 + \ldots + R^{p-1})}{1 - R^p} \tag{119}$$

et comme $1 - R^p = (1 - R)\,(1 + R + R^2 + \ldots + R^{p-1})$
on obtient le résultat définitif :

$$F(x) = \frac{P}{1 - R} \tag{120}$$

c'est-à-dire :

$$F(x) = \frac{n\,A \sin(\lambda x - \varphi) \sin nx + A \cos(\lambda x - \varphi) \cos nx}{n^2 - \lambda^2} \tag{121}$$

qui est la même valeur que celle trouvée ci-dessus (relation 111), après l'effectuation de seulement deux intégrations par parties.

On constate donc que même si nous procédons d'une façon absurde et si nous continuons l'intégration par parties dans la relation (112) il n'est pas du tout besoin de considérer un nombre infini d'intégrations, vu qu'à n'importe quelle valeur de p l'on s'arrête, on obtient toujours la valeur :

$$F(x) = \frac{P}{1 - R}$$

c.-à-d. la valeur exacte de l'intégrale indéfinie $F(x)$, sans faire aucune hypothèse sur la valeur de

$$R = \frac{\lambda^2}{n^2}.$$

L'erreur commise par MM. Walther, Eagle, Feinberg est qu'en négligeant l'existence du terme $R^p F(x)$ — qui évidemment n'apparaît pas lorsqu'on applique les formules de la méthode Abason-Eagle, ou les formules équivalentes (47) et .53) que nous avons employées — ont pensé qu'ils ont à faire à une série infinie

$$F(x) = P\,(1 + R + R^2 + R^3 + \ldots + \infty) \tag{122}$$

ou

$$F(x) = \frac{1}{n}\Big[A \sin(\lambda x - \varphi) \sin nx + \\ + A\,\lambda \cos(\lambda x - \varphi) \cos nx \Big] \Big[1 + \frac{\lambda^2}{n^2} + \frac{\lambda^4}{n^4} + \frac{\lambda^6}{n^6} + \ldots \Big]. \tag{123}$$

C'est pourquoi, MM. Eagle, Feinberg, Jolley, Zech etc. ont dû faire l'hypothèse que $R < 1$ c.-à-d. $\frac{\lambda}{n} < 1$, donc $n > \lambda$, afin que la série soit convergente et puisse être sommée, obtenant la valeur

$$F(x) = \frac{P}{1-R}$$

tandis que M. Walther a affirmé que pour cette série infinie la relation $F(x) = \frac{P}{1-R}$ reste valable autant pour $R < 1$ que pour $R > 1$, ce qui était exact mais impossible à comprendre et à admettre.

On constate à présent que cette discussion en contradictoire est complétement inutile car il ne s'agit pas ici d'une série infinie de termes mais d'une simple somme d'un nombre quelconque de termes dont la valeur est toujours :

$$F(x) = \frac{P}{1-R}$$

indépendamment de la valeur de R.

Le fait d'avoir négligé le terme $R^p F(x) = \left(\frac{\lambda^2}{n^2}\right)^p F(x)$ s'explique aisément de la part de E. Abason et A. Eagle les auteurs de la méthode des discontinuités, car leurs formules étant destinées initialement aux fonctions paraboliques, dont le nombre de dérivées, et donc de termes dans ces formules, est limité, il était tout naturel qu'ils n'aient pas pensé à l'existence du terme en question qui n'apparait pas dans leurs formules.

C'est d'ailleurs pour cette raison que dans les formules (47) et (53) des intégrales indéfinies : $F(x) = \int f(x) \cos nx\, dx$ et $S(x) = \int f(x) \sin nx\, dx$, qui sont à la base des formules Abason-Eagle nous avons nous-mèmes à dessein, laissé de côté ce terme, car autrement nous aurions dû écrire rigoureusement :

$$F(x) = \int f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{n} f(x) \sin nx + \frac{1}{n^2} f'(x) \cos nx - \frac{1}{n^3} f''(x) \sin nx -$$

$$- \frac{1}{n^4} f'''(x) \cos nx + + - \ldots \pm \frac{1}{n^{2p}} \int f^{2p}(x) \cos nx\, dx \qquad (124)$$

$$S(x) = \int f(x) \sin nx\, dx = - \frac{1}{n} f(x) \cos nx + \frac{1}{n^2} f'(x) \sin nx + \frac{1}{n^3} f''(x) \cos nx -$$

$$- \frac{1}{n^4} f'''(x) \sin nx - + + \ldots \pm \frac{1}{n^{2p}} \int f^{p}(x) \sin nx\, dx. \qquad (125)$$

Si nous avions limité le nombre des intégrations par parties à $2p$, le terme, par exemple, de $F(x)$, $\frac{1}{n^{2p}} \int f^{2p}(x) \cos nx\, dx$ serait devenu — pour les fonctions

sinusoïdales $f(x) = A\ \sin(\lambda x - \varphi)$ — égal à $\frac{\lambda^{2p}}{n^{2p}}\int f(x)\ \cos nx\,dx$, c.-à.-d. à $R^p F(x)$.

Cela explique pourquoi, lorsque Mr. Eagle a voulu également appliquer la méthode des discontinuités aux fonctions sinusoidales, il a dû forcément faire l'hypothèse de la nécessité de la convergence des séries mentionnées.

Pour ce qui regarde MM. Walther et T. Zech, il est à remarquer qu'ils ont présenté les formules Abason-Eagle suivies du terme

$$\frac{1}{n^{K+1}}\int_0^{2\pi} f^{(K+1)}(x)\begin{matrix}\cos nx\\ \sin nx\end{matrix}dx \qquad (126)$$

qui correspond à un nombre de dérivations de $K + 1$ et qu'ils considéraient toujours tendant vers zéro lorsque K tendait vers l'infini.

S'ils avaient explicité ce terme pour les fonctions sinusoïdales : $f(x) = A\ \sin(\lambda x - \varphi)$, ils auraient constaté que sa valeur devenait :

$$\frac{\lambda^{K+1}}{n^{K+1}}\int_0^{2\pi} f(x)\begin{matrix}\cos nx\\ \sin nx\end{matrix}dx = \frac{\lambda^{K+1}}{n^{K+1}}\,[\pi A_n, \pi B_n] \qquad (127)$$

et que par conséquent ce terme ne tendait plus vers zéro — lorsque K tendait vers l'infini — si $\lambda > n$, mais vers une valeur infinie, ce qui change tout à fait le problème, ainsi que nous l'avons montré.

OBSERVATION. — De la même manière que ci-dessus, s'explique aussi le résultat que nous avons trouvé pour l'application des formules Abason-Eagle aux fonctions exponentielles, pour lesquelles nous avons trouvé (relation 88) :

$$\pi A_n = \Sigma\,(s\ \sin nx + s'\cos nx)\,\frac{a^2 - n^2}{n^4}\left(1 + \frac{a_p^4}{n^4} + \frac{a_p^8}{n^8} + \dots\right)$$

la seconde parenthèse contenant, apparemment, un nombre infini de termes.

En réalité, ainsi que pour les fonctions sinusoïdales, on trouve qu'il s'agit ici également d'une simple somme de termes en nombre limité, dont la valeur est toujours

$$\frac{1}{1 - \frac{a^4}{n^4}}$$

indépendamment du nombre de termes et de la valeur de $\frac{a}{n}$, de sorte qu'on obtient pour πA_n la valeur :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n^2 + a^2}\sum\,[sn\ \sin nx + s'\cos nx]$$

que nous avons déja trouvée à la page 28 rel. (92).

9. L'APPLICATION RATIONELLE DE LA MÉTHODE DES DISCONTINUITÉS ET DE LA MÉTHODE DES INTERVALLES À L'ANALYSE HARMONIQUE DES FONCTIONS SINUSOÏDALES

Il est à remarquer que l'application des formules Abason-Eagle, sans discernement, également à l'analyse des fonctions sinusoidales, ainsi que l'ont fait MM. Eagle, Jolley, Walther, n'est pas logique, non seulement parce que c'est absurde de continuer l'intégration dans la relation (110) qui résout le problème, mais sourtout parce que de cette manière, chaque fois que l'on doit faire l'analyse d'une fonction sinusoidale on est obligé de répéter inutilement les mêmes calculs des sauts successifs pour arriver en fin de compte à une série de la forme (96), (97), (98), (100) etc. qui donnera toujours lieu à des considérations concernant sa convergence — ce qui n'a plus de sens après ce que nous venons de dire, — ou qui conduira à un résultat absurde, comme celui que nous avons trouvé à la page 32 (relation 101) et qui nous a fourni pour l'harmonique B_1 une valeur infinie.

Par conséquent, il est tout à fait logique et rationnel d'appliquer la méthode des discontinuités selon notre formule

$$\pi A_n, \pi B_n = \Sigma [F_p(x_p) - F_{p+1}(x_p)]$$

mais en effectuant le calcul des intégrales indéfinies $F_p(x)$ directement, sans faire appel aux formules Abason-Eagle, basées sur les relations (47) et (53), page 12-13 ainsi que nous l'avons fait pour les fonctions exponentielles.

Considérons donc une fonction $f(x)$ formée par une série d'arcs de sinuusoïde d'équations :

entre 0 et x_1 $\quad y_1 = A_1 \sin(\lambda_1 x - \varphi_1)$

x_1 et x_2 $\quad y_2 = A_2 \sin(\lambda_2 x - \varphi_2)$ etc.

. . . . . .

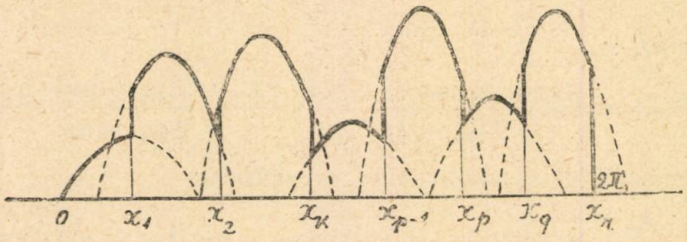


Fig. 5

pour l'intervalle d'ordre p compris entre les abscisses x_{p-1} et x_p, l'équation de la fonction $f_p(x)$ étant :

$$f_p(x) = y_p = A_p \sin(\lambda_p x - \varphi_p) \tag{128}$$

Nous nous proposons de calculer le coeffient A_n. Le calcul de l'intégrale indéfinie $F_p(x)$ de cette fonction

$$F_p(x) = \int A_p \sin(\lambda_p x - \varphi_p) \cos nx \, dx \tag{129}$$

peut se faire de deux façons :

Le *premier mode de calcul* est celui déjà effectué à la page 35 c.-à-d. l'intégration rationnelle par parties, qui a fourni le résultat :

$$F_p(x) = -\frac{A_p}{\lambda_p^2 - n^2}\left[n \sin(\lambda_p x - \varphi_p) \sin nx + \lambda_p \cos(\lambda_p x - \varphi_p) \cos nx\right] \quad (129\text{ bis})$$

Le *deuxième mode de calcul*, qui a presque toujours été utilisé en pratique consiste à écrire :

$$F_p(x) = A_p \int \frac{1}{2} \sin(\lambda_p x + nx - \varphi_p)\, dx + A_p \int \frac{1}{2} \sin(\lambda_p x - nx - \varphi_p)\, dx \quad (130)$$

d'où le résultat :

$$F_p(x) = -\frac{A_p \cos(\lambda_p x + nx - \varphi_p)}{2(\lambda_p + n)} - \frac{A_p \cos(\lambda_p x - nx - \varphi_p)}{2(\lambda_p - n)}. \quad (131)$$

Si $\lambda_p \neq n$ le second terme a une valeur finie.

Nous considérerons tout d'abord ce cas général. En éliminant les dénominateurs, on obtient :

$$F_p(x) = -\frac{A_p}{\lambda_p^2 - n^2}\left[n \sin(\lambda_p x - \varphi_p) \sin nx + \lambda_p \cos(\lambda_p x - \varphi_p) \cos nx\right] \quad (132)$$

c.-à-d. le même résultat que ci-dessus, relation (129). De la même façon on obtient pour le calcul du coefficient B_n les relations :

$$S_p(x) = \int A_p \sin(\lambda_p x - \varphi_p) \sin nx\, dx = \quad (133)$$

$$= A_p \int \frac{1}{2} \sin(\lambda_p x - nx - \varphi_p)\, dx - \int \frac{1}{2} A_p \sin(\lambda_p x + nx - \varphi_p)\, dx \quad (134)$$

d'où le résultat :

$$S_p(x) = \frac{A_p \sin(\lambda_p x - nx - \varphi_p)}{2(\lambda_p - n)} - \frac{A_p \sin(\lambda_p x + nx - \varphi_p)}{2(\lambda_p + n)}. \quad (135)$$

En éliminant les dénominateurs, on obtient :

$$S_p(x) = \frac{A_p}{\lambda_p^2 - n^2}\left[n \sin(\lambda_p x - \varphi_p) \cos nx - \lambda_p \cos(\lambda_p x - \varphi_p) \sin nx\right]. \quad (136)$$

Tenant compte des relations :

$$f_p(x) = A_p \sin[\lambda_p x - \varphi_p]$$

et (137)

$$f_p'(x) = \lambda_p A_p \cos[\lambda_p x - \varphi_p]$$

l'intégrale $F_p(x)$ peut s'écrire :

$$F_p(x) = \frac{1}{n^2 - \lambda_p^2}\left[f_p(x)\, n \sin nx + f_p'(x) \cos nx\right] \quad (138)$$

et de même :

$$S_p(x) = \frac{1}{n^2 - \lambda_p^2} [f_p'(x)\, n \sin nx - f_p(x)\, n \cos nx]. \qquad (139)$$

Considérant le seul cas intéressant en pratique, celui où les arcs de sinusoïde ont la même période, c'est-à-dire λ_p est le même pour tous les intervalles de la function donnée, ayant la valeur commune $\lambda_p = \lambda$, on obtient les expressions suivantes pour la méthode des discontinuités et pour la nouvelle méthode des intervalles que nous allons désigner sous les noms de la *méthode rationelle des discontinuités et la méthode rationelle des intervalles.*

9.1. — *La méthode rationelle des discontinuités.*

Si dans notre formule de la méthode des discontinuités, pour A_n, par exemple :

$$\pi A_n = -\Sigma [F_p(x_p) - F_{p+1}(x_p)] \qquad (140)$$

on remplace $F_{p+1}(x_p)$ et $F_p(x_p)$ avec leurs valeurs de la relation (134) on obtient :

$$\pi A_n = -\sum \left[n \sin n x_p \frac{f_{p+1}(x_p) - f_p(x_p)}{n^2 - \lambda^2} + \cos n x_p \frac{f'_{p+1}(x_p) - f'(x_p)}{n^2 - \lambda^2} \right] \qquad (141)$$

et notant par s_p et s'_p les sauts de la fonction $f_p(x)$, et de sa dérivée $f'_p(x_p)$ c.-à-d. les sauts d'ordonnée et de tangente, définis par les relations :

$$\begin{aligned} s_p &= f_{p+1}(x_p) - f_p(x_p) = A_{p+1} \sin(\lambda x_p - \varphi_{p+1}) - A_p \sin(\lambda x_p - \varphi_p) \\ s'_p &= f'_{p+1}(x_p) - f'_p(x_p) = \lambda A_{p+1} \cos(\lambda x_p - \varphi_{p+1}) - \lambda A_p \cos(\lambda x_p - \varphi_p) \end{aligned} \qquad (142)$$

nous obtenons l'expression finale des coefficients A_n :

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} [s_p\, n \sin n x_p + s'_p \cos n x_p] \qquad (143)$$

ou, laissant de côté l'indice p

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} [s\, n \sin n x + s' \cos n x]. \qquad (144)$$

De la même manière on trouve pour le coefficient B_n

$$\pi B_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} [s' \sin n x - n \cos n x] \qquad (145)$$

expression qui d'ailleurs se déduit de l'expression du coefficient πA_n, en remplaçant sin nx par $-\cos nx$ et cos nx par sin nx, ainsi qu'il a été le cas également pour les formules Abason-Eagle (V. page 16). Cela s'explique facilement, vu que l'expression même de l'intégrale $S_p(x)$ (relation 136) qui sert au calcul de B_n se déduit de l'expression de l'intégrale $F_p(x)$ (relation 132) qui sert au calcul de A_n en y faisant les même substitutions que celles indiquées ci-dessus.

9.2. — *La méthode rationelle des intervalles.*

Si dans la formule de notre nouvelle méthode des intervalles, pour πA_n:

$$\pi A_n = \Sigma [F_p(x_p) - F_p(x_{p-1})] \tag{146}$$

on remplace $F_p(x_p)$ et $F_p(x_{p-1})$ par leurs valeurs données par la relation (136) et si l'on adopte les notations :

$$y = A_p \sin(\lambda x - \varphi_p) \qquad y' = \lambda A_p \cos(\lambda x - \varphi_p) \tag{147}$$

on obtient les formules définitives :

$$\pi A_v = \sum \frac{1}{n^2 - \lambda^2} \left[ny \sin nx + y' \cos nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} \tag{148}$$

$$\pi B_n = \sum \frac{1}{n^2 - \lambda^2} \left[y' \sin nx - n y \cos nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p} \tag{149}$$

Ces dernières formules peuvent très bien servir comme moyen de vérification du calcul effectué avec les formules (144) et (145) de la méthode rationelle des discontinuités.

9.3. — *La méthode classique d'intégration.*

Il est important de relever que la pratique courante pour effecteur l'analyse harmonique des fonctions sinusoïdales est l'utilisation des relations (131) et (135), c.-à-d. d'écrire pour les coefficients A_n et B_n :

$$\pi A_n = \sum \left[-\frac{A_p \cos(\lambda_p x + nx - \varphi_p)}{2(\lambda_p + n)} - \frac{A_p \cos(\lambda_p x - nx - \varphi_p)}{2(\lambda_p + n)} \right]_{x_{p-1}}^{x_p} \tag{150}$$

$$\pi B_n = \sum \left[\frac{A_p \sin(\lambda_p x - nx + \varphi_p)}{2(\lambda_p - n)} - \frac{A_p \sin(\lambda_p x + nx - \varphi_p)}{2(\lambda_p + n)} \right]_{x_{p-1}}^{x_p} . \tag{151}$$

Ceci constitue une méthode de calcul catégoriquement plus compliquée non seulement par rapport à la méthode rationelle des discontinuités, mais aussi par rapport à la méthode rationelle des intervalles.

Observations :

1) En ce qui concerne l'avantage de l'utilisation des formules (144) et (145) de la méthode rationelle des intervalles, ce que nous avons dit pour la méthode des discontinuités appliquée aux fonctions paraboliques à la page 16, reste valable en ce sens que la méthode des discontinuités sera beaucoup plus avantageuse dans le cas où la fonction à analyser contient des points de discontinuité aux sauts d'ordonnées ou de tangentes nuls, ou des points de sauts identiques de tangente, ce qui a lieu surtout lorsque la fonction se compose de la répétition régulière d'une même fonction élémentaire $y = A \sin(\lambda x - \varphi)$.

2) Il est utile d'observer que les formules de la méthode rationelle des discontinuités 144 et 145 ainsi que celle de la méthode rationelle des intervalles 148 et 149, qui ont été obtenues dans l'hypothèse que la fonction à analyser était composée d'une série d'arcs de sinusoïdes d'équation $y = A \sin(\lambda x - \varphi)$ sont parfaitement valables, aussi pour le cas où les équations de ces arcs ont la forme $y = A \cos(\lambda x - \varphi)$.

Cela résulte immédiatement du fait que cette fonction se ramène à la première forme, ayant $y = A \cos(\lambda x - \varphi) = A \sin\left[\lambda x + \frac{\pi}{2} - \varphi\right]$, les déphasages des sinusoïdes n'entrant pas dans l'expression des sauts s d'ordonnée et s' de tangente. D'ailleurs les valeurs de ces mêmes sauts ne dépendent pas de la manière dont on écrit les équations des deux courbes adjacentes à un point de discontinuité, pourvu qu'elles aient la même origine sur l'axe des abscisses.

3) Il est à remarquer que des formules analogues à celles des relations (144) et (145) ont été publiées également par Mr. l'Ing. R. Feinberg (11) sous la forme :

$$\pi A_n = \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \sum_{m=2}^{r} \left[s'_{m-1,\,m} \cos n\,\xi_{m-1,\,m} + n s_{m-1,\,m} \cos n\,\xi_{m-1,\,m} \right]$$

$$\pi B_n = \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \sum_{m=2}^{r} \left[s'_{m-1,\,m} \sin n\,\xi_{m-1,\,m} - n s_{m-1,\,m} \cos n\,\xi_{m-1,\,m} \right]$$

sans que ces formules aient été encadrées dans une théorie plus générale de la méthode des discontinuités, ainsi qu'il a été procédé dans l'étude présente.

9.4. — *L'analyse des fonctions sinusoïdales dont l'axe de symétrie est déplacée par rapport à l'axe des abscisses.*

Les formules de la méthode rationelle des discontinuités 144 et 145 ainsi que celles de la méthode rationelle des intervalles 150 et 151 ont été déduites dans l'hypothèse que les différents arcs de sinusoïde de la fonction à analyser sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses c.-à-d. que leurs équations sont de la forme (fig. 5) :

$$y_1 = A_1 \sin(\lambda x - \varphi_1) \quad y_2 = A_2 \sin(\lambda x - \varphi_2) \ldots \quad y_p = A_p \sin(\lambda x - \varphi_p)$$

Dans le cas général l'axe de symétrie des sinusoïdes peut être deplacé par rapport a l'axe des abscises, ainsi qu'il est représenté sur la fig. (5 bis a) ci-dessous, les équations respectives étant dans ce cas :

$$y_1 = C_1 + A_1 \sin(\lambda x - \varphi_1) \quad y_2 = C_2 + A_2 \sin(\lambda x - \varphi_2) \ldots \quad y_p = C_p + A_p \sin(\lambda x - \varphi_p)$$

Pour faire l'analyse d'une telle fonction, on la considère comme la somme de deux fonctions et notamment :

La première fonction représentée sur la fig. (5 bis b) formée par des arcs de sinusoïdes symétriques, par rapport a l'axe des abscisses ayant donc les équations ci-dessus mentionées.

$$y_1 = A_1 \sin(\lambda x - \varphi_1) \quad y_2 = A_2 \sin(\lambda x - \varphi_2) \ldots \quad y_p = A_p \sin(\lambda x - \varphi_p)$$

pour l'analyse de laquelle on applique les formules 144 et 145 de la méthode rationelle des discontinuités :

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} [ns \sin nx + s' \cos nx]$$

$$\pi B_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} [s' \sin nx - ns \cos nx]$$

et les formules 150 et 151 pour la méthode rationelle des intervalles

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{n^2 - \lambda^2} \Big[ny \sin nx + y' \cos nx \Big]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

$$\pi B_n = \sum \frac{1}{n^2 - \lambda^2} \Big[y' \sin nx - ny \cos nx \Big]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

La deuxième fonction représentée sur la fig. 5 bis c) formée par des segments de lignes droites parallèles à l'axe des abscisses et situées à des distances $C_1, C_2 \ldots C_p$ égales aux déplacements mêmes des sinusoïdes par rapport à cette même axe ayant donc les équations :

$$y_1 = C_1 \quad y_2 = C_2 \quad y_p = C_p$$

Pour l'analyse de cette fonction polygonale on applique les formules Abason-Eagle 4 et 5 pour la méthode des discontinuités, réduites à leur premier terme, car la fonction ne présente que des sauts d'ordonnée :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n} \sum' s \sin nx$$

$$\pi B_n = \frac{1}{n} \sum' s \cos nx$$

et les formules de l'auteur de la méthode des intervalles, réduites également à leur premier terme :

$$\pi A_n = \frac{1}{n} \sum' \Big[y \sin nx \Big]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

$$\pi B_n = -\frac{1}{n} \sum' \Big[y \cos nx \Big]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

Par conséquant les formules complètes pour l'analyse de la fonction réprésentée sur la fig. 5 bis a, seront :

Pour la méthode des discontinuités

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2}[ns \sin nx + s' \cos nx] - \frac{1}{n}\sum' s \sin nx$$

$$\pi B_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2}[s' \sin nx - ns \cos nx] + \frac{1}{n}\sum' s \cos nx \qquad (152)$$

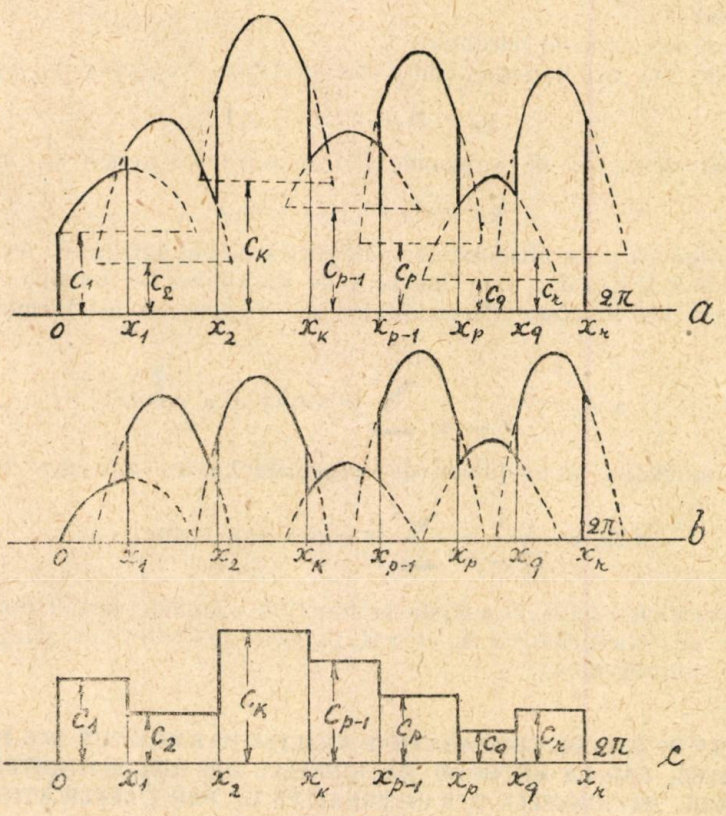


Fig. 5 bis

et pour la méthode des intervalles :

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{n^2 - \lambda^2}\left[ny \sin nx + y' \cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n}\sum' \left[y \sin nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

$$\pi B_n = \sum \frac{1}{n^2 - \lambda^2}\left[y' \sin nx - ny \cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} - \frac{1}{n}\sum' \left[y \cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} \qquad (153)$$

les sommes $\sum$ resp $\sum'$ se rapportant à la fonction sinusoïdale fig. (5 bis b) respectivement à la fonction polygonale fig. (5 bis c).

9.5. — *L'analyse des fonctions plus complexes.*

Si enfin on voulait faire l'analyse d'une fonction plus compliquée (qu'on ne rencontre presque pas dans la pratique) formée de différentes portions de paraboles d'un ordre quelconque et d'arcs de sinusoïdes de fréquences différentes, il n'y a aucune difficulté de calcul.

On considérera — ainsi que nous l'avons déja fait ci-dessus — que la fonction à analyser est la somme de plusieurs catégories de fonctions représentées :

1) par des arcs de paraboles

2) par des arc de sinusoïde d'une certaine fréquence λ, d'équation :

$$y_p = A_p \sin(\lambda x - \varphi_p)$$

3) par des arcs de sinusoide d'une autre fréquence λ_p d'équation

$$y_p = A_p \sin(\lambda_p x - \varphi_p)$$

et on appliquera pour chacune des catégories de ces fonctions, les formules correspondantes c.-à-d. : pour les arcs de paraboles les formules Abason-Eagle, pour les fonctions sinusoïdales de fréquence λ les formules de la forme :

$$\pi A_n = \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \sum [n \sin nx + s' \cos nx]$$

pour les fonctions sinusoïdales de fréquence λ_p, les formules similaires :

$$\pi A_n = \frac{1}{\lambda_p^2 - n^2} \sum [n \sin nx + s' \cos nx] \text{ etc.}$$

Les coefficients πA_n et πB_n de la fonction complète seront données par la somme des coefficients πA_n et πB_n partiels de toutes les catégories des fonctions composantes.

10. EXEMPLE DE CALCUL COMPARATIF D'ANALYSE HARMONIQUE DES FONCTIONS SINUSOÏDALES, PAR LA MÉTHODE RATIONNELLE DES DISCONTINUITÉS, PAR LA MÉTHODE RATIONNELLE DES INTERVALLES ET PAR L'APPLICATION DES FORMULES ABASON-EAGLE.

10.1 — *Le cas d'une fonction formée d'un seul arc de sinusoïde.*

Soit la fonction simple étudiée par Mr. Walther (7) et représentée par la fonction :

$y = \sin x$ entre $x = \alpha_1$ et $x = \alpha_2$

$y = 0$ entre $x = \alpha_2$ et $x = 2\pi$

10.1.1 — *L'application de la méthode rationnele des discontinuités.*

Pour le calcul du coefficient A_n nous avons :

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} [ns \sin nx + s' \cos nx] \qquad (152)$$

Et comme $\lambda = 1$

$$\pi A_n = \frac{1}{1-n^2} \sum [ns \sin nx + s' \cos nx] \tag{153}$$

la somme se rapportant à tous les points de discontinuité, c.-à-d. aux points d'abscisse $x = \alpha_1$ et $x = \alpha_2$.

Les sauts en $x = \alpha_1$

$$y_d = \sin\alpha_1 \qquad y_g = 0 \qquad s = y_d - y_g = \sin\alpha_1$$
$$y'_d = \cos\alpha_1 \qquad y'_g = 0 \qquad s' = y'_d - y'_g = \cos\alpha_1$$

$$ns \sin nx + s' \cos nx = n \sin\alpha_1 \sin n\alpha_1 + \cos\alpha_1 \cos n\alpha_1$$

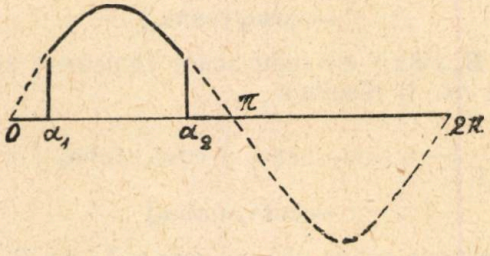


Fig. 6

Les sauts en $x = \alpha_2$

$$y_d = 0 \qquad y_g = \sin\alpha_2 \qquad s = 0 - \sin\alpha_2 = -\sin\alpha_2$$
$$y'_d = 0 \qquad y'_g = \cos\alpha_2 \qquad s' = 0 - \cos\alpha_2 = -\cos\alpha_2$$

$$ns \sin nx + s' \cos nx = -n \sin\alpha_2 \sin n\alpha_2 - \cos\alpha_2 \cos n\alpha_2$$

$$\pi A_n = \frac{1}{1-n^2} [n \sin\alpha_1 \sin n\alpha_1 + \cos\alpha_1 \cos n\alpha_1 - n \sin\alpha_2 \sin n\alpha_2 - \cos\alpha_2 \cos n\alpha_2] \tag{154}$$

Pour avoir la valeur du coefficient B_n, on remplace dans l'expression de πA_n : $\sin nx$ par $-\cos nx$ et $\cos nx$ par $\sin nx$. On obtient :

$$\pi B_n = \frac{1}{1-n^2} [-n \sin\alpha_1 \cos n\alpha_1 + \cos\alpha_1 \sin n\alpha_1 + n \sin\alpha_2 \cos n\alpha_2 - \cos\alpha_2 \sin n\alpha_2] \tag{155}$$

10.1.2. — *L'application de la méthode rationnelle des intervalles.* Pour le calcul du coefficient A_n on a la formule :

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{n^2 - \lambda^2} \Big[ny \sin nx + y' \cos nx \Big]_{x_{p-1}}^{x_p} \tag{156}$$

Comme il n'y a qu'un seul intervalle, il résulte

$$\pi A_n = \frac{1}{n^2-1}\left[ny \sin nx + y' \cos nx\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \tag{157}$$

Nous avons pour l'intervalle considéré :

$$y = \sin x \qquad y' = \cos x$$

Donc la valeur de πA_n s'écrit immédiatement :

$$\pi A_n = \frac{1}{n^2-1}\left[n \sin x \sin nx + \cos x \cos nx\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \tag{158}$$

$$\pi A_n = \frac{1}{n^2-1}[n \sin\alpha_2 \sin n\alpha_2 + \cos\alpha_2 \cos n\alpha_2 - n \sin\alpha_1 \sin n\alpha_1 - \\ - \cos\alpha_1 \cos n\alpha_1] \tag{159}$$

La valeur de πB_n s'écrit en remplaçant également $\sin nx$ par $-\cos nx$ et $\cos nx$ par $\sin nx$. Il résulte :

$$\pi B_n = \frac{1}{n^2-1}[-n \sin\alpha_2 \cos n\alpha_2 + \cos\alpha_2 \sin n\alpha_2 + n \sin\alpha_1 \cos n\alpha_1 - \\ - \cos\alpha_1 \sin n\alpha_1] \tag{160}$$

On vérifie que nous avons obtenu pour πA_n et πB_n les mêmes valeurs que par la méthode rationelle des discontinuités (relations (154) et (155).

OBSERVATION. — On constate, en comparant les calculs faits par les deux méthodes, que pour le cas étudié, d'un seul arc de sinusoïde les deux méthodes sont équivalentes, la méthode rationnelle des intervalles étant même plus simple, car le résultat s'écrit immédiatement.

10.1.3. — *L'application directe des formules Abason-Eagle de la méthode des discontinuités.*

Mr. Walther a appliqué les formules Abason-Eagle telles quelles, pour le calcul du coefficient A_n :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}\sum s \sin nx - \frac{1}{n^2}\sum s' \cos nx + \frac{1}{n^3}\sum s'' \sin nx + \\ + \frac{1}{n^4}\sum s''' \cos nx - \frac{1}{n^5}\sum s^{IV} \sin nx - \frac{1}{n^6}\sum s^{V} \cos nx \tag{161}$$

Calculs des sauts : au point $x = \alpha_1$ au point $x = \alpha_2$

$y = \sin x$	$s = \sin\alpha_1$	$s = -\sin\alpha_2$				
$y' = \cos x$	$s' = \cos\alpha_1$	$s' = -\cos\alpha_2$				
$y'' = \sin x$	$s'' = -\sin\alpha_1$	$s'' = \sin\alpha_2$				(162)
$y''' = \cos x$	$s''' = -\cos\alpha_1$	$s''' = \cos\alpha_2$				
$y^{IV} = \sin x$	$s^{IV} = \sin\alpha_1$	$s^{IV} = -\sin\alpha_2$				
$y^{V} = \cos x$	$s^{V} = \cos\alpha_1$	$s^{V} = -\cos\alpha_2$				

A partir de y^{IV} les dérivées y^{IV} y^{V} etc. et donc les sauts s^{IV}, s^{V} etc. se répètent étant égaux à :

$$y^{IV} = y\,;\; y^{V} = y'\,;\; y^{VI} = y''\,;\; y^{VIII} = y'''\,;\text{ etc.}$$

En remplaçant dans la formule (161) on obtient :

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}(\sin\alpha_1 \sin n\alpha_1 - \sin\alpha_2 \sin n\alpha_2) - \frac{1}{n^2}(\cos\alpha_1 \cos n\alpha_1 -$$

$$- \cos\alpha_2 \cos n\alpha_2) + \frac{1}{n^3}(-\sin\alpha_1 \sin n\alpha_1 + \sin\alpha_2 \sin n\alpha_2) +$$

$$+ \frac{1}{n^4}(-\cos\alpha_1 \cos n\alpha_1 + \cos\alpha_2 \cos n\alpha_2) \qquad (163)$$

$$\pi A_n = -(\sin\alpha_1 \sin n\alpha_1 - \sin\alpha_2 \sin n\alpha_2)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \ldots\right)$$

$$-(\cos\alpha_1 \cos n\alpha_1 - \cos\alpha_2 \cos n\alpha_2)\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + \ldots\right) \qquad (164)$$

$$\pi A_n = -(\sin\alpha_1 \sin n\alpha_1 - \sin\alpha_2 \sin n\alpha_2)\frac{n}{n^2-1} - (\cos\alpha_1 \cos n\alpha_1 -$$

$$- \cos\alpha_1 \cos n\alpha_2)\frac{1}{n^2-1} \qquad (165)$$

$$\pi A_n = \frac{1}{n^2-1}[n \sin\alpha_1 \sin n\alpha_1 + \cos\alpha_2 \cos n\alpha_1 - n \sin\alpha_2 \sin n\alpha_2 -$$

$$- \cos\alpha_2 \cos n\alpha_2] \qquad (166)$$

c.-à-d. le même résultat que ci-dessus (relation 159). Et Mr. Walther nous dit que πB_n se calcule de la même manière en utilisant la formule respective Abason-Eagle pour πB_n (relation 5).

La simple comparaison de ce calcul à celui de la page 47 montre d'une façon catégorique la supériorité de la méthode des discontinuités rationnellement appliquée, ce qui évite de répéter inutilement les dérivations successives pour le calcul des sauts, de faire la somme des séries apparamment infinies, etc.

10.2. — *L'analyse d'une fonction formée de plusieurs arcs de sinusoïde identiques.*

Soit la fonction périodique $f(x)$ de la fig. 7 constituée par quatre arcs de sinusoïde identiques, ayant les équations :

$y_1 = \sin x$ entre $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2} + \alpha$

$y_2 = \sin(x - 2\alpha)$ „ $x = \frac{\pi}{2} + \alpha$ et $x = \frac{\pi}{2} + 3\alpha$

$y_3 = \sin(x - 4\alpha)$ „ $x = \frac{\pi}{2} + 3\alpha$ et $x = \frac{\pi}{2} + 5\alpha$

$y_4 = \sin(x - 6\alpha)$ „ $x = \frac{\pi}{2} + 5\alpha$ et $x = \pi + 6\alpha$

ainsi que par la fonction $y = 0$ entre les abscisses $x = \pi + 6\alpha$ et $x = 2\pi$.

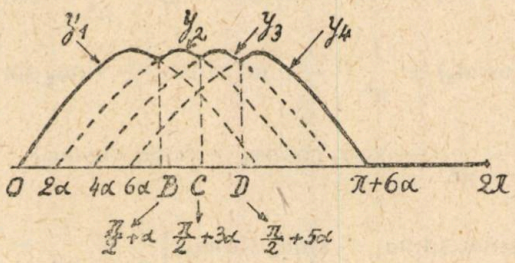


Fig. 7

10.2.1 — *Le calcul par la méthode rationnelle des discontinuités.*

La fonction ne présentant pas de sauts d'ordonnées mais seulement des sauts de tangente s', les formules (144) et (145) se réduisent à leurs deuxième terme et deviennent :

$$\pi A_n = \frac{1}{1 - n^2} \sum s' \cos nx \qquad \text{car } \lambda = 1 \tag{167}$$

$$\pi B_n = \frac{1}{1 - n^2} \sum s' \sin nx \tag{168}$$

Nous calculerons seulement le coefficient πA_n en observant la règle mentionnée à la page 20 *de ne pas simplifier les fonctions trigonométriques des expressions sin nx et cos nx,* en déduisant à la fin la valeur du coefficient B_n par la substitution dans l'expression de A_n, cos nx par sin nx.

Nous calculerons les sauts de tangente s' aux points A, B, C, D, et E d'abscisses : x_A, x_B, x_C, x_D, x_E.

1) Le saut s' au point d'abscisse $x_A = 0$.

$$s'_A = y'_d - y'_g = y'_1 - 0 = y'_1$$

$$y_1 = \sin x \quad y'_1 = \cos x \text{ donc } s'_A = \cos x_A = \cos 0 = 1.$$

Il résulte :

$$s'_A \cos n x_A = \cos n 0. \tag{169}$$

(Nous ne faisons pas la simplification en écrivant cos $n0 = 1$, pour la raison soulignée ci-dessus).

2) *Les sauts s' aux points B, C, D.*

On constate sur la figure 7 que les sauts de tangente s' en ces points sont tous égaux au saut s'_B du point B d'abscisses $x_B = \frac{\pi}{2} + \alpha$ pour lequel on a :

$$s'_B = y'_2 - y'_1 .$$

Or :

$$y_2 = \sin(x - 2\alpha) \qquad y_1 = \sin x$$

$$y'_2 = \cos(x - 2\alpha) \qquad y'_1 = \cos x$$

$$s'_B = \cos(x_B - 2\alpha) - \cos x_B = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - 2\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Il résulte :

$$s'_B = 2\sin\alpha.$$

Donc :

$$s'_B = s'_C = s'_D = 2\sin\alpha. \tag{170}$$

Il résulte que la contribution des points B, C, D, est :

$$\Sigma s'\cos nx = s'\,\Sigma\cos nx = s'_B(\cos nx_B + \cos nx_C + \cos nx_D) \tag{161}$$

$$\sum s'\cos nx = 2\sin\alpha\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos n\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) + \cos n\left(\frac{\pi}{2} + 5\alpha\right)\right] \tag{172}$$

3) Le saut s' au point E d'abscisse $x_E = \pi + 6\alpha$.

$$s'_E = y'_d - y'_g = 0 - y'_4 = -y'_4$$

$$y_4 = \sin(x - 6\alpha) \quad s'_E = -\cos(x_E - 6\alpha)\, s'_E = -\cos(\pi + 6\alpha - 6\alpha) = 1$$

Il résulte :

$$s'_E \cos nx_E = \cos n(\pi + 6\alpha). \tag{163}$$

Pour la valeur de πA_n, nous aurons, en faisant la somme des résultats partiels (169), (172) et (173) :

$$\pi A_n = \frac{1}{1-n^2}\left\{\cos n0 + 2\sin\alpha\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos n\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \cos n\left(\frac{\pi}{2} + 5\alpha\right)\right] + \cos n(\pi + 6\alpha)\right\}. \tag{175}$$

La valeur de πB_n s'obtient en remplaçant cos nx par sin nx et donc :

$$\pi B_n = \frac{1}{1-n^2}\left\{\sin n0 + 2\sin\alpha\left[\sin n\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin n\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sin n\left(\frac{\pi}{2} + 5\alpha\right)\right] + \sin n(\pi + 6\alpha)\right\}. \tag{175}$$

Et mettant maintenant pour cos $n0$ et sin $n0$ leurs valeurs 1 resp. 0, on obtient les valeurs définitives :

$$\pi A_n = \frac{1}{1-n^2}\left\{1+2\sin\alpha\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos n\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cos n\left(\frac{\pi}{2}+5\alpha\right)\right]+\cos n\,(\pi+6\alpha)\right\} \qquad (176)$$

$$\pi B_n = \frac{1}{1-n^2}\left\{2\sin\alpha\left[\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin n\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sin n\left(\frac{\pi}{2}+5\alpha\right)\right]+\sin n\,(\pi+6\alpha)\right\} \qquad (177)$$

10.2.2. — *Le calcul par la méthode rationnelle des intervalles.*

Nous calculerons comme ci-dessus le coefficient πA_n seulement. Nous avons pour πA_n la formule (148) :

$$\pi A_n = \frac{1}{n^2-\lambda^2}\sum\left[y'\cos nx + ny\sin nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

la somme s'étendant à tous les intervalles, x_{p-1} et x_p représentant les abscisses des points qui limitent chaque intervalle.

1) *Calcul de la contribution de l'intervalle AB* : $(\pi A_n)_{AB}$.

Pour l'intervalle AB entre $x_A = 0$ et $x_B = \frac{\pi}{2}+\alpha$ nous avons :

$$y = \sin x \qquad y' = \cos x.$$

Il résulte :

$$(\pi A_n)_{AB} = \frac{1}{n^2-1}\left[\cos x\cos nx + n\sin x\sin nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}+\alpha}$$

$$(\pi A_n)_{AB} = \frac{1}{n^2-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\right.$$
$$\left.+n\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]-\frac{1}{n^2-1}\left[\cos 0\cos n0+n\sin 0\sin n0\right] \qquad (179)$$

$$(\pi A_n)_{AB} = \frac{1}{n^2-1}\left[\underbrace{-\sin\alpha\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}_{(1)}+\underbrace{n\cos\alpha\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}_{(2)}-\cos n0\right] \qquad (180)$$

(Nous n'avons pas simplifié l'expression cos $n0$, en écrivant que sa valeur est 1, pour respecter la règle déjà mentionnée, afin de pouvoir en déduire, à la fin, la valeur exacte de B_n).

2) *Calcul de la contribution de l'intervalle BC* : $(\pi A_n)_{BC}$.

Pour l'intervalle BC entre $x_B = \frac{\pi}{2} + \alpha$ et $x_C = \frac{\pi}{2} + 3\alpha$ on a :

$$y = \sin(x - 2\alpha) \qquad y' = \cos(x - 2\alpha)$$

$$(\pi A_n)_{BC} = \frac{1}{n^2 - 1}\left[\cos(x - 2\alpha)\cos nx + n\sin(x - 2\alpha)\sin nx\right]_{\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}+3\alpha} \tag{181}$$

On trouve le résultat :

$$(\pi A_n)_{BC} = \frac{1}{n^2 - 1}\Big[\underbrace{-\sin\alpha\cos n\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right)}_{(3)} + \underbrace{n\cos\alpha\sin n\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right)}_{(4)} -$$

$$\underbrace{-\sin\alpha\cos n\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}_{(1')} - \underbrace{n\cos\alpha\sin n\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}_{(2')}\Big] \tag{182}$$

3) *Calcul de la contribution de l'intervalle CD* : $(\pi A_n)_{CD}$

Pour l'intervalle CD entre $x_C = \frac{\pi}{2} + 3\alpha$ et $x_D = \frac{\pi}{2} + 5\alpha$ on a :

$$y = \sin(x - 4\alpha) \qquad y' = \cos(x - 4\alpha)$$

$$(\pi A_n)_{CD} = \frac{1}{n^2 - 1}\left[\cos(x - 4\alpha)\cos nx + n\sin(x - 4\alpha)\sin nx\right]_{\frac{\pi}{2}+3\alpha}^{\frac{\pi}{2}+5\alpha} \tag{183}$$

$$(\pi A_n)_{CD} = \frac{1}{n^2 - 1}\Big[\underbrace{-\sin\alpha\cos n\left(\frac{\pi}{2} + 5\alpha\right)}_{(5)} + \underbrace{n\cos\alpha\sin n\left(\frac{\pi}{2} + 5\alpha\right)}_{(6)} -$$

$$\underbrace{-\sin\alpha\cos n\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right)}_{(3')} - \underbrace{n\cos\alpha\sin n\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right)}_{(4')}\Big] \tag{184}$$

4) *Calcul de la contribution de l'intervalle DE* : $(\pi A_n)_{DE}$.

Pour l'intervalle DE entre $x = \frac{\pi}{2} + 5\alpha$ et $x = \pi + 6\alpha$ on a :

$$y = \sin(x - 6\alpha) \qquad y' = \cos(x - 6\alpha)$$

$$(\pi A_n)_{DE} = \frac{1}{n^2 - 1}\left[\cos(x - 6\alpha)\cos nx + n\sin(x - 6\alpha)\sin nx\right]_{\frac{\pi}{2}+5\alpha}^{\frac{\pi}{2}+6\alpha} \tag{185}$$

$$(\pi A_n)_{DE} = \frac{1}{n^2-1}\left[-\cos n(\pi+6\alpha) - \underbrace{\sin\alpha\cos n\left(\frac{\pi}{2}+5\alpha\right)}_{(5')} - \right.$$

$$\left. - \underbrace{n\cos\alpha\sin n\left(\frac{\pi}{2}+5\alpha\right)}_{(6')}\right]. \qquad (186)$$

Il résulte pour le coefficient πA_n la valeur :

$$\pi A_n = (\pi A_n)_{AB} + (\pi A_n)_{BC} + (\pi A_n)_{CD} + (\pi A_n)_{DE}$$

$$\pi A_n = \frac{1}{n^2-1}\left\{-\cos n0 - 2\sin\alpha\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \cos n\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos n\left(\frac{\pi}{2}+5\alpha\right)\right] - \cos n(\pi+6\alpha)\right\} \qquad (187)$$

De cette expression on déduit immédiatement la valeur du coefficient πB_n en remplçant $\cos nx$ par $\sin nx$. Nous aurons donc :

$$\pi B_n = \frac{1}{n^2-1}\left\{-\sin n0 - 2\sin\alpha\left[\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \sin n\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin n\left(\frac{\pi}{2}+5\alpha\right)\right] - \sin n(\pi+6\alpha)\right\}. \qquad (188)$$

Et pouvant maintenant introduire les valeurs de $\cos n0 = 1$ et $\sin n0 = 0$,on obtient les expressions définitives :

$$\pi A_n = \frac{1}{1-n^2}\left\{1 + 2\sin\alpha\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \cos n\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos n\left(\frac{\pi}{2}+5\alpha\right)\right] + \cos n(\pi+6\alpha)\right\} \qquad (189)$$

$$\pi B_n = \frac{1}{1-n^2}\left\{2\sin\alpha\left[\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \sin n\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin n\left(\frac{\pi}{2}+5\alpha\right)\right] + \sin n(\pi+6\alpha)\right\} \qquad (190)$$

c.-à-d. les mêmes valeurs que celles trouvées par la méthode rationnelle des discontinuités (relations (176) et (177).

OBSERVATION. — On constate de ce qui précède, en comparant les calculs faits par les deux méthodes, que l'application de la méthode rationnelle des discontinuités s'avère pour cet exemple spécial, de beaucoup plus simple que la méthode rationnelle des intervalles.

En effet, on constate que pour chacun des trois points de discontinuité E, C et D pour lesquels le saut d'ordonnée s est nul, la méthode des intervalles nous oblige de calculer deux termes, qui en réealité résultent égaux et de signe contraires et donc s'annulent deux à deux, comme les termes que nous avons marqués par 2 et 2′ ; 4 et 4′ ; 6 et 6′ ; et, pour les mêmes points pour lesquels les sauts de tangente s' sont identiques, la méthode des intervalles implique le calcul de six termes qui sont deux à

deux égaus et de mêmes signe, comme ceux marqués par 1 et 1′ ; 3 et 3′ ; 5 et 5′ et qui, par conséquent se réduisent à trois qui fournissent finalement la somme pour πA_n :

$$2\sin\alpha\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos n\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)+\cos n\left(\frac{\pi}{2}+5\alpha\right)\right]$$

tandis que la méthode des discontinuités n'implique le calcul que de ces trois derniers termes qui s'obtient d'ailleurs d'un seul trait, ce qui explique l'extrême commodité de cette méthode.

On se rend compte, d'autant plus facilement, que la méthode des discontinuités est considérablement plus avantageuse par rapport à la méthode classique des intervalles si cette dernière est appliquée en employant les formules (150) et (151).

Il est à remarquer, enfin, que la méthode rationnelle des intervalles peut servir également ici comme un bon moyen de vérification des calculs effectués par la méthode des discontinuités.

11. LE PROBLÈME DE L'OBTENTION PAR LA MÉTHODE DES DISCONTINUITÉ DES VALEURS INDÉTERMINÉES DE LA FORME $\frac{0}{0}$ POUR LES COEFFICIENTS A_n ET B_n, POUR LES FONCTIONS SINUSOÏDALES

Il a été trouvé à la page 47 que les coefficients A_n et B_n de la fonction sinusoïdale de la fig. 6 ont les valeurs données par les expressions (154) et (155):

$$\pi A_n = \frac{1}{1-n^2}\begin{bmatrix} n\sin\alpha_1\sin n\alpha_1+\cos\alpha_1\cos n\alpha_1 \\ -n\sin\alpha_2\sin n\alpha_1-\cos\alpha_2\cos n\alpha_2 \end{bmatrix} \qquad (154)$$

$$\pi B_n = \frac{1}{1-n^2}\begin{bmatrix} -n\sin\alpha_1\cos n\alpha_1+\cos\alpha_1\sin n\alpha_1 \\ +n\sin\alpha_2\cos n\alpha_2-\cos\alpha_2\sin n\alpha_2 \end{bmatrix}. \qquad (155)$$

Si l'on cherche les valeurs des harmoniques fondamentaux, c.-à-d. les valeurs des coefficients A_1 et B_1 on constate que l'on obtient pour ces deux coefficients des valeurs indéterminées:

$$\pi A_1 = \frac{0}{0} \qquad \pi B_1 = \frac{0}{0}.$$

Ce problème a été traité par Mr. le prof. A. Walther dans la revue „Archiv für Elektrotechnik" de 1933 dans son article déjà mentionné à la page 30 de cette étude, et dans lequel il répondait à M. l'ing. R. Feinberg, qui avait mis en discussion le problème de la convergence des séries qu'on obtenait lorsqu'on appliquait la méthode des discontinuités aux fonctions sinusoïdales (voir page 30 et suivantes).

Mr. Walther a affirmé, ce qui est exact, que les valeurs des coefficients A_n et B_n qu'on obtient par la méthode des discontinuités sont valables pour toutes les valeurs de $n = o, 1, 2, 3$ etc. Si l'on obtient des valeur indéterminées $\frac{0}{0}$, on n'a qu'à lever l'indétermination par l'application de la règle de l'Hôpital pour obtenir les valeurs exactes.

Comme exemple, si l'on applique la règle de l'Hôpital à la valeur de πA_n, donnée par la relation (154) ci-dessus, on obtient:

$$\pi A_n = \frac{n \sin\alpha_1 \sin n\alpha_1 + \cos\alpha_1 \cos n\alpha_1 - n \sin\alpha_2 \sin n\alpha_2 - \cos\alpha_2 \cos n\alpha_2}{1 - n^2}$$

En dérivant par rapport à n tant le numérateur que le dénominateur et faisant ensuite $n = 1$, on obtient:

$$\pi A_1 = \frac{\sin^2\alpha_2 - \sin^2\alpha_1}{2}$$

de même (191)

$$\pi B_1 = \frac{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2}{4}$$

qui sont, en effet, les valeurs exactes de ces coefficients.

Mr. Walther en donne un second exemple concernant la fonction étudiée à la page 65 de cette étude, pour laquelle il a obtenu comme valeur du coefficient πA_n, l'expression

$$\pi A_n = \frac{2\pi^2 \sin n\alpha}{n[\pi^2 - \alpha^2 n^2]}.$$

Cherchant la valeur de l'harmonique $n = \frac{\pi}{\alpha}$ qui annule le dénominateur, on obtient pour πA_n la valeur indéterminée

$$(\pi A_n)_{n=\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{0}{0}.$$

En appliquant la règle de l'Hôpital et en posant $n = \frac{\pi}{\alpha}$ on obtient:

$$\pi A_n = \alpha \qquad A_n = \frac{\alpha}{\pi}$$

qui est également la valeur exacte de l'harmonique cherché. Donc une seconde vérification (voir plus loin, pages 65-67).

Or, dans le même numéro de la revue „Archiv für Elektrotehhnik" que nous avons mentionnée ci-dessus, (11) Mr. R. Feinberg a trouvé pour la valeur du coefficient B_n de la fonction sinusoïdale étudiée à la page 62, fig. 8 de cette étude, la valeur:

$$B_n = 4 \frac{3A}{3^2 - n^2} [\sin n\,40° + \sin n\,60° + \sin n\,80°].$$

En nous proposant de faire une troisième vérification de la théorie de Mr. Walther, nous avons cherché la valeur de l'harmonique pour $n = 3$ qui annule le dénominateur de B_n de la formule de Mr. Feinberg. Nous avons obtenu la valeur indéterminée $B_3 = \frac{0}{0}$ et en appliquant la règle de l'Hôpital pour lever l'indétermination nous avons obtenu pour B_3 la

valeur:

$$B_3 = \frac{4}{3} \cdot A$$

Or, à notre grande surprise, nous avons constaté que ce n'était pas la valeur exacte, cette dernière étant égale à

$$B_3 = \frac{A}{3}.$$

Cette constatation, qu'en levant l'indétermination des valeurs des coefficients A_n et B_n calculés par la méthode des discontinuités et qui se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, on peut également obtenir des valeurs inexactes si certaines mesures ne sont pas prises, a été mentionnée pour la première fois par nous dans un article publié dans le „Bulletin de Matémathiques de l'Ecole Polytechnique de Bucarest, 1937—1938 (12), article dans lequel nous avons annoncé que l'explication en serait donnée dans une étude de critique générale de la méthode des discontinuités qui devait être envoyée à la revue „Archiv für Elektrotechnik", ce qui n'a pas eu lieu pour différentes raisons. Notre article mentionnée ci-dessus, ayant attiré l'attention sur le problème en question, Mr. le Prof. T. Zech de l'Institut de matématiques de Darmstadt a publié en 1942, à l'insistance de Mr. le Prof. A. Walther, dans la même revue „Archiv für Elektrotechnik" un article (16) dans lequel il cherche à expliquer l'anomalie signalée par l'auteur de la présente étude dont il cite l'article paru dans le „Bulletin de Mathématiques".

L'explication donnée par Mr. T. Zech, basée sur des considérations de la théorie des fonctions, est beaucoup trop compliquée et pourtant incomplète, car il ne traite pas le fond même du problème mis en discussion. En plus, la conclusion partielle à laquelle il arrive n'est pas entièrement conforme à la réalité, ainsi que l'on verra plus loin. C'est pour cette raison que nous allons éclaircir également ce dernier problème.

11.1. — *L'Origine des valeurs indéterminées des coefficients* A_n *et* B_n, *obtenus par la méthode des discontinuités.*

On n'a pas montré jusqu'à présent la raison pour laquelle l'application de la méthode des discontinuités aux fonctions sinusoïdales, soit sous la forme non rationnelle des formules Abason-Eagle (4) et (5), soit sous la forme rationnelle des formules (144) et (145)

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} [s\, n \sin nx + s' \cos nx] \qquad (144)$$

$$\pi B_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} [s' \sin nx - s\, n \cos nx] \qquad (145)$$

peut fournir des valeurs indéterminées pour les coefficients A_n et B_n.

Ceci est dû à ce que l'origine de ce problème est un peu cachée. En effet, ces valeurs indéterminées de la forme $\frac{0}{0}$ ne peuvent s'obtenir que pour les valeurs de n qui annulent le dénominateur des expressions ci-dessus, c.-à-d. de $n = \lambda$.

Si nous supposons que λ est le même pour tous les points de discontinuité, c.-à-d. que la fonction à analyser est composée d'une série d'arcs de même période, on peut écrire pour πA_n, par exemple:

$$\pi A_n = \frac{\Sigma\,[s\,n\sin nx + s'\cos nx]}{\lambda^2 - n^2} \tag{192}$$

en mettant en facteur commun le dénominateur.

Si l'on fait $n = \lambda$ le dénominateur devient nul et, pour que πA_n se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ il faut qu'on ait nécéssairement:

$$\Sigma\,[s\,n\sin nx + s'\cos nx] = 0. \tag{193}$$

Mais comme la somme Σ s'étend à tous les points de discontinuité et comme il est évident que tous les sauts d'ordonnées s et de tangentes s' ne peuvent pas être nuls, car alors la fonction à analyser n'existerait plus, il est impossible de se rendre compte pour quelle raison la relation (193) doit être satisfaite.

Nous-mêmes, nous n'en avons eu l'explication qu'après avoir trouvé la vraie nature de la méthode des discontinuités (page 11). Nous avons, en effet, montré que les formules de la méthode des discontinuités (144) et (145) sont parfaitement équivalentes aux formules (148) et (149) de notre nouvelle méthode des intervalles:

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{n^2 - \lambda^2}\left[n\,y\sin nx + y'\cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} \tag{148}$$

$$\pi B_n = \sum \frac{1}{n^2 - \lambda^2}\left[y'\sin nx - n\,y\cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} \tag{149}$$

c.-à-d. que l'on a, par exemple pour πA_n, la relation:

$$\sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2}\left[sn\sin nx + s'\cos nx\right] = \sum \frac{1}{n^2 - \lambda^2}\left[ny\sin nx + y'\cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} \tag{194}$$

L'expression $\frac{1}{n^2 - \lambda^2}\,[ny\sin nx + y'\cos nx]$ n'est autre chose (voir les relations (129) et (129 bis) que l'intégrale indéfinie $F_p(x) = \int A_p \sin(\lambda x - \varphi_p)\cos nx$ correspondant à la fonction partielle $f_p(x) = A_p \sin(\lambda x - \varphi_p)$ de l'intervalle d'ordre p, entre x_{p-1} et x_p, et donc on a:

$$\frac{1}{n^2 - \lambda^2}\left[ny\sin nx + y'\cos nx\right] = -\frac{1}{n^2 - \lambda^2}\left[A_p\sin(\lambda x - \varphi_p)\sin nx + \right.$$

$$\left. + \lambda\cos(\lambda x - \varphi_p)\cos nx\right]. \tag{195}$$

Si l'on fait $n = \lambda$, la parenthèse du second membre prend la valeur $\lambda \cos \varphi_p$ et il résulte donc:

$$\frac{1}{n^2 - \lambda^2}\left[ny \sin nx + y' \cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} = \frac{-\left[A_p \lambda \cos \varphi_p\right]_{x_{p-1}}^{x_p}}{0} =$$

$$= \frac{-A_p \lambda \cos \varphi_p + A_p \lambda \cos \varphi_p}{0} = \frac{0}{0} \qquad (196)$$

c.-à-d.: *la contribution de chaque intervalle* $x_{p-1} - x_p$ *à la valeur de* πA_n *se présente sous la forme* $\frac{0}{0}$ *et donc la valeur totale de* πA_n *pour* $n = \lambda$ *sera:*

$$[\pi A_n]_{n=\lambda} = \frac{\Sigma 0}{0} = \frac{0}{0}.$$

On constate à peine maintenant pourquoi la relation (193) est satisfaite, car selon la relation (194) on a $\Sigma sn \sin nx + s' \cos nz) = \left[\Sigma ny \sin nx + y' \cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} = \Sigma 0 = 0.$

Nous pouvons donc tirer la conclusion que la méthode des discontinuités donne pour $n = \lambda$ des valeurs indéterminées de la forme $\frac{0}{0}$ pour les coefficients A_n et B_n, *parce que c'est la méthode des intervalles elle-même qui fournit pour chaque intervalle et donc pour la somme de tous les intervalles, la valeur zéro.*

Et, enfin, l'explication de ce résultat même peut être trouvée, en nous rappelant que l'intégrale:

$$F_p(x) = \frac{1}{n^2 - \lambda^2}\left[ny \sin nx + y' \cos nx\right] = \frac{-A_p}{\lambda^2 - n^2}\left[n \sin (\lambda x - \varphi_p) \sin nx + \right.$$

$$\left. + \pi \cos (\lambda x - \varphi_p) \cos nx\right]$$

a été déduite de la relation (131):

$$F_p(x) = -\frac{A_p \cos (\lambda x + nx - \varphi_p)}{2(\lambda + n)} - \frac{A_p \cos (\lambda x - nx - \varphi_p)}{2(\lambda - n)} \qquad (131)$$

en chassant les dénominateurs.

Nous pouvons donc écrire:

$$F_p(x)_{x_{p-1}}^{x_p} = \frac{A_p\left[\cos (\lambda x + nx - \varphi_p)\right]_{x_{p-1}}^{x_p}}{2(\lambda + n)} - \frac{A_p\left[\cos (\lambda x - nx - \varphi_p)\right]_{x_{p-1}}^{x_p}}{2(\lambda - n)} \qquad (197)$$

Et si dans cette relation on fait $\lambda = n$, on constate que le premier terme a une valeur finie, tandis que pour le second on obtient:

$$\frac{\left[A_p \cos(\lambda x - \lambda x - \varphi_p)\right]_{x_{p-1}}^{x_p}}{2(\lambda - n)} = \frac{\left[A_p \cos\varphi_p\right]_{x_{p-1}}^{x_p}}{2(\lambda - n)} =$$

$$= \frac{A_p \cos\varphi_p - A_p \cos\varphi_p}{0} = \frac{0}{0} \qquad (198)$$

c.-à-d. une valeur indéterminée. En chassant donc les dénominateurs dans la relation (197), l'indétermination du second terme se transmet à l'expression entière de l'intégrale $\left[F_p(x)\right]_{x_{p-1}}^{x_p}$ pour $n = \lambda$, ce qui montre clairement l'origine même des valeurs indéterminées des coefficients A_n et B_n, que nous nous sommes proposé de trouver.

Il est encore à observer que si la fonction à analyser était formée par des arcs de sinusoïdes de différentes périodes, c.-à-d. si λ avait des valeurs diverses, on obtiendrait pour les coefficients A_n et B_n des valeurs de la forme $\frac{0}{0}$ pour tous les harmoniques dont le nombre d'ordre n serait égal aux différentes valeurs de λ.

11.2. — *Les conditions pour obtenir des résultats exacts pour les coefficients A_n et B_n qui se présentent sous la forme indéterminée* $\frac{0}{0}$

Vu que pour lever l'indétermination des valeurs des harmoniques A_n et B_n, qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, il faut appliquer la règle de l'Hôpital, c.-à-d. effectuer la dérivation du numérateur et du dénominateur des valeurs mentionnées par rapport au paramètre n, et ensuite faire $n = \lambda$ dans les expressions résultantes, les conditions qui doivent être satisfaites pour obtenir des valeurs exactes des coefficients A_n et B_n sont les suivantes:

1) a — Lors de l'effectuation du calcul des coefficients A_n et B_n il est indispensable de ne jamais négliger parmi les termes de la forme sin *nx et* cos *nx* ceux dont la valeur est nettement zéro, comme par exemple les termes:

$$\sin n\pi \qquad \sin 2n\pi$$

car, par dérivation, ils fournissent les valeurs

$$\pi \cos n\lambda = \pm\pi \quad \text{et} \quad 2\pi \cos 2n\pi = 2\pi$$

qui sont bient différentes de zéro.

b — De même, il ne faut pas simplifier des expressions comme:

$$\sin(2\pi - \alpha)n \qquad \cos(2\pi + \alpha)n \quad \text{etc.}$$

pour lesquelles on écrit toujours, par habitude, leurs valeurs réelles:

$$-\sin n\alpha \qquad \text{resp.} \qquad \cos n\alpha$$

car, par dérivation, elles fourniraient les valeurs: $-\alpha \cos n\alpha$ resp. $-\alpha \sin n\alpha$, tandis que si l'on avait dérivé directement les expressions initiales $\sin(2\pi - \alpha)n$ et $\cos(2\pi + \alpha)n$ on aurait obtenu les valeur $(2\pi - \alpha)\cos(2\pi - \alpha)n = (2\pi - \alpha)\cos \alpha n$, resp. $-(2\pi + \alpha)\sin(2\pi + \alpha)\sin \alpha n$ qui sont bien différentes des valeurs ci-dessus: $-\alpha \cos n\alpha$ resp. $-\alpha \sin \alpha n$.

2) Après avoir obtenu *l'expression complète* des valeurs des coefficients πA_n et πB_n en observant la règle mentionneé à la pos. 1) ci-dessus, il est indispensable d'appliquer la règle de l'Hôpital, concernant ces expressions, *avant de faire n'importe quelle simplification des expressions de la même forme sin nx et cos nx* provenant de la considération du degré de parité ou d'imparité de l'ordre n de l'harmonique cherché.

En effet, si pour un terme de la forme

$$\cos n(\pi + \alpha)$$

par exemple, on procède correctement en appliquant la règle de L'Hôpital, on obtient par la dérivation de ce terme la valeur:

$$-(\pi + \alpha)\sin n(\pi + \alpha).$$

Et si maintenant, on veut s'intéresser des valeurs impaires de n on obtient la valeur définitive

$$(\pi + \alpha)\sin n\alpha = \pi \sin n\alpha + \alpha \sin n\alpha.$$

Si, au contraire, on n'observe pas la règle indiquée, en posant la condition n = impair *avant l'application de la règle de L'Hôpital, c.-à-d. avant la dérivation,* on obtient pour $\cos n(\pi + \alpha)$ la valeur $-\cos n\alpha$ qui ensuite par dérivation, fournit la valeur:

$$\alpha \sin n\alpha$$

qui est bien différente de la valeur exacte: $\pi \sin n\alpha + \alpha \sin n\alpha$.

Si l'on observe les deux règles mentionnées, ci-dessus on obtient toujours les valeurs exactes des coefficients A_n et B_n.

OBSERVATION — a) Il est à remarquer que la condition imposée à la pos. 1) ci-desus est absolument identique à celle indiquée à la page 20 et qui devait être observée afin de pourvoir déduire de l'expression du coefficient A_n *la valeur du coefficient* B_n par substitution de sin nx par $-\cos nx$ et cos nx par sin nx.

b) Il est ntéressant de remarquer ensuite, qu'il existe des cas particuliers pour lesquels l'on peut obtenir des valeurs exactes de A_n et B_n, dont les expressions se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, que l'on respecte ou non la règle indiquée à la pos. 2) ci-dessus.

Nous estimons qu'il est inutile d'insister autrement sur cet aspect particulier du problème, bien que nous l'ayons complètement élucidé, car nous recommandons d'observer rigoureusement les deux conditions imposées ci-dessus, pour éviter toute erreur possible.

11.2. — *L'analyse des exemples de calcul de la revue „Archiv für Elektrotechnik"*

Dans la lumière des considérations — très simples d'ailleurs — développées au paragraphe précédent, nous pouvons maintenant montrer, ce qui n'a pas encore été fait jusqu'à présent, les raisons pour lesquelles les trois exemples de calcul mentionnés aux pages 64-66 fournissent, l'un d'eux, un résultat inexact et les deux autres, des résultats exacts.

11.2.1. — *L'exemple de calcul de Mr. R. Feinberg* (9)

Dans son article de la revue „Archiv für Elektrotechnik" mentionné déjà à la page 30 Mr. R. Feinberg a appliqué la méthode des discontinuités à la fonction, représentée sur la fig. 8 ci-dessous, formée par 13 arcs de sinusoïdes d'équation $y = A \sin 3 (x - \psi)$, déplacés les uns par rapport aux autres de 20°. (C'est, en définitif, le cas de la transformation du courant triphasé 50 Hz en courant monophasé de 16 2/3 Hz).

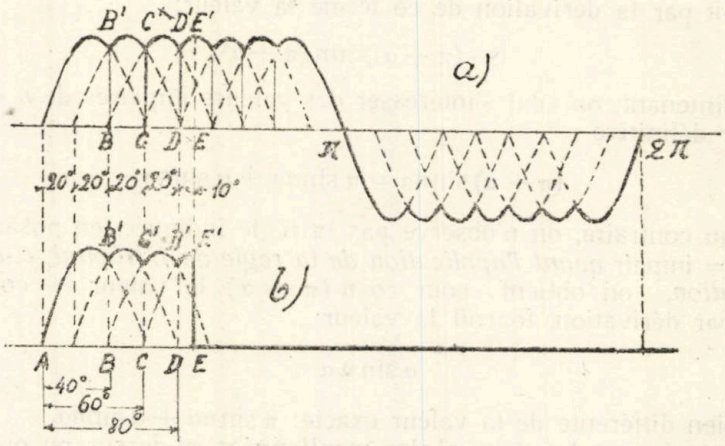


Fig. 8

En tenant compte de la double symétrie de la fonction étudiée qui, par conséquent, n'admet que des harmoniques en sinus B_n impaires, Mr. Feinberg applique la méthode des discontinuités à un quart de la fonction donnée, représentée sur la fig. 8 b, c.-à-d. entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et multipliant le résultat par 4, il obtient la valeur:

$$B_n = 4 \frac{3A}{3^2 - n^2} \left[\sin n\,40^\circ + \sin n\,60^\circ + \sin n\,80^\circ \right] \qquad (199)$$

En cherchant, ainsi que nous l'avons dit à la page 56 la valeur de l'harmonique 3, c.-à-d. de B_3, on obtient tout d'abord la valeur indéterminée $B_3 = \frac{0}{0}$ et en levant l'indétermination par l'application de la règle

de L'Hôpital, on obtient pour $n = 3$ la valeur:

$$B_3 = \frac{4A}{3}$$

qui est différente de la valeur exacte $B = \frac{A}{3}$.

L'explication extrêmement simple de ce résultat est que Mr. Feinberg a négligé tout simplement dans l'expression de B_3 le saut d'ordonnée du point E d'abscisse $x_E = \frac{\pi}{2}$ (fig. 8 b), c.-à-d. qu'il a calculé de la formule générale:

$$\pi B_n = 4 \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \sum \left[s' \sin nx - ns \cos nx \right] \qquad (200)$$

seulement la partie se rapportant aux sauts de tangente s'

$$\pi B_n = 4 \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \sum s' \sin nx \qquad (201)$$

en négligeant le terme: $ns \cos nx$.

Or, le saut d'ordonnée s au point E a la valeur

$$s_E = 0 - EE' = -A$$

et donc la contribution de ce saut à la valeur de πB_n

$$-ns \cos nx = -ns_E \cos nx_E$$

est égal à:

$$nA \cos n \frac{\pi}{2}$$

Et comme M. Feinberg savait que la fonction analysée possède seulement des harmoniques impairs, il a considéré que la valeur de $\cos n \frac{\pi}{2}$ est zéro et il a négligé par conséquent ce terme: $nA \cos n \frac{\pi}{2}$, en commettant de cette manière justement le genre d'erreur signalé à la pos. 1), page 61,

S'il n'avait pas négligé ce terme, l'expression complète de B_n donnée par la formule (200) aurait été:

$$B_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{3^2 - n^2} \left[3A (\sin n\, 40^\circ + \sin n\, 60^\circ + \sin n\, 80^\circ) + nA \cos n \frac{\pi}{2} \right] \qquad (202)$$

Si maintenant on cherche la valeur de l'harmonique B_3, en faisant $n = 3$ dans cette formule complète, on obtient tout d'abord:

$$B_3 = \frac{0}{0}$$

et si on lève l'indétermination par l'application de la règle de L'Hôpital, on obtient cette fois-ci:

$$B_3 = \frac{A}{3}$$

qui est la valeur exacte.

On voit que Mr. Freiberg a considéré de la formule complète (202), qui peut s'écrire:

$$B_n = \frac{4}{\pi}\frac{3A}{3^2 - n^2}\left[\sin n\,40^\circ + \sin n\,60^\circ + \sin n\,80^\circ\right] + \frac{4nA\cos n\frac{\pi}{2}}{\pi(3^2 - n^2)} \quad (203)$$

seulement le premier terme, qui a donné pour B_3 *la valeur inexacte* $B_3 = \frac{4A}{3}$ et il a négligé le second terme:

$$\frac{4}{3}\frac{nA\cos n\frac{\pi}{2}}{3^2 - n^2}$$

Pour $n = 3$ ce terme prend lui aussi la forme $\frac{0}{0}$ et en appliquant la règle de L'Hôpital il fournit la valeur:

$$\frac{1}{\pi}\frac{4A}{-2n}\left[\cos n\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2}\sin n\frac{\pi}{2}\right]$$

qui pour $n = 3$ devient égale à $-A$, valeur qui ajoutée à la valeur inexacte trouvée par Mr. Feinberg $\frac{4A}{3}$ fournit pour B_3 la valeur exacte:

$$B_3 = \frac{4A}{3} - A = \frac{A}{3}$$

11.2.2. — *Les exemples de calcul de Mr. A. Walther*

a) *Le premier exemple de calcul* des harmoniques qui se présentaient sous la forme $\frac{0}{0}$, traité par M. A. Walther a été celui mentionné à la page 47 fig. 6, et qui avait donné des résultats exacts parce que les valeurs des coefficients πA_n et πB_n des relations (154) et (155) étaient complètes et parce que l'on n'avait fait aucune simplification des termes de la forme $\sin nx$ et $\cos nx$ avant l'application de la règle de L'Hôpital pour lever l'indétermination. Les conditions pour obtenir des valeurs exactes étaient donc satisfaites.

b) *Le deuxième exemple de calcul de Mr. A. Walther* conerne l'analyse de la fonction représentée sur la fig. 9 et qui est constituées par la fonction partielle:

$$y = \cos^2\frac{\pi}{2\alpha}x$$

entre les abscisses $x = 0$ et $x = \alpha$ et pui est reproduite encore trois fois entre les abscisses $\pi - \alpha$ et π; π et $\pi + \alpha$; $2\pi - \alpha$ et 2π, la fonction ayant la valeur zéro entre α et $\pi - \alpha$ et entre $\pi + \alpha$ et $2\pi - \alpha$.

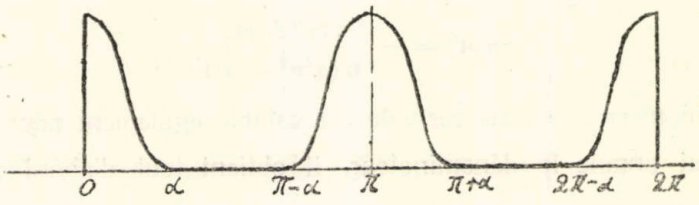


Fig. 9

En appliquant directement la méthode des discontinuités sous la forme des formules Abason-Eagle à l'analyse de cette fonction, Mr. A. Walther trouve le résultat:

$$\pi A_n = \frac{1}{n^3}\left[-\frac{\pi^2}{2\alpha^2}\sin n\alpha + \frac{\pi^2}{2\alpha^2}\sin n(\pi-\alpha) - \frac{\pi^2}{2\alpha^2}\sin n(\pi+\alpha) + \frac{\pi^2}{2\alpha^2}\sin n(2\pi-\alpha)\right]$$

$$-\frac{1}{n^5}\left[+\frac{\pi^3}{2\alpha^4}\sin n\alpha - \frac{\pi^4}{2\alpha^4}\sin n(\pi-\alpha) + \frac{\pi^4}{2\alpha^4}\sin n(\pi+\alpha) - \frac{\pi^4}{2\alpha^4}\sin n(2\pi-\alpha)\right] \qquad (204)$$

$$+\frac{1}{n^7}\left[-\frac{\pi^6}{2\alpha^6}\sin n\alpha + \frac{\pi^6}{2\alpha^6}\sin n(\pi-\alpha) - \frac{\pi^6}{2\alpha^6}\sin n(\pi+\alpha) + \frac{\pi^6}{2\alpha^6}\sin n(2\pi-\alpha)\right]$$

. . . . . .

Effectuant la somme des termes ci-dessus, on obtient pour πA_n la valeur:

$$\pi A_n = \frac{-\pi^2}{2\alpha^2 n^3}\left[\sin n\alpha - \sin n(\pi-\alpha) + \sin n(\pi+\alpha) - \sin n(2\pi-\alpha)\right]$$
$$\left[1 + \frac{\pi^2}{\alpha^2 n^2} + \frac{\pi^4}{\alpha^4 n^4} + \frac{\pi^6}{\alpha^6 n^6} + - \right] \qquad (205)$$

Mr. Walther, en traitant la série de la seconde parenthèse comme une progression géométrique décroissante, obtient pour πA_n la valeur (voir aussi page 31)):

$$\pi A_n = -\frac{\pi^2}{2n(n^2\alpha^2 - \pi^2)}\left[\sin n\alpha - \sin n(\pi-\alpha) + \sin n(\pi+\alpha) - \sin n(2\pi-\alpha)\right]$$

A ce moment, Mr. Walther considérant que la fonction analysée n'admet — à cause de sa double symétrie — que des harmoniques *pairs* A_n *en cos.*, simplifie les expressions entre parenthèses en y faisant n = pair et obtient pour πA_n la valeur:

$$\pi A_n = -\frac{2\pi^2 \sin\alpha}{n(\alpha^2 n^2 - \pi^2)} \tag{205}$$

Pour montrer que cette formule est valable également pour la valeur $n = \frac{\pi}{\alpha}$ qui annule le dénominateur, il obtient tout d'abord pour πA_n la valeur $\frac{0}{0}$ et appliquant la règle de L'Hôpital il trouve pour πA_n la valeur:

$$\pi A_n = \alpha \qquad A_n = \frac{\alpha}{\pi}$$

Ce résultat est exact, *mais accidentellement*, car en réalité le calcul de Mr. Walther comporte deux erreurs fondamentales qui dans le cas général conduisent à des résultats inexacts et dont la nature est justement celle indiquée aux pos. 1) et 2) page 61.

1) *La première erreur* commise par M. Walther est celle d'avoir négligé dans l'expression de πA_n (204) la contribution du saut d'ordonnée de l'extrémité $x = 2\pi$ de la période.

En effet, M. Walther constatant que les différents termes provenant de ce saut, que l'on trouve facilement être:

$$\frac{1}{n}\sin 2n\pi + \frac{1}{n^3}\frac{\pi^2}{2\alpha^2}\sin 2n\pi + \frac{1}{n^5}\frac{\pi^4}{2\alpha^4}\sin 2n\pi + \frac{1}{n^7}\frac{\pi^6}{2\alpha^6}\sin 2n\pi + \text{etc}$$

qu'on peut encore écrire:

$$\sin 2n\pi\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\frac{\pi^2}{2\alpha^2}\left(1 + \frac{\pi^2}{n^2\alpha^2} + \frac{\pi^4}{n^4\alpha^4} + \cdots\right)\right] =$$

$$= \sin 2n\pi\left[\frac{1}{n} + \frac{\pi^2}{2n(n^2\alpha^2 - \pi^2)}\right]$$

sont tous multipliés par $\sin 2n\pi = 0$ il n'a plus tenu compte de ces termes, commettant de cette manière l'erreur principale pos. 1a) indiquée à la page 60. Si l'on avait considéré également la contribution de ces termes, on aurait obtenu pour πA_n la valeur complète:

$$\pi A_n = -\frac{\pi^2}{2n(n^2\alpha^2 - \pi^2)}\Big[\sin n\alpha - \sin n(\pi - \alpha) + \sin n(\pi + \alpha) -$$

$$- \sin n(2\pi - \alpha)\Big] + \sin 2n\pi\left[\frac{1}{n} + \frac{\pi^2}{2n(n^2\alpha^2 - \pi^2)}\right] \tag{207}$$

Si dans cette formule on fait $n = \frac{\pi}{\alpha}$ chacun des deux termes prend la valeur $\frac{0}{0}$ et si l'on applique la règle de L'Hôpital, le premier terme fournit la valeur:

$$\alpha - \frac{\pi}{2}$$

tandis que le deuxième fournit la valeur

$$\frac{\pi}{2}$$

de sorte qu'on obtient pour πA_n:

$$\left(\pi A_n\right)_{n=\frac{\pi}{\alpha}} = \alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \alpha$$

qui est la valeur exacte.

2) La seconde erreur commise par Mr. Walther est celle d'avoir simplifié l'expression incomplète de πA_n en y faisant n = pair, *avant d'avoir procédé à la dérivation* pour appliquer la règle de L'Hôpital, commettant par cela même, le genre d'erreur indiquée par nous à la page 61 pos. 2).

L'explication que, malgré les deux erreurs commises par Mr. Walther, il ait quand même pu obtenir une valeur exacte de πA_n est due au fait que, par un simple hasard, la fonction analysée par Mr. Walther est de celles mentionnées à la page 61 pos. b), qui donnent des résultats exacts indépendemment de l'application de la règle de L'Hôpital avant ou après la simplification des fonctions trigonométriques. Dans le cas général le procédé suivi par Mr. Walther fournit des résultats inexactes.

Pour le prouver, nous allons donner les détails de l'exemple de calcul qui a formé l'objet de notre article mentionné à la page 57 et qui a déclenché l'étude de ce problème. (12)

Il s'agit de la fonction simple constituée par une sinusoïde interrompue, représentée sur la fig. 10 ci-contre, d'équation: $y = \sin x$.

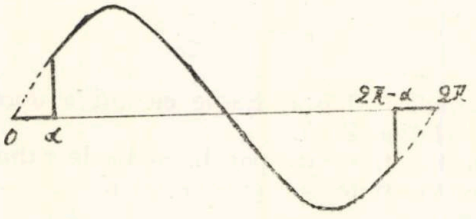


Fig. 10

En appliquant la méthode des discontinuités, nous avons obtenu pour B la valeur (que nous n'avons pas — à dessein — indiquée dans notre article en question):

$$\pi B_n = \frac{\cos\alpha \sin n\alpha - n \sin\alpha \cos n\alpha - n \sin n\alpha \cos n(2\pi - \alpha) - \cos\alpha \sin n(2\pi - \alpha)}{1 - n^2}$$

(208)

En suivant intentionnellement le procédé incorrect de Mr. Walther, nous avons simplifié les expressions de cos $n(2\pi - \alpha)$ et de sin $n(2\pi - \alpha)$ en substituant à leur places, leurs valeurs réelles: cos $n\alpha$ resp. $-$ sin $n\alpha$ et avons obtenu:

$$\pi B_n = \frac{2(\cos\alpha \sin n\alpha - n \sin\alpha \cos n\alpha)}{1 - n^2} \tag{209}$$

formule qui est exacte pour toutes les valeurs de n, sauf celle de $n = 1$. Car, pour cette valeur on obtient tout d'abord $\pi B_1 = \frac{0}{0}$ et en appliquant la règle de L'Hôpital et en faisant $n = 1$, on obtient:

$$\pi B_1 = \sin\alpha\cos\alpha - 1 \tag{210}$$

qui n'est pas la valeur exacte. (C'est seulement cette valeur que nous avons donné dans notre article (12).

L'explication réside en ce que nous avons simplifié les expressions cos $n(2\pi - \alpha)$ et sin $n(2\pi - \alpha)$ *avant la dérivation* pour appliquer la règle de L'Hôpital, contrairement à ce qu'il a été dit à la page 61 pos. 1).

Si nous avions appliqué la dérivation sur l'expression initiale (208) de πB_n qui prend elle aussi pour $n = 1$ la valeur $\frac{0}{0}$, *avant d'avoir effectué les simplifications mentionnées,* nous aurions obtenu, en levant l'indétermination:

$$\pi B_1 = \sin\alpha\cos\alpha - \alpha + \pi$$

qui est la valeur exacte.

Observation

On a vu que Mr. Walther a appliqué pour l'analyse de la fonction représentée sur la fig. 9, formée d'arcs d'équation:

$$y = \cos^2 \frac{\pi}{2\alpha} x$$

directement les formules Abason Eagle ce qui a donné lieu à la série infinie de termes (relation 204).

L'analyse s'effectue très vite par la méthode rationelle des discontinuités. Pour cela on constate que puisque'on a:

$$y = \cos^2 \frac{\pi}{2\alpha} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{\alpha} x$$

la fonction donnée fig. 9 (reproduite ci-dessous fig. 11a), se décompose en deux fonctions représentées sur la fig. 11b et 11c, dont la première (fig. 11b) comporte un arc de cosinusoïde d'équation

$$y = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{\alpha} x$$

entre $x = o$ et $x = \alpha$ et qui est reproduit encore trois fois entre les abscisses $\pi - \alpha$ et π; π et $\pi + \alpha$; $2\pi - \alpha$ et 2π et la seconde (fig. 11c) este une fonction formée par des rectangles d'hauteur, $y = \frac{1}{2}$.

Pour faire l'analyse de cette fonction composée qui ne contient que des harmoniques en cos A_n, on applique la formule (152) donnée page 45.

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 n^2} \left[n s \sin nx + s' \cos nx \right] - \frac{1}{n} \sum' s \sin nx$$

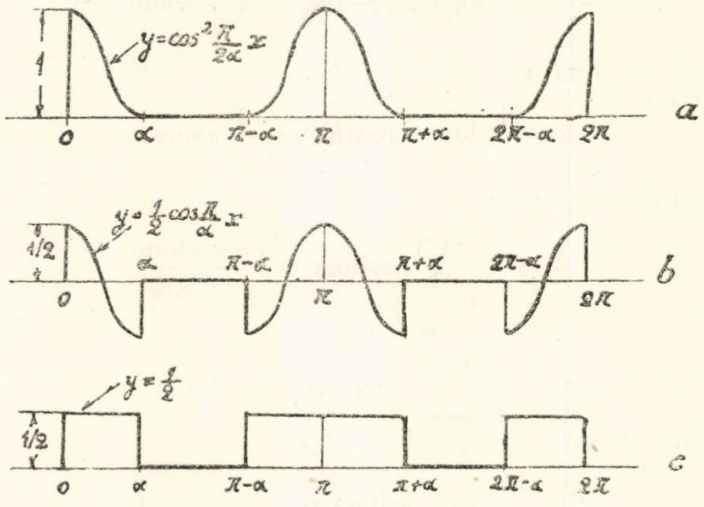


Fig. 11

Mais comme la fonction est bi-symétrique, il suffit d'analyser le quart de la fonction compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et de multiplier le résultat par quatre.

La formule ci-desus devient, en observant que $\lambda = \frac{\pi}{\alpha}$:

$$\pi A_n = 4 \frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2} - n^2} \sum \left[n s \sin nx + s' \cos nx \right] - \frac{4}{n} \cdot \sum' s \sin nx$$

le premier terme se rapportant a l'arc de cosinusoïde : $y = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{\alpha} x$ compris entre $x = o$ et $x = \alpha$ (fig. 11b) et le second à la fonction $y = \frac{1}{2}$ comprise entre $x = o$ et $x = \alpha$ (fig. 11c).

Calcul du terme $\frac{4}{\frac{\pi^2}{\alpha^2} - n^2} \sum \left[n s \sin nx + s' \cos nx \right]$ fig. 11b.

On remarque que les points de discontinuité sont $x = o$ et $x = \alpha$ et qu' en ces points la fonction ne présente que des sauts d'ordonée s, les sauts s' de tangente étant nuls. Le terme ci-desus se réduit donc à

$$4\frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2} - n^2}\sum n s \sin n x$$

Le saut au point $x = o$ est:

$$s = \frac{1}{2} \text{ donc } on\ a: \ n s \sin n x = n\frac{1}{2}\sin n o - 0$$

Le saut au point $x = \alpha$ est

$$s = \frac{1}{2} \text{ donc}: \ n s \sin n x = \frac{1}{3} n \sin n x$$

Par conséquent, on a:

$$4\frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2} - n^2}\sum n s \sin n x = \frac{2n\alpha^2 \sin n\alpha}{\pi^2 - n^2\alpha^2}$$

Calcul du terme $-\frac{4}{n}\sum' s \sin nx$ (fig. 11c).

Le saut d'ordonnée au point $x = o$ est:

$$s = \frac{1}{2} \text{ donc}: \ s \sin n x = \frac{1}{2}\sin n o = 0$$

Le saut d'ordonnée au point $x = \alpha$ est:

$$s = -\frac{1}{2} \text{ donc}: \ s \sin n x = -\frac{1}{2}\sin n\alpha$$

Par conséquent on a:

$$-\frac{4}{n}\sum' s \sin n x = \frac{2\sin n\alpha}{n}$$

Pour la fonction entière on aura:

$$\pi An = \frac{2n\alpha^2 \sin n\alpha}{\pi^2 - n^2\alpha^2} + \frac{2\sin n\alpha}{n}$$

$$\pi An = \frac{2\pi^2 \sin n\alpha}{n(\pi^2 - n^2\alpha^2)}$$

qui est la valeur exacte.

On voit que si Mr. Walther avait appliqué la méthode des discontinuités même sous la forme des formules Abason-Eagle, seulement à un

quart de période, ainsi que nous l'avons fait ici, il aurait obtenu le même résultat, exact, sans, toutefois, avoir commis les deux érreurs mentionnées à la page 60.

Nous remarquerons enfin que l'explication du fait que la méthode des discontinuités a pu s'appliquer à l'analyse de la fonction $y = \cos^2 \frac{\pi}{2\alpha} x$ représentant le carré d'une fonction sinusoïdale, réside en ce que cette fonction est justement décomposable en une fonction simple sinusoïdale et un terme constant: $y = \cos^2 \frac{\pi}{2\alpha} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{\alpha}$ pour lesquels la méthode des discontinuités s'applique immédiatement.

Si la fonction avait été une puissance supérieure d'une sinusoïde, par exemple $y = \cos^3 x$ qui n'est pas décomposable en fonctions sinusoïdales simples, les formules Abason-Eagle de la méthode des discontinuités n'auraient pas pu s'appliquer.

12. OBSERVATIONS SUR LES EXPLICATIONS DONNEES DANS LA REVUE „ARCHIV FUR ELEKTROTECHNIK" (16) CONCERNANT L'OBTENTION DES VALEURS INEXACTES DES COEFFICIENTS A_n ET B_n AYANT LA FORME INDETERMINEE

Ainsi que nous l'avons dit à la page 57 Mr. le Prof. T. Zech, de l'Institut de Mathématiques de Darmstadt, a étudié ce problème dans la revue „Archiv für Elektrotechnik" de 1942. Il s'occupe de l'exemple de Mr. R. Feinberg, que nous avons traité à la page 52 mais au lieu d'effectuer le calcul pour un quart de période de la fonction donnée fig. 8b page 62.) ainsi qu'avait fait Mr. Feinberg lui-même, Mr. Zech applique la méthode des discontinuités sur toute la fonction comprise entre 0 et 2 π (ce qui n'était pas nécessaire) et donne le résultat sous la forme:

$$\pi B_n = \frac{3A}{3^2 - n^2} \left| \sum_{x=40^\circ}^{x=140^\circ} \sin nx - \sum_{x=220^\circ}^{x=320^\circ} \sin nx \right| \qquad (211)$$

En cherchant l'harmonique B_n pour $n = 3$, il obtient tout d'abord la valeur indéterminée $B_3 = \frac{0}{0}$ et en appliquant la règle de L'Hôpital, il obtient la valeur:

$$\pi B_3 = -\frac{2A}{3} \qquad (212)$$

qui n'est pas la valeur exacte

Pour expliquer ce résultat, Mr. Zech fait appel à la théorie des fonctions, cherchant à trouver une lacune dans la théorie de Mr. Walther (voir page 55.) à la suite de quoi il a affirmé que les formules de calcul des harmoniques obtenues par l'application de la méthode des discontinuités sont valables pour n'importe quelles valeurs de n et donc également pour celles qui fournissent des valeurs indéterminées $\frac{0}{0}$.

En cherchant cette lacune, Mr. Zech trouve que le principe du „prolongement analytique" qui est à la base de la théorie de Mr. Walther ne peut être rigoureusement employé que si l'on tient compte également des valeurs fractionnaires de n et que, par conséquent, des termes comme $\sin 2n\pi$, qui apparaissent aux „intégrations partielles" lorsqu'on déduit les formules de la méthode des discontinuités, *et qui sont dues aux extrémités de la période* $x = 0$ et $x = 2\pi$, *ne doivent pas être réduites, c.-à-d. égalées à zéro.*

En conclusion, *M. Zech affirme que si aux formules Abason-Eagle on ajoute également les discontinuités des points* $x = 0$ *et* $x = 2\pi$, *on obtient le résultat correct.* Et pour le cas étudié, Mr. Zech calcule les discontinuités aux points $x = 0$ et $x = 2\pi$ de la fonction de l'exemple de M. Feinberg (fig. 8a) en appliquant les formules non rationnelles Abason-Eagle et obtient:

$$\begin{aligned} f(+0) &= 0 & -f(2\pi-0) &= 0 \\ f^{I}(+0) &= +3A & -f'(2\pi-0) &= -3A \\ f^{II}(+0) &= 0 & -f^{II}(2\pi-0) &= 0 \\ f^{III}(+0) &= -3^3A & -f^{III}(2\pi-0) &= +3^2A \end{aligned} \tag{213}$$

de sorte que la contribution à la valeur de πB_n est donnée sous la forme de l'expression:

$$A \sin 2\pi n \left[\frac{3}{n^2} + \frac{3^3}{n^4} + \frac{3^5}{n^6} + \cdots\right] \tag{214}$$

valable nous dit M. Zech pour $n > 3$ (ce qui n'est pas exact, l'expression étant aussi valable pour $n < 3$, d'après ce que nous avons démontré page 32 et suivantes).

Le terme $A \sin 2n\pi \dfrac{3}{n^2-9}$ prend pour $n = 3$ la valeur $\dfrac{0}{0}$ et en levant l'indétermination, Mr. Zech obtient la valeur supplémentaire πA pour πB_3 et donc A pour B_3 laquelle ajoutée à la valeur inexacte trouvée initialement $-\dfrac{2A}{3}$ fournit la valeur exacte

$$B_3 = -\frac{2A}{3} + A = \frac{A}{3}. \tag{216}$$

Les objections les plus importantes à faire concernant les explications données par M. Zech sont les suivantes:

1. Il n'était nullement besoin de faire appel à la théorie des fonctions, ni de chercher une lacune dans la théorie de M. Walther pour expliquer le résultat inexact mentionné. L'explication, extrêmement simple, est celle que nous avons déjà donnée pour les exemples de Mr. Feinberg page 63 et de Mr. Walther page 66 et notamment que Mr. Zech a négligé, lui aussi, de tenir compte (comme ayant la valeur zéro) de la contribution du saut de tangente $s' \sin nx$ à l'extrémité de la période, c.-à-d. au point d'abscisse $x = 2\pi$, dont la valeur est:

$$s' \sin nx = -A \sin 2n\pi \tag{217}$$

la formule complète étant donc:

$$\pi B_n = \frac{3A}{3^2 - n^2}\left[\sum_{x=40^0}^{x=140^0} \sin nx - \sum_{x=220^0}^{x=320^0} \sin nx - \sin 2n\pi\right] \qquad (218)$$

c.-à-d. que la somme $\sum_{x=120^0}^{x=320^0} \sin nx$ aurait dû être étendue jusqu'à 360°,

la relation (218) pouvant s'écrire:

$$\pi B_n = \frac{3A}{3^2 - n^2}\left[\sum_{x=40}^{x=140} \sin nx - \sum_{x=220}^{x=360^0} \sin nx\right] \qquad (219)$$

Si l'on fait $n = 3$ dans la relation complète (218) ou (219) on trouve $\pi B_n = \frac{0}{0}$ et en appliquant la règle de L'Hôpital, on obtient pour B_n la valeur exacte:

$$B_n = \frac{A}{3}$$

2. D'ailleurs, toutes les considérations faites par Mr. Zech dans son article ont abouti à la conclusion que les formules Abason-Eagle (relation (4) et (5) doivent être complétées par les discontinuités des extrémités de la période. Mais cette chose n'a plus besoin de démonstration, car elle constitue une prémisse pour la méthode des discontinuités qui, ainsi que nous l'avons dit page 11 s'applique à tous les points de discontinuité, y compris les extrémités $x = 0$ et $x = 2\pi$, qui font partie intégrante de la fonction à analyser.

3. En suivant toujours cette idée des discontinuités de l'extrémité de la période, M. Zech affirme que le premier exemple de Mr. Walther de la fig. 6, page 47, a donné des résultats exacts en levant l'indétermination par la règle de L'Hôpital, *parce que les discontinuités de l'extrémité de la période sont nulles* et donc elles n'ajoutent rien à la valeur des harmoniques (relations (154) et (155). Cette affirmation est inexacte, ce que l'on peut constater immédiatement sur l'exemple de calcul que nous avons développé à la page 67 fig. 10 et pour lequel nous avons obtenu une valeur inexacte de B_1, bien que les discontinuités des extrémités de la période soient également nulles, ce qui montre qu'elles ne jouent aucun rôle pour ces deux cas.

L'exemple de Mr. Walther (page 47 fig. 6) relations (154) et (195) a donné des résultats exacts pour la raison que nous avons indiquée à la page 64 et notamment parce que l'on n'avait fait sur l'expression de πA_n et πB_n (relations (154) et (155) aucune simplification des fonctions trigonométriques avant la dérivation, tandis que notre exemple page 67 a donné un résultat inexact, justement parce que nous avions fait de telles simplifications, en suivant l'exemple de Mr. Walther, avant la dérivation.

4. De tout ce qui précède, on constate que les explications de M. Zech n'ont pas porté sur la vrai fond du problème qui est celui indiqué aux pages 62-71 et par conséquent il n'a pas pu montrer pourquoi les deux exemples de Mr. Walther ont donné des résultats exacts, bien que pour l'un d'eux le procédé suivi soit incorrect et doive être nécessairement évité.

C'est pourquoi, nous pensons que les explications, que nous avons données, mettent définitivement au point le problème en question.

13. LE CALCUL PAR LA METHODE DES DISCONTINUITES DU TERME CONSTANT $A_0/2$ DU DEVELOPPEMENT EN SERIES FOURIER

On sait que le développment en série Fourier d'une fonction périodique $f(x)$ peut se mettre sous la forme:

$$f(x)=\frac{A_o}{2}+\sum A_n\cos nx+\sum B_n\sin nx \tag{220}$$

le terme constant $\frac{A_o}{2}$ étant défini par la relation:

$$\frac{A_o}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \qquad \text{et donc} \quad A_o=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \tag{221}$$
$$\tag{222}$$

c.-à-d. le terme A_0 étant assimilé à un harmonique A_n en cosinus d'ordre $n=0$.

Comme jusqu'à présent, on n'a pas indiqué la manière de calcul de ce terme à l'aide de la méthode des discontinuités, nous pensons qu'il est utile d'en déduire la formule.

En appliquant le même procédé de calcul que pour les coefficients A_n et B_n, c.-à-d. en utilisant la relation (223) ci-dessous (similaire à la relation (47) page 12) que l'on peut déduire facilement par une succession de dérivations par parties

$$F_p(x)=\int f_p(x)dx=xf_p(x)-\frac{1}{2!}x^2f'_p(x)+\frac{1}{3!}x^3f''_p(x)-\frac{1}{4!}x^4f'''_p(x)+-\ldots \tag{223}$$

et en utilisant ensuite notre formule de la méthode des discontinuités généralisée (42) page 11.

$$\pi A_o=\int_0^{2\pi} f(x)dx=\sum\left[F_p(x_p)-F_{p+1}(x_p)\right] \tag{224}$$

on obtient la formule définitive:

$$\pi A_o=-\frac{1}{1!}\sum xs+\frac{1}{2!}\sum x^2s'-\frac{1}{3!}\sum x^3s''+\frac{1}{4!}\sum x^4s'''-+\cdots \tag{225}$$

dans laquelle s, s' s'' etc sont les sauts définis comme pour les formules Abason-Eagle(4) et (5), le signe Σ se rapportant également à tous les points de discontinuité de la fonction où celle-ci présente des sauts.

En ce qui concerne les fonctions sinusoïdales, on peut calculer immédiatement le terme A_0 en faisant $n = 0$ dans la formule du coefficient A_n:

$$\pi A_n = \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \Sigma(ns\sin nx + s'\cos nx)$$

On obtient donc:

$$\pi A_o = \frac{\Sigma s'}{\lambda^2}$$

formule qui a été donnée également par Mr. Feinberg.

14. RÉCAPITULATION ET CONCLUSIONS

1. a) Pour le calcul des coefficients Fourier A_n et B_n d'une fonction périodique qui présente des discontinuités, étant formée par une succession de fonctions partielles représentées par des segments de droite ou par des arcs de parabole d'un ordre quelconque, on peut utiliser avec beaucoup de succès la méthode des discontinuités, par l'application des formules Abason-Eagle (relation (4) et (5):

$$\pi A_n = -\frac{1}{n}\sum s\sin nx - \frac{1}{n^2}\sum s'\cos nx + \frac{1}{n^3}\sum s''\sin nx +$$

$$+ \frac{1}{n^4}\sum s'''\cos nx - \frac{1}{n^5}\sum s^{IV}\sin nx - \frac{1}{n^6}\sum s^{V}\cos nx + + - - \cdots$$

$$\pi B_n = \frac{1}{n}\sum s\cos nx - \frac{1}{n^2}\sum s'\sin nx - \frac{1}{n^3}\sum s''\cos nx +$$

$$+ \frac{1}{n^4}\sum s'''\sin nx + \frac{1}{n^5}\sum s^{IV}\cos nx - \frac{1}{n^6}\sum s^{V}\sin nx - + + \ldots$$

le signe Σ s'étendant à tous les points de discontinuité d'abscisses x où la fonction présente les sauts s, s', s'' etc., y compris les extrémités de la période $x = 0$ et $x = 2\pi$.

b) Pour le calcul du terme constant $\frac{A_o}{2}$ du développement en série Fourier, on peut utiliser la formule de l'auteur (relation 225)

$$\pi A_o = -\frac{1}{1!}\sum xs + \frac{1}{2!}\sum x^2 s' - \frac{1}{3!}\sum x^3 s'' + \frac{1}{4!}\sum x^4 s''' - + \cdots \text{ etc.}$$

s, s', s'', s''' et Σ ayant les mêmes significations que ci-dessus

2. Comme méthode de vérrification des calculs effectués par la méthode des discontinuités on recommnde — en dehors de la méthode

classique d'intégration qui est beaacoup plus compliquée — *la nouvelle méthode des intervalles* de l'auteur, c.-à-d. les formules :

$$\pi A_n = \frac{1}{n}\sum\left[y\sin nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^2}\sum\left[y'\cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} - \frac{1}{n^3}\sum\left[y''\sin nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

$$- \frac{1}{n^4}\sum\left[y'''\cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^5}\sum\left[y^{IV}\sin nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} +$$

$$+ \frac{1}{n^6}\sum\left[y^{V}\cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} \cdots$$

$$\pi B_n = -\frac{1}{n}\sum\left[y\cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^2}\sum\left[y'\sin nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} +$$

$$+ \frac{1}{n^3}\sum\left[y''\cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} - \frac{1}{n^4}\sum\left[y'''\sin nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} -$$

$$- \frac{1}{n^5}\sum\left[y^{IV}\cos nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} + \frac{1}{n^6}\sum\left[y^{V}\sin nx\right]_{x_{p-1}}^{x_p} \cdots$$

$y^{(K)}$ étant la dérivée d'ordre K de la fonction $f_p(x)$ de l'intervalle $x_{p-1} - x_p$, le signe Σ se rapportant à tous les intervalles $x_{p-1} - x_p$ entre $x = 0$ et $x = 2\pi$.

3. *Observations aux pos. 1 et 2 ci-dessus.*

a) Les formules de la méthode des discontinuités et de la nouvelle méthode des intervalles dérivent des formules plus générales de l'auteur (relations (42) et (41) page 11) :

$\pi A_n,\ \pi B_n = \Sigma[F_p(x_p) - F_{p+1}(x)]$ pour la méthode des discontinuités

$\pi A_n,\ \pi B_n = \Sigma[F_p(x_p) - F_{p(p-1)}]$ pour la nouvelle méthode des intervalles

et ont à la base des formules d'intégration par parties des intégrales indéfinies (relations (47) et (53).

$$\int f_p(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{n} f_p(x)\sin nx + \frac{1}{n^2} f'(x)\cos nx - \frac{1}{n^3} f_p''(x)\sin nx -$$

$$- \frac{1}{n^4} f_p'''(x)\cos nx + + \cdots$$

$$\int f_p(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n} f_p(x)\cos nx + \frac{1}{n^2} f'(x)\sin nx + \frac{1}{n^3} f_p''(x)\cos nx -$$

$$- \frac{1}{n^4} f_p'''(x)\sin nx - + + \cdots$$

b) Par conséquent, les formules Abason-Eagle, ne constituent pas une nouvelle méthode d'intégration des expressions de la forme :

$$\int f(x) \begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix} dx$$

ainsi qu'a affirmé L. W. B. Jolley, mais représentent un très intéressant artifice de calcul qui s'applique seulement aux fonctions intégrables par parties et spécialement aux fonctions paraboliques.

c) La méthode des discontinuités peut s'appliquer aussi aux fonctions qui ne sont pas intégrables par parties, mais seulement sous la forme générale donnée par l'auteur :

$$\pi A_n\,,\ \pi B_n = \Sigma [F_p(x_p) - F_{p+1}(x_p)]$$

d) Il est à remarquer qu'aussi bien pour les formules Abason-Eagle que pour les formules de la nouvelle méthode des intervalles de l'auteur, la valeur du coefficient πB_n peut se déduire de la valeur de πA_n en y substituant les expressions sin nx et cos nx par $-\cos nx$ resp. sin nx à condition que soit observée avec rigueur la règle mentionnée page 20.

3. En ce qui concerne l'application des formules Abason-Eagle aux fonctions sinusoïdales, il a été démontré que :

3.1. — On n'obtient pas de séries d'un nombre infini de termes, ainsi que l'ont affirmé différents mathématiciens et ingénieurs, y compris les deux auteurs de la méthode des discontinuités et donc le problème de la nécésité de la convergence de ces séries ne se pose pas.

3.2. — Il n'y a plus de raison d'appliquer les formules Abason-Eagle, telles quelles au fonctions sinusoïdales car on répète inutilement, chaque fois, les mêmes dérivations successives qui fournissent les séries mentionnées et qui donnent naissance à des situations absurdes concernant la valeur de la somme de ce séries.

3.3. — Dans ces cas, on doit adopter l'utilisation des formules rationneles tant de la méthode des discontinuités que de la nouvelle méthode des intervalles, qui contiennent seulement les sauts d'ordonnée s et de tangente s' resp. les ordonnées y' et les dérivées y' des fonctions partielles et notamment :

La méthode rationnelle des discontinuités :

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \left[ns \sin nx + s' \cos nx \right]$$

$$\pi B_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \left[s' \sin nx - ns \cos nx \right]$$

La nouvelle méthode des intervalles :

$$\pi A_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \left[ny \sin nx + y' \cos nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

$$\pi B_n = \sum \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \left[y' \sin nx - ny \cos nx \right]_{x_{p-1}}^{x_p}$$

Cette dernière méthode constitue — ainsi qu'il a été le cas pour les fonctions paraboliques — un bon moyen de vérifier les calculs effectués par la méthode rationnelle des discontinuités.

Observation :

Les formules ci-dessus supposent que toutes les fonctions partielles $f(x)$ sont des sinusoïdes d'équation $f_p(x) = A_p \cdot \sin(\lambda x - \varphi_p)$ [(*ou* $f_p(x) = A_p \cos)\lambda x - \varphi_p)$] symétriques par rapport à l'axe des abscises.

Pour les sinusoïdes déplacées par rapport à ce même axe, d'équation $f_p(x) = C_p + A_p \cdot \sin(\lambda x - \varphi_p)$ il faut employer les formules 152 et 153 (page 47).

4. En ce qui concerne le problème des valeurs indéterminées de la forme $\frac{0}{0}$ qu'on obtient pour les harmoniques dont l'ordre de grandeur $n = \lambda$ annule le dénominateur des expressions de A_n et de B_n, il a été démontré que pour obtenir des valeurs exactes lorsqu'on lève l'indétermination, il est indispensable d'appliquer le procédé correct souligné à la page 70 qui consiste à ne pas faire de simplifications concernant les fonctions trigonométriques sin *nx* et cos *nx*, qui figurent dans les expressions des coefficients A_n et B_n, avant d'appliquer la règle de L'Hôpital.

Le Laboratoire de Mesures Electriques
Institut Polytechnique Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

I. Ondracek. — Ein neues Verfahren zur harmonischen Analyse, Electrotehnik und Maschinenbau, Vol. XXVIV (1916) pg. 609—613, 627—628, 633—635.

Traian Lalescu. — Sur les fonctions polygonales périodiques Rev. Gén. de l'Electricité, Vol. 5 (1919) pg. 43—45.

E. Abason. — Asupra determinării pe cale grafică a armonicilor unei funcțiuni periodice, Gazeta Matematică, Vol. 26 (1920), pg. 81—85, 105—108.

A. Eagle — A practical treatise on Fourier's theorem and harmonic analysis, Longman Green and Co., London, England 1925.

E. Abason. — Contributions à l'étude du coefficient de déformation des fonctions non-sinusoïdales. Application d'une nouvelle méthode pour la décomposition d'une fonction périodique dans ses harmoniques, Institut National Roumain pour l'étude de L'aménagement et de l'utilisation des sources d'énergie, No. 6 Bucarest 1927.

L. B. W. Jolley. — Alternating current rectification and allied problems, Chapman and Hall, London, England 1928.

G. Köhler und A. Walther. — Fourierische Analyse von Funktionen mit Sprüngen, Ecken und ähnlichen Besondernheiten, Archiv für Elektrotehnik, Vol. 25 (1931), pg. 747—758.

E. Abason. — Notice sur une méthode analytique et graphique pour l'analyse des harmoniques des fonctions périodiques, Bulletin de Mathématiques et de Physique de l'Ecole Polytechnique, Bucarest, Vol. 3 (1932), pg. 15—19.

R. Feinberg. — Bemerkung zur der Arbeit von G. Köhler und A. Walther über die „Fourierische Analyse von Funktionen mit Sprüngen, Ecken and ähnlichen Besonderheiten", Archiv für Elektrotechnik, Vol. 27 (1933) pg. 19—20.

R. Feinberg. — Fourier-Analyse von Kurvenzügen, die stückweise aus Ausschnitten von Sinuslinien zusammengesetzt sind, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 14 (1934) pg. 311.

Al. Th. Popesco. — Sur l'application de la méthode des discontinuités à l'analyse harmonique des fonctions sinusoïdales, Bull. de Math. et de Phys. de l'Ecole Polytechnique, Bucarest, 9 (1937—38) No. 1, 2, 3, Fasc. 25, 26, 27, pg. 83—85.

Al. Th. Popesco. — Note sur les formules de M. E. Abason pour l'analyse harmonique de période quelconque, par la méthode des discontinuités, Bull. de Math. et de Phys. de l'Ecole Polytechnique, Bucarest, 9 (1937—38), No. 1, 2, 3, Fasc. 25, 26, 27, pg. 81—82.

H. Jordan und K. Schönbacher. — Graphische Fourieranalyse, A. E. G., Mitteilungen, (1940), pg. 107.

A. Walther und K. Brinkmann. — Zum Sprungstellen-Verfahren insbesondere für die Entwicklung nach Kugelfunktionen, Ingenieur-Archiv. 13 (1942) pg. 1.

J. Zech. — Uber das Sprungstellen-Verfahren für harmonische Analyse, Archiv für Elektrotechnik, Vol. 36 (1942) pg. 332—

Karl Klotter (Letter from). — A simplified procedure for finding Fourier Coeticients, Proceedings of the I. R. E., July 1957.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РАЗРЫВНОСТЕЙ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(краткое содержание)

В этой статье автор подвергает подробной критике метод разрывностей Лалеско—Абасона—Игля для гармонического анализа периодических функций и дает новое, более общее его изложение, показывающее как настоящую природу этого метода, так и причины огромных его преимуществ, по сравнению с классическим методом интегрирования для каждого интервала между двумя точками разрыва.

Даются новые формулы для метода интервалов, могущие успешно служить для проверки расчетов, полученных посредством метода разрывностей.

Автор изучает затем ошибки, допущенные при применении метода разрывности к синусоидальным функциям, впервые объясняет причины возникновения этих ошибок и указывает правильный и рациональный способ ведения вычислений.

Несколько численных примеров позволяют наглядно показать соображения, изложенные в статье и, вместе с тем показать лицам, которые еще не знакомы с методом разрывностей, способ его применения.

ON THE APPLICATION OF THE METHOD OF DISCONTINUITIES FOR THE HARMONIC ANALYSIS OF THE PERIODIC FUNCTIONS

(Summary)

In this paper the author submits to a detailed critical review the method of discontinuities Lalesco-Abason-Eagle in view of the harmonic analysis of the periodical functions of which he makes a more general survey, showing both the real nature of this method and the reasons of the great advantages it presents as compared to the classic method of integration for each interval between two points of dicontinuity.

The new formulas of the method of intervals presented may serve successfully for checking the computations made by using the method of discontinuities.

The author then investigates the errors made by applying the method of discontinuities to sinusoïdal functions, explains for the first time the causes of these errors and indicates a rational and correct mode of performing the computations.

Some examples of computation illustrate the considerations made in this paper and at the same time show to those who are not yet acquainted to the method of discontinuities how to apply it.

SUR L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DES DISCONTINUITÉS POUR L'ANALYSE HARMONIQUE DES FONCTIONS PÉRIODIQUES

(Résumé)

Dans cet article, l'auteur soumet à une analyse critique la méthode des discontinuités Lalesco-Abason-Eagle pour l'analyse harmonique des fonctions périodiques, dont il fait un nouvel exposé, plus général, qui montre aussi bien la vraie nature de cette méthode que les raisons des grands avantages qu'elle présente par rapport à la méthode classique d'intégraiton pour chaque intervalle entre deux points de discontinuité.

De nouvelles formules de la méthode des intervalles sont présentées, qui peuvent servir avec succès à la vérification des calculs faits avec la méthode des discontinuités.

L'auteur étudie ensuite les erreurs qui ont été commises dans l'application de la méthode des discontinuités aux fonctions sinusoïdales, explique pour la première fois les causes de ces erreurs et indique le procédé rationnel et correct pour effectuer les calculs.

Quelques exemples de calcul permettent d'illustrer les considérations faîtes au courant de cet article et de montrer en même temps, à ceux qui ne connaissent pas encore la méthode des discontinuités, la manière dont elle s'applique.

UBER DIE ANWENDUNG DER DISKONTINUITÄTEN METHODE FÜR DIE HARMONISCHE ANALYSE DER PERIODISCHEN FUNKTIONEN

(Zusammenfassung)

Im vorlegenden Aufsatz unterzieht der Verfasser die Diskontinuitätenmethode Lalesco-Abason-Eagle für die harmonische Analyse der periodischen Funktionen mit Sprüngen, Ecken und ähnliche Besonderheiten, einer ausführlichen Kritik, wobei er eine neue allgemeinere Darlegung der Methode bringt, in der sowohl deren Wesen als auch die Gründe ihrer grossen Vorzügen gegenüber der klassischen Integrationsmethode gezeigt wird.

Die neuen, vom Verfasser vorgeschlagenen, Formeln der Intervalen methode können erfolgreich für die Uberprüfung der mit der Diskontinuitätenmethode ausgeführten Berechnungen dienen.

Der Verfasser untersucht alsdann die bei Anwendung der Diskontinuitätenmethode für Sinusoidalfunktionen begangenen Fehler, erklärt erstmalig die Gründe dieser Felher und bietet ein rationales und korrektes Verfahren zur Ausführung der Rechnungen dar.

Einige Rechnungsbeispiele veranschaulichen die im Aufsatz gemachten Erwägungen und zeigen gleichzeitig den mit der Diskontinuitätenmethode noch nicht Vertrauten, die Art ihrer Anwendung an.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

621.316

EIN BEITRAG ZUR FRAGE DER NETZUMWANDLUNGEN

von MARIUS PREDA

Eine Methode zur Vereinfachung der Berechnung und Betrachtung komplizierter elektrischer Kreise ist die Netzumwandlung der elektrischen Kreise. Diese Methode, welche im allgemeinen im Ersatz des Schemas eines Teiles des Stromkreises durch ein anderes äquivalentes Schema besteht, ermöglicht meistens nicht nur die Vereinfachung der Berechnungen, sondern auch eine anschauliche Lösung der Stromkreise. Die Vorteile der Methode bestehen in der Tatsache dass, durch eine passende Auswahl der Netzumwandlungen, die Zahl der Knoten oder Seiten in dem Netz herabgesetzt wird ; folglich vermindert sich auch die Zahl der Gleichungen welche seinen elektrischen Zustand beschreiben.

Definitionsgemäss müssen die äquivalenten Schemas die Anfangsschemas so ersetzen, dass sich der sonstbeliebige elektromagnetische Zustand des Stromkreises im Äusseren des ersetzen Teiles nicht ändern soll.

Im ersten Teil des Berichtes wird gezeigt, dass man durch passende Anwendung des Überlagerungssatzes die Beweise der Grundverhältnisse der Netzumwandlung Stern-Vieleck beträchtlich vereinfachen kann.

Im zweiten Teil des Berichtes wird die Frage der Beseitigung magnetischer Kopplungen untersucht. Diese Frage besteht in der Netzumwandlung der Schemas welche magnetische Kopplungen enthalten, in äquivalente Schemas ohne oder mit weniger Kopplungen. Die Beseitigung der Kopplungen ermöglicht häufig die Vereinfachung des Studiums der elektrischen Stromkreise [1, 2, 3].

Ausser der bekannten Beseitigung der Kopplungen für Serien-und Paralellschaltung, sowie für Stern mit drei Strahlen oder Dreieck [2, 4], ist in der Literatur auch die Netzumwandlung des aktiven Stromkreises in Stern, mit inneren und äusseren magnetischen Kopplungen, in einen Stromkreis in aktivem Vieleck ohne innere magnetische Kopplungen gelöst [5,6]. E. V. Zeliah hat auch eine Methode zur Beseitigung der magnetischen Kopplungen ausgearbeitet, welche auf der Anwendung des äquivalenten allgemeinen Schemas des Transformators fusst [7].

In der vorliegenden Untersuchung wird eine Methode zur gleichzeitigen Beseitigung einer belibigen Zahl magnetischer Kopplungen, durch Netzumwandlung eines Stromkreises in vollständigen aktivem Vieleck mit inneren magnetischen Kopplungen, in einen Stromkreis in aktivem Vieleck ohne innere magnetische Kopplungen ausgearbeitet.

Als Verallgemeinerung werden in Übergangsbetrieb gültige Netzumwandlungen betrachtet; es wird die Operatorenrechnung herangezogen,

wobei mit I, bezüglich U, die Bilder der Ströme, bezüglich der Spannungen, und mit und Y und Z die operationellen Admittanzen, bezüglich Impedanzen, bezeichnet werden.

1. DIE NETZUMWANDLUNG STERN-VIELECK IN ABWESENHEIT MAGNETISCHER KOPPLUNGEN

Die Ströme I_k welche durch die Spitze k des Vielecks, bezüglich des Sternes mit n Spitzen, einfliessen (Bild 1a bzw. 1 b), sind — für einen linearen passiven Stromkreis — lineare Funktionen der Spannung zwischen den Spitzen.

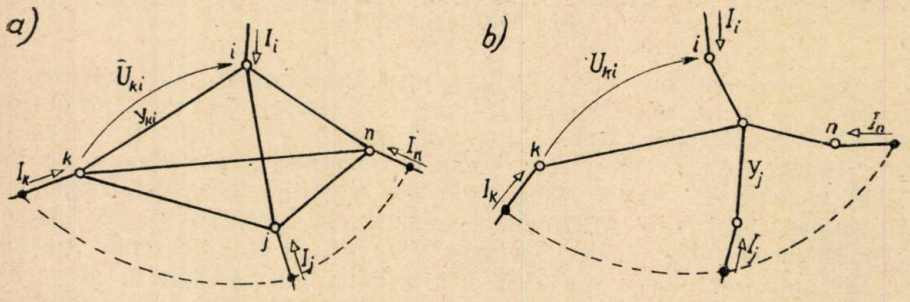


Bild 1. Die Netzumwandlung Stern - Vieleck *a*) Stromkreis in vollständigen Vieleck mit $n = 4$ Spitzen und Admittanzschenkel *b*) Stromkreis in Stern mit $n = 4$ Spitzen und Admittanzschenkel

Diese Spannungen, ihrerseit, können in Abhängigkeit von den n-1 unabhängigen Spannungen zwischen einer Spitze und allenandere Spitzen ausgedrückt werden. Es folgt aus dem Überlangerungssatz dass, damit die beiden Schemas äquivalent sein sollen, bei beliebigen Spannungen U_{kj} zwischen zwei Spitzen k und j, diese Ströme gleich sein sollen; dazu ist es erforderlich und genügend einen und denselben Strom I_k ($k = 1, 2, \ldots n$) für Stern und Vieleck zu haben, wenn je eine der Spannungen eines unabhängigen Spannungssystems verschieden von Null ist, also $U_{kj} = 0$, für $j \neq i$. In diesem Fall, haben wir für das Vieleck und für den Stern (wo dieser Fall der Serienverbindung des Zweiges i mit der Gruppe der parallelgeschalten Zweigen $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ entspricht) :

$$I_k = Y_{ki} U_{ki} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ i = 1, 2, \ldots, n, \end{matrix} \tag{1}$$

$$I_k = \frac{Y_i \sum_{j \neq i} Y_j}{Y_i \sum_{j \neq i} Y_j} U_{ki} \cdot \frac{1}{\sum_{j \neq i} Y_j} \cdot Y_k = \frac{Y_i Y_k}{\sum_j Y_j} U_{ki} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} k = 1,2, \ldots, n \\ i = 1,2, \ldots, n, \end{matrix} \tag{2}$$

folglich sind die Äquivalenzbedingungen :

$$Y_{ki} = \frac{Y_k Y_i}{\sum_{j=1}^{n} Y_j}, \tag{3}$$

welche für beliebige Werte k und i, dem Verhältnis $k \neq i$ entsprechend, gültig sind. Diese Gleichung (3) ermöglicht die Berechnung der Admittanz der Stromkreisseiten im vollständigen n — Eck, äquivalent mit einem gegebenen Stromkreis in n — Eckstern.

Bezüglich der Netzumwandlung der aktiven Stromkreise oder mit äusseren magnetischen Kopplungen muss bemerkt werden, dass für diese Stromkreise die Frage der Netzumwandlung Stern-Vieleck auf das vorige zurückgeführt werden kann. Zu diesem Zweck, muss man die entsprechenden elektromotorischen Spannungen in die Schenkel, im Äusseren des umzuwandelnden Teiles versetzen, und, nach Umwandlung, wieder in das äquivalente Vieleck, auf Grund des Satzes von Vaschy, einführen.

In dieser Weise folgt für die elektromotorische Spannung aus dem Schenkel kj des äquivalenten Vielecks:

$$E_{kj} = E_k - E_j \,, \tag{4}$$

wobei E_k und E_j die elektromotorischen Spannungen in den Schenkeln (k, *bzw.* j) des Stromkreises in Stern sind; die Gleichung ist für beliebige Werte von k und j gültig, gestattet also die Berechnung sämtlicher elektromotorischen Spannungen aus dem äquivalenten Schema in vollständigem Vieleck.

Fur die Impedanzen der äusseren magnetischen Verkettungen mit einen äusseren Schenkel m, erfolgt entsprechend (auf Grund des Kompensationsatzes)

$$Z_{kj}^{m} = Z_{k}^{m} - Z_{j}^{m} \,, \tag{5}$$

und es ist leicht zu prüfen dass die Kopplungsimpedanzen, welche aus der Gleichung (5) hervorgehen, die Äquivalenz der beiden Stromkreise in Stern und in Vieleck versichern, auch in Hinsicht der induzierten elektromotorischen Spannungen in den äusseren Schenkeln.

2. DIE NETZUMWANDLUNG EINES STROMKREISES IN VOLLSTÄNDIGEM VIELECK MIT INNEREN MAGNETISCHEN KOPPLUNGEN, IN EINEN STROMKREIS IN VOLLSTÄNDIGEM VIELECK OHNE INNERE MAGNETISCHE KOPPLUNGEN

Die Spannungen an den Klemmen der Schenkel hj in einem passiven Stromkreis, in vollständigem Vieleck mit inneren magnetischen Kopplungen und ohne äussere magnetische Kopplungen, haben den Ausdruck:

$$U_{hj} = \sum_{(km)} Z_{(hj)}^{(km)} I_{(km)} \text{ für } (\text{km}), (\text{hj}) = 12, 13, \ldots, 1\text{n}, \quad , 23, 24, \ldots, 2\text{n}, 34 \ldots \tag{6}$$

wo man die Summe in Verhältnis mit (km) erhält, indem man für jedem k nur die Werte $m > k$ nimmt; $Z_{(hj)}^{(km)}$ ist die Kopplungsimpedanz zwischen den Zweigen (km) und (hj) — sämtliche Zählpfeile in diesen Zweigen sind von der Reihenfolge der Indexe angegeben.

Durch Lösung des Gleichungssystems (6), in Bezug auf $I_{(km)}$, erhält man:

$$I_{(km)} = \sum_{(hj)} Y_{(hj)}^{(km)} U_{(hj)} \tag{7}$$

wo mit

$$\left\| Y_{(hj)}^{(k\,m)} \right\| = \left\| Z_{(hj)}^{(km)} \right\|^{-1} \tag{8}$$

die Matrix der Eigen-und Übertagungsadmittanzen bezeichnet wurde, welche man durch Inversion der Matrix der Koeffizienten des Gleichungssystems (6) erhält.

Dem ersten Satz Kirchhoffs gemäss, hat der Strom welcher von aussen in einem Knoten k des Vielecks mit inneren Kopplungen einfliesst, folgenden Ausdruck:

$$I_k = \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq k)}}^{n} \sum_{(hj)} Y_{(hj)}^{(k\,m)} U_{(hj)}. \tag{9}$$

Damit dieser Stromkreis mit einem Stromkreis in Vieleck ohne magnetische Kopplungen äquivalent sein soll, ist es, gemäss dem Satz der Überlagerung, notwendig und hinreichend, dass die entsprechenden Ströme I_k gleich sind dann wenn nur je eine der Spannungen einem selbstständigen Spannungssystems entsprechend U_{kg} $(g = 1,2,\ldots,k-1,\ k+1,\ldots,n)$ einen anderen Wert als Null hat.

Zum Beispiel für $U_{kg} = 0$ wenn $g \neq i$ nach den Ausdrücken (9) und (1), diesen Strömen entsprechend, erhält man:

$$\boxed{Y_{ki} = \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq k)}}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} Y_{(jj)}^{(km)}} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} k = 1,2,\ldots,n \\ i = 1,2,\ldots,n. \\ (i \neq k). \end{matrix} \tag{10}$$

Das letzte Verhältnis, welches die Admittanz irgend eines Schenkels (ki) des Vielecks ohne magnetische Kopplungen, äquivalent mit einem gegebenen Vieleck mit magnetischen Kopplungen ausdrückt, führt zum folgendem **Satz der "Beseitigung" der magnetischen Kopplungen**: *ein passiver Stromkreis in vollständigem Vieleck mit magnetischen Kopplungen zwischen den Schenkeln, hat als äquivalenten Stromkreis — was seine äusseren Wirkungen betrifft — einem Stromkreis in vollständigem Vieleck ohne magnetische Kopplungen; in dem äquivalentem Vieleck ohne Kopplungen ist die Admittanz eines Schenkels, welcher zwei beliebige Spitzen k und i verbindet, gleich der Summe der Übertragungsadmittanzen zwischen den Schenkeln welche von dem Knoten k "abgehen" und diejenigen welche in den Knoten i "eingehen" in dem Vieleck mit Kopplungen.*

In dem Ausdruck des Satzes bezieht sich der Ausdruck Schenkel welcher "eingehen' oder welcher "abgeht" auf die Zählpfeile in Bezug auf die man die Übertragungsadmittanzen ausdrückt, wobei die Eigenadmittanz des Schenkels (ki) als ein Sonderfall der Übertragungsimpedanz betrachtet wird.

Es muss noch bemerkt werden dass man diese Netzumwandlung gewöhnlich in Anwesenheit äusserer magnetischer Kopplungen nicht zu Stande bringen kann, da man nach der Netzumwandlung die Ströme aus den $\frac{n(n-1)}{2}$ Schenkeln des ersetzten Vielecks nicht mehr "wiederfinden"

kann, und man folglich die äusseren Wirkungen dieser Ströme in Hinsicht der elektromotorischen Spannungen, welche von den Strömen aus dem ersetzten Vieleck in dessen Äusseren induziert sind, nicht mehr beibehalten kann.

Was die Netzumwandlung im Falle eines aktiven Vielecks betrifft, so kann diese durchgeführt werden, indem man vorher das Vieleck mit inneren magnetischen Kopplungen passivisiert; die Passivisierung erreicht man auf Grund der Gleichungen (9) — in welchen, nach dem verallgemeinertem ohmschen Gesetz die Ersetzung $U_{ki} \rightarrow E_{ki}$ ausführbar ist — mit der Bedingung dass die neuen inneren elektromotorischen Spannungen, von der Form $E_{ki} = E_k - E_i$, denselben Strom wie die im Stromkreis befindlichen elektromotorischen Spannungen, bedingen sollen. Diese neuen elektromotrischen Spannungen können univermittelt erörtert werden, durch Anwendung des Vaschysatzes an jeder Spitze des Vielecks (aus der Zahl der Gleichungen, sowie aus dem Vaschysatz erfolgt dass man eine der Spannungen E_k nach Belieben wählen kann).

Die operationellen elektromotorischen Spannungen, welche den Anfangswerten der Ströme und der Spannungen entsprechen, können ebenso wie elektromotorische Spannungen von irgend welchen Quellen behandelt werden.

Anwendung I. Netzumwandlung eines aktiven Stromkreises in Stern mit magnetischen Kopplugen, in einem Stromkreis in vollständigem Vieleck ohne magnetische Kopplungen.

Man bemerkt dass ein Stromkreis in Stern mit n Spitzen mit einem neutralen Punkt 0 (Bild 2 a), einen Sonderfall des vollständigen Vielecks darstellt, in welchen die Eigen-und Kopplungsimpedanzen für die Schenkel ohne ein in der Spitze 0 verbundenes Ende, unendlich, bzw. null sind.

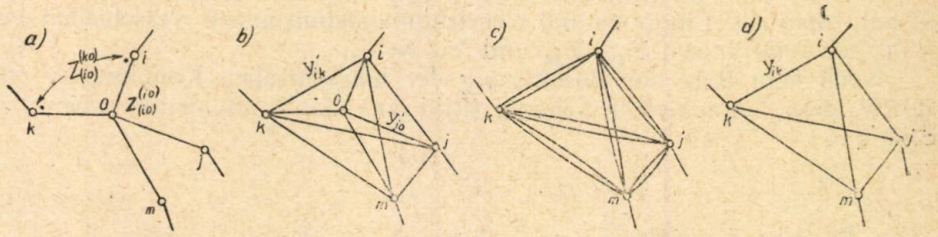


Bild. 2. Die Netzumwandlung Stern mit Kopplungen — vollständiges Vieleck ohne Kopplungen, auf Grund des Theorems der Beseitigung magnetischer Kopplungen

a) Stern mit magnetischen Kopplungen zwischen den Schenkeln

b) Vollständiges äquivalentes Vieleck, ohne Kopplungen

c) Doppeltes vollständiges Vieleck, entstanden durch Netzumwandlung des Sternes mit der Spitze in O.

d) Vollständiges Vieleck ohne Kopplungen, äquivalent mit den Stern von (a).

Folglich hat man zwischen zwei solche Schenkel nulle Übertragungsadmittanzen. Wendet man den vorher festgesetzten Satz der Beseitigung magnetischer Kopplungen an, so erhält man einen äquivalenten Stromkreis

in vollständigem Vieleck (Bild 2b) mit den Spitzen $0, 1, 2, \ldots, n$ und Schenkel mit Admittanzen welche folgende Ausdrücke haben:

$$Y'_{ik} = -Y^{k0}_{i0} \text{ für } i, k \neq 0 \tag{11}$$

$$Y'_{j0} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{i=1}^{n} Y^{jm}_{i0} = \sum_{i=1}^{n} Y^{j0}_{i0} \text{ für } j = 1, 2, \ldots\ldots, n.$$

Durch Netzumwandlung des Sternes ohne Kopplungen, mit dem neutralen Punkt in 0 (Bild 2b) — nach der ersten Netzumwandlung entstanden — erfolgt ein doppelter vieleckiger Stromkreis (Bild 2c) mit den Spitzen $1, 2, 3, \ldots n$, mit zwei Zweige in Derivation zwischen jeden zwei Spitzen. Ersetzt man die in Derivation verbundenen Zweige mit je einem äquivalenten Zweig, so erhält man schliesslich das gesuchte equiva — lente Vieleck (Bild 2d), in welchem die Admittanz des Zweiges, welcher zwei beliebige Knoten i und k verbindet, folgenden Ausdruck hat:

$$Y_{ik} = \frac{Y'_{i0} Y'_{k0}}{\sum_{j=1}^{n} Y'_{j0}} - Y^{k0}_{i0}, \tag{12}$$

dessen Beweis bisher auf viel schwieriger Art erzielt wurde.

Die Passivisierung des aktiven Stromkreises in Stern mit inneren und äusseren magnetischen Kopplungen bringt keine Schwierigkeiten, wenn man so vorgeht wie es im ersten Abschnitt der Untersuchung gezeigt wird; die elektromotorischen Spannungen und die Impedanzen der äusseren Kopplungen haben natürlich auch in diesem Falle die Ausdrücke (4), bzw. (5).

Anwendung II. Ermittlung des allgemeinen äquivalenten Schemas des einphasigen Transformators mit zwei Wicklungen. (Bild 3a).

Wendet man im transitorischem Regim die operationelle Methode an, so hat man als Eingangs-und Übertragungsadmittanzen verschieden von Null die Admittanzen Y_{11}, Y_{22} und $Y_{12} = Y_{21}$.

Nach dem Satz der Beseitigung der magnetischen Kopplungen, entspricht dem betrachtetem Schema (Bild 3a) das äquivalente Schema in Bild 3b.

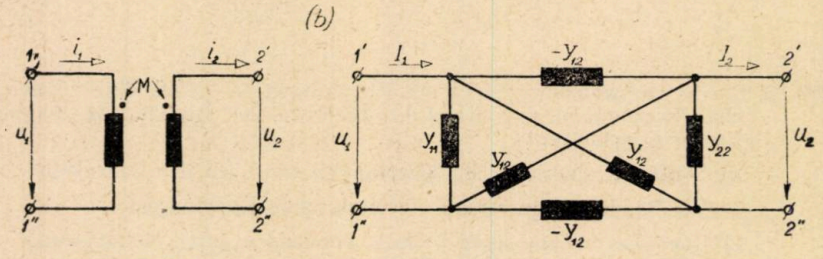


Bild 3 Einphasiger Transformator mit zwei Wicklungen (*a*) und sein allgemeines äquivalentes Schema. (*b*)

Die operationellen Eingangs-und Übertragungsadmittanzen für den gegebenen Transformator sind leicht ersichtlich aus den Betriebsgleichungen des Transformators:

$$U_1 = Z_1 I_1 - Z_m I_2 \quad \text{und} \quad -U_2 = Z_2 I_2 - Z_m I_1 \tag{13}$$

Aus den vorigen Gleichungen erfolgt:

$$I_1 = \frac{Z_2 U_1 - Z_m U_2}{Z_1 Z_2 - Z_m^2} \quad \text{und} \quad I_2 = \frac{Z_m U_1 - Z_1 U_2}{Z_1 Z_2 - Z_m^2}$$

und folglich

$$Y_{11} = \left(\frac{I_1}{U_1}\right)_{U_2=0} = \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 - Z_m^2}, \quad Y_{22} = \left(\frac{I_2}{-U_2}\right)_{U_1=0} = \frac{Z_1}{Z_1 Z_2 - Z_m^2}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \left(\frac{I_2}{U_1}\right)_{U_2=0} = \frac{Z_m}{Z_1 Z_2 - Z_m^2}. \tag{14}$$

Die erhaltenen Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit denjenigen welche auf Grund der allgemeinen Gleichungen der Vierpole erhalten wurden.

Anwendung III. Das allgemeine äquivalente Schema ohne magnetische Kopplungen für den Spartransformator in V-Schaltung.

Im Stromkreis des Spartransformators in V-Schaltung, in Bild 4 dargestellt, treten vier eigene Impedanzen von der Form Z_{ii} und sechs gegenseitige Impedanzen von der Form Z_{ik} auf.

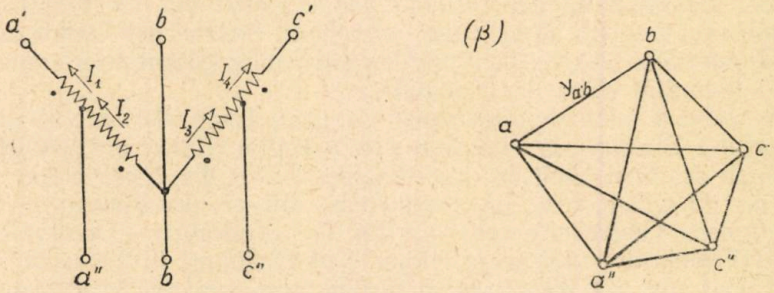


Bild 4. Spartransformator in V (*a*) und sein äquivalentes Schema (*b*)

Die Ermittlung der Parameter des allgemeinen äquivalenten Schemas in Bild 4 b wird auf Grund Satzes der Beseitigung magnetischer Kopplungen durchgeführt; man erhält:

$$Y_{a'a''} = Y_{11} - Y_{12}, \quad Y_{a'b} = Y_{12} + Y_{13}, \quad Y_{a'c''} = -Y_{13} + Y_{14}, \quad Y_{a'c'} = -Y_{14},$$

$$Y_{a''b} = Y_{22} - Y_{13} + Y_{33}, \quad Y_{a''c''} = Y_{13} - Y_{14} - Y_{23} + Y_{24}, \quad Y_{a''c'} = Y_{14} - Y_{24},$$

$$Y_{bc''} = Y_{23} - Y_{24} + Y_{33} - Y_{34}, \quad Y_{bc'} = Y_{24} + Y_{34}, \quad Y_{c''c'} = -Y_{34} + Y_{44}, \tag{15}$$

wo die Übertragungs-und Eingangsadmittanzen auf Grund folgender Gleichungen berechnet werden:

$$\begin{aligned} Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3 + Z_{14} I_4 &= E_1 \\ Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + Z_{23} I_3 + Z_{24} I_4 &= E_2 \\ Z_{31} I_1 + Z_{32} I_2 + Z_{33} I_3 + Z_{34} I_4 &= E_3 \\ Z_{41} I_1 + Z_{42} I_2 + Z_{43} I_3 + Z_{44} I_4 &= E_4 \end{aligned} \tag{16}$$

Die Matrix der Eigen-und Übertragungsadmittanzen hat also den Ausdruck:

$$\|Y\| = \|Z\|^{-1} \tag{17}$$

wo die Matrix $\|Z\|$ die Matrix der Koeffizienten aus der Gleichung (16) darstellt.

Die Gleichungen (15) und (17) lösen die Frage der Ermittlung der Parameter des äquivalenten Schemas aus Bild 4 b gänzlich.

3. EINE KURZE ÜBERSCHAU DER UMWANDLUNGSMÖGLICHKEITEN DER NETZE MIT N EINGÄNGEN

In Hinsicht der allgemeinen Frage welche die Umwandlung der Stromkreise mit n Eingänge bettrifft, (Spitzen welche galvanische Verbindungspunkte mit äusseren Netzen darstellen) bemerkt man folgendes:

Die Äquivalenzbedingungen von zwei Stromkreise ohne äussere Kopplungen, mit n Spitzen erfolgen aus der Identitätsbedingung des Ausdrucks der Ströme welche durch den analogen Spitzen der Kreisströme einfliessen, als Funktionen der Spitzenpotentiale.

Aus dem ersten Satz Kirchhoffs erfolgt dass nur n-1 dieser Ströme unabhängig sind.

In der Bestimmung der Stromkreislage treten nur die Potentialdifferenzen ein und folglich können die gemeinten Ströme als Funktionen von nur n-1 Potentialen ausgedrückt werden (als nulle Potentialrefferenz wählt man das Potential einer der Spitzen).

Also werden die Äquivalenzbedingungen durch der Identitätsbedingung von n-1 Ströme als Funktion von n-1 Potentialen ausgedrückt, das heisst durch der Gleichheit der Koeffizientenmatrix der Gleichungen welche die Ströme im ersten, bzw. im zweiteen Stromkreis ausdrücken.

Nach dem Gegenseitigkeitssatz für die statischen Stromkreise (die einzigen Stromkreise welche in dieser Untersuchung in Betracht genommen wurden) und für die passiven Stromkreise, sind die bezüglichen Matrizen (der Ordnung n-1) simetrisch; die Äquivalenzbedingungen welche aus der Gleichheit dieser Matrizen hervorgehen, werden also durch der Zahl

$$\frac{(n-1)^2-(n-1)}{2}+(n-1)=\frac{n\,(n-1)}{2} \tag{18}$$

von unabhängigen Gleichungen ausgedrückt.

Die Berechnung eines äquivalenten Schemas, auf Grund dieser Gleichungen, ist möglich, bzw. unmöglich, je nachdem die Zahl der zu berechnenden Impedanzen (in diesem äquivalentem Schema enthalten) grösser oder gleich, bzw. kleiner ist als die Zahl der Gleichungen welche die Äquivalenzbedingung ausdrücken.

Folglich, die Zahl der zu berechnenden Impedanzen berücksichtigend, um ein gewisses äquivalentes Schema zu ermitteln, ergibt sich dass die Aquivalenzgleichungen die Berechnung eines vollständigen, passiven Vielecks, ohne magnetische Kopplungen, gestatten, welches Vieleck mit einem beliebigen passiven, statischen Stromkreis ohne äussere magnetische Kopplungen und mit derselben Zahl der Eingänge äquivalent ist; die Be-

rechnung eines äquivalenten Stromkreises in Stern ist nur in Sonderfälle möglich, wärend die Berechnung eines äquivalenten Stromkreises in Stern mit inneren Kopplungen, im allgemeinen ein unbestimmtes Problem ist (da ein Teil der Impedanzen dieses Schemas nach Belieben ausgesucht werden kann).

Lehrstuhl für theoretische Elektrotechnik
Technische Hochschule Bukarest

SCHRIFTTUM

1. *G. W. Zeweke und P. A. Ionkin,* Osnowi elektrotehniki, Gosenergoisdat, Moskau, 1955.
2. *P. A. Woronow,* Obschaia teoria tschetirechpoljusnikow i mnogopoljusnikow, Gosenergoisdat, Moskau 1951.
3. *W. P. Sigorski,* Obschaia teoria tschetirechpoljusnika, A. N. USSR. Kiew, 1955.
4. *P. A. Ionkin,* Wsaimnoe pereobrasowanje treugolnika i swesd pri induktiwnoi swiasi, Elekritschestwo, Nr. 7, 1940.
5. *I. M. Ranks,* K preobrasowaniiu zepej peremenogo toga, soderschaschich wsaimoinduktiwnosti i e. d. s. Elektritschestwo, Nr. 2, 1941.
6. *I. M. Ranks,* Preobrasowanje n-lutschewol swesd peremenogo toga pri nalitschi wsaimoinduktii i e. d. s. Elektritschestwo Nr. 4, 1941, Seite 63—67.
7. *E. W. Zeliach,* Ossnow obschej teorii linejnich elektr. schem A. N. USSR 1951.

ВКЛАД ПО ВОПРОСУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

(Краткое содержание)

В первой части рассматривается преобразование звезды в многоугольник и приводятся по этому поводу новые доказательства.

В дальнейшем разрабатывается общий метод развязки индуктивных связей.

В качестве примера устанавливаются формулы преобразования звезды в полный многоугольник при индуктивных связях, эквивалентные общие схемы, без магнитных связей, для двухобмоточного трансформатора и для автотрансформатора при соединении по способу В.

CONTRIBUTIONS ON TRANSFIGURATION PROBLEM OF ELECTRICAL NETWORKS

(Summary)

In the introduction it is studied the transfiguration of the star-polygon and for these, new demonstrations are given, more simple than those existing in the technical literature.

Furthemore, a general method is given for elimination of the magnetic coupling from a network.

As applications of this method, complete formules of star-polygon transfiguration is established, in the case of the internal magnetic coupling and general equivalent scheme existence without magnetic coupling, for a two windings transformer, and selftransformer in *V*.

CONTRIBUTIONS A L'ETUDE DE LA TRANSFIGURATION DES RESEAUX ELECTRIQUES

(Résumé)

Dans la premère partie on étudie la transfiguration étoile-polygone, et on établit des nouvelles demonstrations, plus simples que celles connues dans la litterature tehnique. Puis on présente une méthode générale pour l'élimination des couplages magnétiques d'une réseau électrique. Comme aplication on établit les formules de la transfiguration étoile-polygon complet, en présence des couplages magnétiques intérieurs, ainsi que les schemes générales équivalentes sans couplages magnétiques pour le transformateur avec deux enroulements et pour l'autotransformateur avec conexion en *V*.

EIN BEITRAG ZUR FRAGE DER NETZUMWANDLUNGEN

(Zusammenfassung)

Im ersten Teil wird die Netzumwandlung Stern-Vieleck untersucht, wofür neue Beweise gegeben werden, einfacher als sie in der bisherigen Literatur bekannt sind. Weiter wird eine allgemeine Methode zur Beseitigung der magnetischen Kopplungen eines Netzes ausgearbeitet. Diese Methode beruht auf einem Satz bezüglich der Neztumwandlung eines Stromkreises in vollständigem Vieleck und mit inneren magnetischen Kopplungen in einen Stromkreis in vollständigem Vieleck ohne magnetische Kopplungen. Als Anwendung dieses Satzes werden die Formeln zur Netzumwandlung Stern-vollständiges Vieleck in Anwesenheit innerer magnetischer Kopplungen sowie die äquivalenten allgemeinen Schemas ohne magnetische Kopplungen für den Transformator mit zwei Wicklungen und für den Spartransformator in *V*-Schaltung festgelegt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

ELECTRONICA

621.372.8

ÜBER HOHLLEITUNGEN MIT QUERSCHNITTE DIE SICH EINEM GEGEBENEN QUERSCHNITT NAHERN

von EDMOND NICOLAU

1. Der Zweck der vorliegenden Mitteilung ist, eine Methode über die Berechnung des elektromagnetischen Feldes in einer Hohlleitung zu geben, die einen Querschnitt hat, der sich einem gebenen Querschnitt nähert, für den man die Lösung kennt.

Die Mittelung ist in mehrere Abschnitte eingeteilt. Im ersten Abschnitt werden die mathematischen Probleme der vorliegenden Frage festgesetzt. Im zweiten Abschnitt wird die mathematische Methode zur Lösung des Problems gegeben, die in ihren Grundlangen die Methode des kleinen Parameters ist. Weiterhin werden Anwendungen der erhaltenen Resultate gegeben in Beziehung auf Querschnitte die sich rechteckigen Querschnitten nähern.

2. Seit dem XIX-ten Jahrhundert wurden Forschungen auf dem Gebiet der Hohlleitungen unternommen. Es ist bekannt, dass in Hohlleitungen zwei Wellenformen existieren: die TE — Welle (oder H — Welle) in der die magnetische Komponente H_z (die axiale Komponente) verschwindet, und die TM — Welle (oder E — Welle) in der die elektrische Komponente E_z verschwindet. Die Spezialisierung auf E — und H — Wellen bedeutet keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit der Resultate; durch Superposition der Felder beider Wellenformen kann man stets die allgemeine Lösung erhalten.

In der Hypothese dass die Wände der Hohlleitung perfekte Leiter sind und dass das innere Medium verlustfrei und homogen ist, kann man beweisen, dass das elektromagnetische Feld aus folgenden Gleichungen erhalten werden kann:

$$\text{TE — Welle} \quad \Delta H_z + \lambda H_z = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \Big|_{\Sigma} \tag{2}$$

$$\text{TM — Welle} \quad \Delta E_z + \lambda E_z = 0 \tag{3}$$

$$E_z = 0 \Big|_{\Sigma} \tag{4}$$

wo Δ der Laplacesche Operator, Σ die innere Fläche und n die innere normale zu Σ ist.

Die Integration der Gleichungen (1) bzw (3) mit den betreffenden Grenzbedingungen, (2) bzw (4), ermöglicht die Berechnung aller Komponenten des elektromagnetischen Feldes unter Berücksichtigung der Beziehungen zwischen den Komponenten.

In dem derzeit veröffentlichenten Schrifttum werden die Gleichungen (1) und (3) durch die Methode der Trennung der Veränderlichen gelöst und der Ausdruck der Feldkomponenten gegeben aber nur für einige regelmässige Querschnitte: Rechteck, Kreis, Ellipse. Es muss bemerkt werden, dass es auch eine Methode gibt, die das Studium auch komplizierter Querschnitte ermöglicht. Diese Methode verwendet das Borgnischepotential und gebraucht Querschnitte für die man die Lösungen kennt und aus welchen man bestimmte endliche Teile auf eine bestimmte Art herausnimmt [1].

Es wird nun eine Methode gegeben, die die Berechnung des Feldes auch für solche Querschnitte ermöglicht, die sich einem Querschnitt nähern für den man die Lösung kennt.

Bevor wir zur eigentlichen Lösung dieses Problems übergehen, werden wir die mathematische Formulierung geben und eine Lösung angeben für ein sogar allgemeineres Problem.

3. Vom mathematischen Standpunkt steht das Problem folgendermassen:

Es sei eine Gleichung

$$L_0[u] + \lambda_0 u = 0 \tag{5}$$

in der L_0 ein lineärer differentialler Operator in Bezug zu u ist und λ eine positive Konstante; es vird im Gebiet Ω_0 die Funktion u gesuht, unter Berücksichtigung der Bedingungen für u auf der Grenze Σ des Gebiets. Wir notieren mit $u^{(0)}$ die Lösung der Gleichung und mit $\lambda^{(0)}$ den dazugehörigen Eigenwert.

Es wird nun eine neue Lösung u gesucht, wenn die Gleichung (5) und die Grenzbedingungen dieselben bleiben, aber das Gebiet, von Ω_0 sich in Ω ändert, welches sich sehr an Ω_0 nähert.

Man kann für die Lösung dieses Problems folgendermassen vorgehen. Das Gebiet Ω_0 sei definiert durch bestimmte Veränderliche x_i, $(i = 1,2 \ldots, m)$,

$$x_i = a_i$$

und ξ_i seien neue Veränderliche in denen das Gebiet Ω den gleichen Ausdruck hat wie Ω_0 in x_i:

$$\xi_i = a_i \cdot$$

Da wir annehmen dass Ω von Ω_0 wenig verschieden ist, kann man schreiben:

$$\xi_i = x_i + \varepsilon f_i (x_1, x_2, \cdots x_m) \tag{6}$$

wo ε eine kleine Zahl ist.

Da die Beziehung zwieschen x und ξ nich singulär ist, kann man (6) in Bezug auf x lösen:

$$x_i = \xi_i + \varepsilon \varphi_i (\xi_i, \cdots \xi_n ; \varepsilon)$$

In den neuen Veränderlichen die Gleichung (5) zu:

$$L_0[u] + \lambda u - \sum_1^n \varepsilon^j L_j (u, \varphi_1, \cdots \varphi_m) = 0 \tag{7}$$

in der L_j lineäre differentielle Operatore in Bezug auf u sind und n die gröste Ordnung der Ableitungen ist, die in L_0 vorkommen. Indem man φ_i als Reihenausdruck von ε schreibt, erhält man

$$L_0[u] + \lambda u - \sum_j \varepsilon^j M_j(u) = 0 \tag{8}$$

wo die Operatore M_j gleichfalls lineär in Bezug auf u sind.

Am diese Art erscheint auf der rechten Seite nur Funktionen $u^{(0)}$, nähert und dass sie in Reihe in Bezug auf ε ausgedrückt werden kann:

$$u = \sum_i \varepsilon^i u^{(i)} \tag{9}$$

Nehmen wir auch an dass der neue Eigenwert λ unter der Form

$$\lambda = \sum_i \varepsilon^i \lambda^{(i)} \tag{10}$$

ausgedrückt werden kann.

Für man nun in (8) die Ausdrücke (9) und (10) ein und annuliert die Koeffizienten die als Faktor ε^p haben, so erhät man

$$L_0[u^{(i)}] + \lambda^{(0)} u^{(i)} - \sum M_k[u^{(j)}] + \sum \lambda^{(j)} u^{(k)} = 0 \tag{11}$$

$$(j + k = i)$$

Für den verfolgten Zweck is es bequem, die Gleichung (11) unter folgender Form zu schreiben:

$$L_0[u^{(i)}] - \lambda^{(0)} u^{(i)} = \sum M_k u^{(j)} + \sum \lambda^{(j)} u^{(k)}$$

Am diese Art erscheint auf der rechten Seite nur Funktionen $u^{(r)}$, $(r < i)$, die also bekannt sind und auf diese Weise werden wir zu einer Annäherungs methode geführt.

Die erste Gleichung die man erhält (Annäherung der nullten Ordnung) ist

$$L_0[u^{(0)}] + \lambda^{(0)} u^{(0)} = 0\,. \tag{12}$$

Aus ihr erhält man $u^{(0)}$ und $\lambda^{(0)}$.

Durch Einführung dieser Werte in die zweite Gleichung

$$L_0[u^{(1)}] + \lambda^{(0)} u^{(1)} = M_1[u^{(0)}] - \lambda^{(1)} u^{(0)}$$

folgert man $u^{(1)}$ und $\lambda^{(1)}$ usw.

4. Für den Fall der Hohlleiter, ist der Operator $L_0[u]$ der Laplacesche Operator selbst:

$$L_0[u] = \Delta u$$

und die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen ist $m = 2$, da es sich um eine Problem in einer Ebene handelt. Indem man die obenstehenden Ergebnisse auf diesen Sonderfall anwendet, erhät man die Gleichungen:

$$\Delta u^{(0)} + \lambda^{(0)} v^{(0)} = 0 \tag{13}$$

$$\Delta v^{(1)} + \lambda^{(0)} u^{(1)} = M_1[u^{(0)}] - \lambda^{(1)} u^{(0)} \tag{14}$$

Hier kann $\lambda^{(1)}$ sofort berechnet werden, da $u^{(i)}$ eine orthogonale Reihe billdet. Durch Normierung der Eigentunktion $u^{(0)}$,

$$\int_{\Omega} [u^{(0)}]^2 \, d\xi_1 \, d\xi_2 = 1$$

erhält man

$$\lambda^{(1)} = \int_{\Omega_0} M_1 \, [u^{(0)}] \, u^{(0)} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \cdot$$

Der Sonderfall der Laplacesche Operator ist im Schrifttum bekannt [2].

5. Als erste Anwendung werden wir den Fall eines rechteckigen Gebietes Ω_0 behandeln, für den die Gleichungen der Grenze

$$x = 0 \qquad x = a \qquad y = 0 \qquad y = b \, .$$

sind. Er ist beckannt, dass für ein solches Gebiet man zu Lösungen folgender Art geführt wird:

$$u_{mn}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \tag{15}$$

$$u_{mn}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \tag{16}$$

in denen m und n natürliche Zahlen sind.

In beiden Fällen:

$$\lambda_{mn}^{(0)} = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \tag{17}$$

Wenn wir vorschlagen, das Feld in einer Hohlleitung zu untersuchen, für den Fall, dass sich nur zwei Seiten ändern, d.h. dass Ω von den Kurven

$$x = 0 \qquad x = a \qquad y = \varepsilon f(x) \qquad y = b + \varepsilon f(x) \, .$$

begrenzt ist, und wir nur die Lösung (15) in Betracht ziehen, so können wir direkt die von Riz [2] gefundenen Rezultate verwenlen. Führen wir neuen Veränderlichen

$$\xi = x \qquad \eta = y - \varepsilon f(x)$$

ein, so sieht man gleich dass in den neuen Koordinaten Ω von den gleichen Kurven begrenzt ist wie Ω_0 in de alten Koordinaten x und y, da Ω in den Koordinaten ξ, η ein Parallelogramm ist:

$$\xi = 0 \qquad \xi = a \qquad \eta = 0 \qquad \eta = b.$$

Wenn man die Rechnungen ausführt, erhält man:

$$\Delta u^{(1)} + \lambda^{(0)} u^{(1)} = f'' \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \eta} + 2 f' \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi \, \partial \eta} - \lambda^{(1)} u^{(0)}$$

Für $\lambda^{(1)}$ erhält man in beiden Fällen (15) und (16)

$$\lambda^{(1)} = 0$$

Für u folgen die Ausdrücke:

$$u_{bq}^{(0)} = \frac{2}{ab} \sin \frac{p\pi}{a} \xi \sin \frac{q\pi}{b} \eta$$

$$\left(\lambda_{pq}^{(0)} = \pi^2 \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \right)$$

$$u_{pq}^{(1)} = \sum_{m.\,n} \frac{C_{pqmn}}{\lambda_{pq}^{(0)} - \lambda_{mn}^{(0)}} \quad (m \neq p\,,\, n \neq q)$$

$$(\lambda_{pq}^{(1)} = 0)$$

wo

$$C_{pq\,mn} = \int \left[f'' \frac{\partial u_{pq}^{(0)}}{\partial \eta} + 2 f' \frac{\partial^2 u_{pq}^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} \right] u_{mn}^{(0)} \; d\xi \; d\eta$$

6. Die oben entwickelte Methode kann man natürlich auch für andere Querschnittsformen verwenden, die Berechnungen werden ähnlich ausgeführt. Die allgemeine mathematische Methode, die in der ersten Paragraphen entwieckelt wurde, kann einer grossen Klasse von Gleichungen der mathematischen Physik angewendet werden, zwischen welchen wir die Probleme der elastischen Schwingungen von Plattn und der elektrischen Schwingungen von Hohlramresonatoren zitieren.

Lehrstuhl für Elektronik
Polytechnisches Institut Bukarest

SCHRIFTTUM

1. — *Edm. Nicolau:* Proprietăți generale ale ghidurilor de undă. Studii și Cercetări de Fizică, VI (1955) 759—768.

2. — *P. M. Riz:* Reșenie volnovogo uravneniia dlia oblasti, blizkoi k dannoi. Prikladnaia matematika i mehanika, XVI (1952) 345—348.

О ВОЛНОВОДАХ С ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ БЛИЗКИЕ К ДАНЫМИ

(Краткое содержание)

В начале рассмотрено математическая задача получения решений линеиного дифференциальнoго уравнения в частных производных с граничными условиями в случае молой деформаций области.

Используется метод последовательных прпближений и так получено обшее решение. Используется метод в случае оператора лапласа Δ.

Даются еффективное рассчитаное решение соответсвуюшее прямоугольного волновода постоянного сечения.

ON WAVE GUIDES WITH SLIGHTLY DEFORMED SECTIONS

(Summary)

A theoretical method of finding the integrals af a linear, differential equation, with given boundary conditions, for a slightly deformed domain, is presented. This method is applied to find the solution of Laplace's equation, which correspond to the field in the wave guides.

In particular is given the solution for a slightly defformed rectangular wave guide.

SUR LES GUIDES D'ONDE A SECTIONS LÉGÈREMENT DEFORMEES

(Résumé)

On donne une méthode générale pour obtenir — par approximations successives — les intégrales des equations linéaires aux dérivés partielles avec des conditions données sur la frontière — dans le cas où le domaine est légerement déformé. Comme application on étudie le cas de l'équation de Laplace, ce qui correspond justement au cas des guides d'onde.

On calcule la solution pour une section rectangulaire.

ÜBER HOHLLEITUNGEN MIT QUERSCHNITTE DIE SICH EINEM GEGEBENEN QUERSCHNITT NÄHERN

(Zusammenfassung)

Der Zweck der vorliegenden Mitteilung ist, eine Methode über die Berechnung des elektromagnetischen Feldes in einer Hohlleitung zu geben, die einen Querscnitt hat, der sich einem gegebenen Querschnitt nähert, für den man die Lösung kennt.

Im ersten Abschnitt werden die mathefatischen Probleme der vorliegenden Frage festgesetzt. Im zweiten Abschnitt wird die mathematische Methode zur Lösung des Problems gegeben, die in ihren Grundlagen die Methode des kleinen Parameters ist. Weiterhin werden Anwendungen der erhaltenen Resultate gegeben in Beziehung auf Querschnitte die sich rechteckigen Querschnitten nähern.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

621.396.645.1

ELECTRONIC OSCILLATOR WITH EXTERNAL NONLINEARITY

by MIHAI DRĂGĂNESCU and GHEORGHE STANCU

1. INTRODUCTION

Amplitude limitation of an electronic oscillator one explains through the nonlinear characteristic of the electron tube (fig. 1). If in the initial operating point is fulfilled he condition

$$M \geqslant \frac{RC}{S} \tag{1}$$

the oscillations are increasing in amplitude and their limitation will take place due to the curvature of the electron tube characteristic.

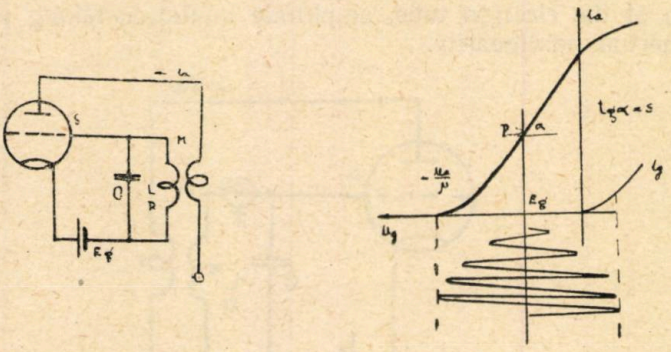


Fig. 1 LC Oscilator

When the stationary regim is established the relation (1) is replaced by the relation

$$M = \frac{RC}{\overline{S}(U)} \tag{2}$$

where S is a linearised transconductance, depending on the amplitude U of oscillations. Amplitude limitation is due either to the upper part of the characteristic or to the bottom part of it or to both of them. In the second case if one calculates the frequency of oscillations one finds that it is equal to the resonant frequency of the LC circuit, provided that the harmonics are negligible. If theese are taken into account the frequency of oscillations even at small procents of harmonics will not be quite equal to the resonant frequency of the LC circuit. In the other two cases a grid current appears and the grid-cathode space may be replaced by an equivalent linearised resistance $\overline{R}_g(U)$. This resistance appears across the

LC circuit and the new frequency of oscillations (neglecting also the harmonics) in this case will be

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{R}{\overline{R_g}(U)}} \tag{3}$$

where ω_0 is the resonant frequency of the LC circuit. Because $R \ll \overline{R_g}(U)$ the frequency deviation is small, but it depends on the amplitude of oscillation and even on the supply sources (through $\overline{R_g}$ which depends on the grid current characteristic). If one takes the harmonics into account, the expression (3) must be corrected, the correction being more important in comparison with the preceding case, because the grid current is a suplementary source of superior harmonics.

It is not possible to eliminate the nonlinearity of an electronic oscilator, the nonlinearity playing an essential role, but it is important to reduce it. It is possible to work without grid currents and to replace the nonlinearity of the electron tube by an external nonlinearity, the tube itself working in the linear region of the $i_a u_g$ characteristic. This is the case of the RC oscilators where thermistors are used for amplitude limitation [1]. Such an element may be used also in the LC oscillators (fig. 2). With this scheme it is possible to obtain linear operation of the electron tube, amplitude limitation taking place only due to the inertial nonlinearity.

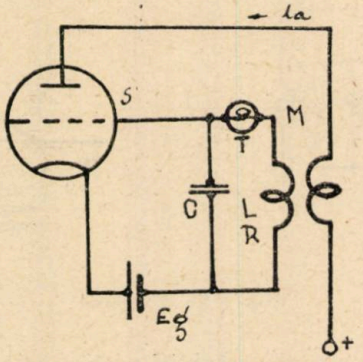


Fig. 2. Oscilator with inertial nonlinearity

Relation (1) holds also for this oscillator provided that R depends on the amplitude of oscillations. The amplitude of oscillations will be deduced from the equation

$$M = \frac{\overline{R}(U) \cdot C}{S} \tag{4}$$

With respect to the frequency of oscilations it is interesting to observe from (3) that if grid currents are avoided, then $\overline{R_g} = O$, and the frequency of oscillations will coincide with ω_0. In reality it will take place a deviation from ω_0 due to the harmonics produced by the inertial nonlinearity [2].

Another scheme, which will be studied here, where amplitude limitation is taking place due to an external nonlinearity is shown in fig. 3 The

scheme was presented by Ackasu [3] but our study was over before the apparition of Ackasu's work, by using another method of attak of the problem. We completed the work with an experimental part and we are considering that our work puts in evidence some new aspects.

2. THEORETICAL ANALYSIS ON THE BASIS OF THE EQUIVALENT LINEARISATION. [4] [5]

In fig., 4 is shown the electron tube characteristic together with the static characteristic of the system formed by diodes D_1 and D_2, which are negatively polarised with the difference of potential U_0.

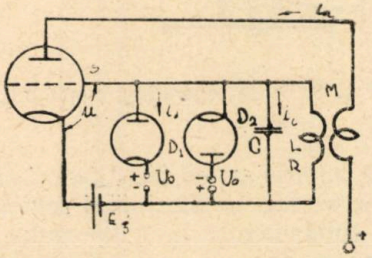


Fig. 3. The scheme of the studied oscillator

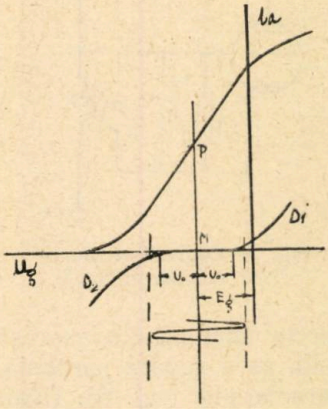


Fig. 4. Electron tube and two diode system characteristics

If in the initial operating point P, the condition (1) is fulfilled, the oscillations will increase in amplitude; it is possible to realise their limitation due only to the nonlinearity of the system D_1 D_2. The tube itself will work in its linear region (implicitly without grid currents).

The scheme will be analysed on the basis of the method of equivalent linearisation due to Kriloff and Bogoliuboff [4]. This method is applicable in general to the nonlinear systems with a small procent of harmonics (it is the case of a small nonlinearity, but also of a greater nonlinearity coupled to a selective system which reduces the procent of harmonics). The scheme of fig. 3. has a resonant circuit which will reduce the effect of harmonics, and if at the same time the oscillations do not exceeds too much the condition (1) for the initiation of oscillations, they will limitate themselves immediately after their penetration into the nonlinearity.

If the system D_1 D_2 is replaced by an equivalent linearised resistance, then for the oscillator is available the equivalent linearised scheme of fig. 5, where supply sources were omitted.

Taking into account only the variable regim the origin will be taken in fig. 4 in M. The linearised resistance of the system D_1D_2 is

$$\varrho = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1}{I_1} \tag{5}$$

where U_1 represents the amplitude of the sinusoidal difference of potential applied to the system and I_1 is the amplitude of the corresponding fundamental component of the current through one of the diodes. The equivalent resistance of a diode being U_1/I_1 the factor $1/2$ from (5) is due to the parallel combination of the two diodes.

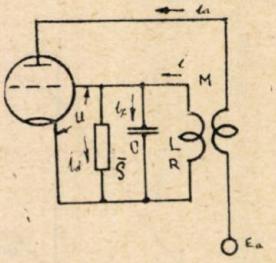


Fig. 5. Equivalent linearised scheme of fig. 3

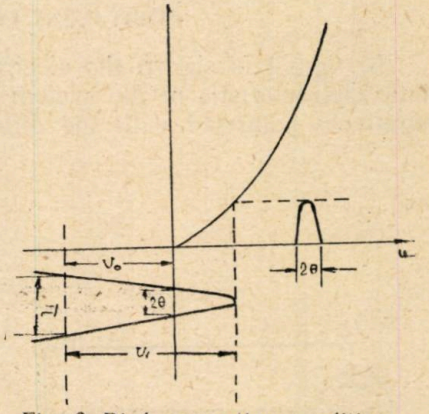


Fig. 6. Diode operating condition

In order to calculate the expresion (5) one approximates the diode characracteristic as a square parabola, because it workes in the initial region of the characteristic (fig. 6). Evaluating the fundamental I_1 of the pulse the current through diode one obtaines (see annex I) :

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{4\,AU_1} \cdot \beta(\theta) \tag{6}$$

where A is diode perveance and

$$\beta = \frac{\pi}{\sin\theta - \theta\cos\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta} \tag{7}$$

2θ being the conduction angle of the current through diode.
θ can be deduced from the evident relation (fig. 6)

$$\cos\theta = \frac{U_0}{U_1} \tag{8}$$

In fig. 7 is represented the dependance of β on U_0/U_1. In annex I this function is tabulated.

Now, for the circuit of fig. 5 instead of writing its differential equation, one makes use of the symbolical calculus, applicable to a linearised circuit:

$$u = pMi_a - pLi - Ri = \frac{1}{Cp} i_c = \bar{\varrho}(U_1, U_0)\, i_d \tag{9}$$

$$i = i_e + i_d \tag{10}$$

$$i_c = Su \tag{11}$$

where the last relation (11) is correct if the internal resistance of the electron tube is much greater than the anode load. From the equations from (9) till (11) one obtains:

$$LCp^2+\left[RC-MS+\frac{L}{\varrho(U_1,U_0)}\right]p+\frac{R}{\varrho(U_1,U_0)}+1=0 \qquad (12)$$

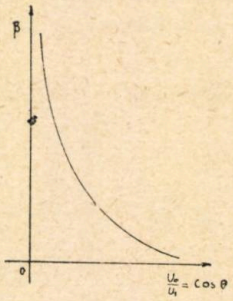


Fig. 7. β dependence on U_0/U_1

which represents the condition for the oscillation of the circuit. Letting $p=\alpha+j\omega$ and separating the real and imaginary parts, one obtains the relations:

$$LC\alpha^2-LC\omega^2+\left[RC-MS+\frac{L}{\varrho(U_1,U_0)}\right]\alpha+\frac{R}{\varrho(U_1,U_0)}+1=0 \qquad (13)$$

$$2LC\alpha\omega+\left[RC-MS+\frac{L}{\varrho(U_1,U_0}\right]\omega=0 \qquad (14)$$

From (14) one deduces,

$$\alpha=-\frac{RC-MS+\frac{L}{\varrho(U_1,U_0)}}{2LC} \qquad (15)$$

The condition for the initiation of the oscillations one obtains for $U_1=O$, putting the condition $\alpha>o$, in order to increase the oscillations. Because for $U_1\to O$, $\varrho\to\infty$, from (15) results

$$RC-MS<0$$

or

$$M>\frac{RC}{S} \qquad (16)$$

One refinds the relation (1). this was to be expected because in the moment of the apparition of the oscillations the diodes do not work.

The condition of stationary oscillations, one obtains for $\alpha = 0$, This condition gives,

$$\bar{\varrho}(U_1, U_0) = \frac{L}{RC - MS} \tag{17}$$

From this relation, for U_0 given, one calculates the amplitude of oscillations. A practical determination of the stationary amplitude U_1 is possible if one represents (for every particular scheme) $\bar{\varrho} = f(U_1)$, with U_0 as parameter (fig. 8)

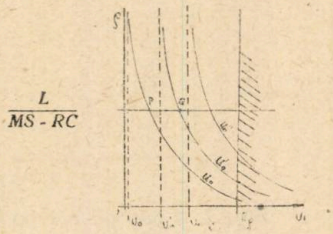


Fig. 8. The dependence of $\bar{\varrho}$ on U_1 ; U_0 is taken as parame er

These curves are represented by using the expression (6) and the diagram of fig. 7. One observes that for $U_1 \leqslant U_0$ the equivalent resistance of the diodes is infinite, due to the fact that they are not conducting. For $U_1 > U_0$, the equivalent resistance decreases with U_1. For $U_1 > E_g$ (*therforē and* $U_1 > E_g$) the diagram of fig. 8 cannot be utilised because the appearence of the electron tube nonlinearity, the present analysis being not valid in such a case.

The stationary amplitude of oscillations one determines on the basis of the formula (17), its value being to be find at the intersection of the $\bar{\varrho}$ curves with the ordinate $\frac{L}{RC - MS}$. For instance, the points P and Q of fig. 8, represents stationary regims for different values of U_0. It is to be noted that the amplitude of oscillations can be in an easy way controled by diode polarisation U_0, which fact seems very important from practical point of vue.

The frequency of oscillation in the stationary regim one calculates from (13), leting $\alpha = 0$:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{R}{\bar{\varrho}(U_1, U_0)}} \tag{18}$$

which is similar to the relation (3). The expression (18) shows that the frequency of oscillation has a coorection (of first order, to say) from the value ω_0 because of the external nonlinear element. The expression (18) expresses a dependence of the frequency of oscillations on the amplitude, this result being not noted by Ackasu [3] who is neglecting the frequency dependence on the amplitude.

The foregoing analysis based on equivalent linearisation neglects the harmonics and with this their influence on the frequency of oscillations. The results obtained by linearisation are valable for the fundamental and constitutes only an approximation of the first order. The frequency given by (18) may be corrected with terms taking into account the harmonic effects. It is pssible to calculate the effect of the harmonics [3] but it has also importance to state here in what measure the harmonic correction is less important here than in the case of the classical oscillator. The classical oscillator has two nonsymetrical nonlinearities (anode and grid current) but the present oscillator has only a symetrical nonlinearity of which is made little use and in a controlable manner. De Packh [6] shows that for a good frequency stabilisation the even harmonics must be eliminated, which condition is realised here by the symetrical nonlinearity which produces only odd harmonics. Therefore one deduces that such an oscillator has some advantage from this point of vue on the classical oscillator.

3. POSSIBILITY OF MODULATION

It is possible to modulate in amplitude the oscillator with external nonlinearity, varying diodes' polarisation. This is clear from fig. 8, from where one deduces the dependence of the amplitude of oscillations U_1 on U_0. An usual oscillator may be modulated in principle, but it will be very difficult to modulate it 100% because varying (in this aim) E_a or E_g in such a great range, the condition of oscillation will cease to be satisfied on this entire range. Quite another is the situation with the scheme of fig. 3. If the oscilator is working at the limite of the oscillations initiation one obtaines a perfect linear relation between U_1 and U_0 (of course in the limits of the validdity of the theory, therefore for $U_0 \leq E_g$, $U_1 \leq E_g$). This affirmation is sustained by the relations from (6) to (8). In fig. 9 is represented the dependance of U_1 on U_0 observing that for $U_0 > E_g$, the relation between U_1 and U_0 is no more linear, because of the nonlinearity of the oscillating electron tube.

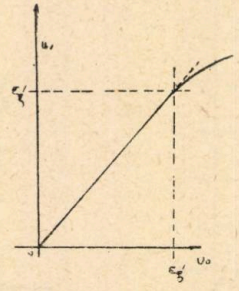


Fig. 9. Dependence of U_1 on U_0

It must be noted that in the modulation process the frequency remains constant, for $\bar{\varrho}$ in (18) remains constant (no parameter is changing in the modulation process) which is very important. The question of the posibility of modulation and of frequeny stability will be examined in detail in a future paper.

4. EXPERIMENTAL RESULTS

The experimentals proofs were made on the scheme of fig. 10 where as oscillating tube was used the triode $TCO^4/_{10}$ and for the two diodes, two EB4. The triode worked in the queiscent point $E_a = 250$ V, $E_g = 3$ V. As can be seen from fig. 11 this point is established in the

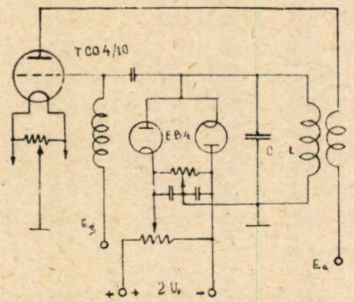


Fig. 10. The experimental scheme

linear region of the characteristic, where the transadmittance is $S = 2\ ^{mA}/_{V}$. The parameters of the tank circuit were: $C = 4200$ pF, $L = 160\ \mu$H, the resonant frequency was 200 kHz. The condition for the initiation of oscillations, without the diodes gives from (2) a mutual inductance $M = 8{,}4\ \mu$H; experimentally we obtained $9\ \mu$H. When the diodes are put into circuit, it is valable the same condition for the initiation of oscillations which

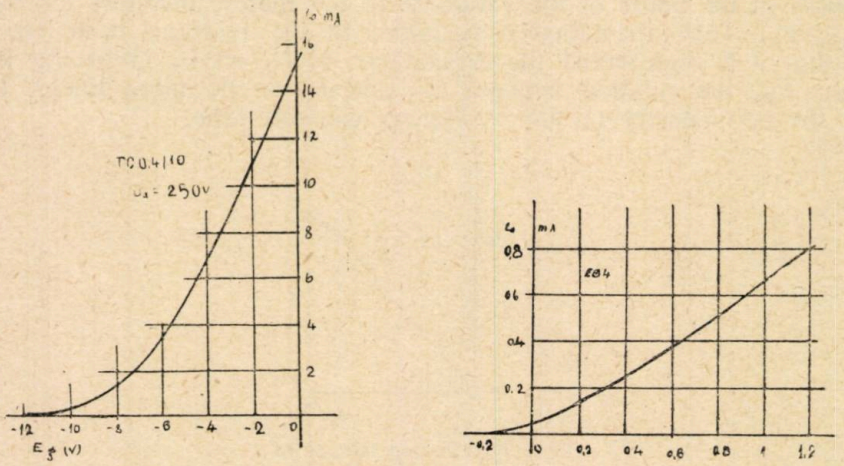


Fig. 11. *a*) The static characteristic of the tirode *b*) The static characteristic of the diode

was proofed experimentally. In order to obtain an amplitude of oscillation $U_1 = 1{,}4$ V we took $U_0 = 1$ V and knowing diode perveance $A = 0{,}88\ ^{mA}/_{V^{3/2}}$ we found from (17) tham M must be $18\ \mu H$. From (6)we calculated tha

value of $\bar{\varrho}$ and found 8,4 Ω. Experimentally we found for the former conditions, $M = 18{,}5\,\mu H$ which verified our theory.

If one represents $\bar{\varrho}\,(U_1)$ for U_0 as parameter one obtains the curves from fig. 12 which can be used for determining the amplitude of oscillations U_1 for a given U_0. (It is to be noted that this diagram is valable for a definit diode and can be used for different oscillating tubes). One proceeds in the following manner: from (17) one calculate the necessary $\bar{\varrho}$ for initiation of oscillations, knowing M, S, L, R and C; this value of $\bar{\varrho}$ can

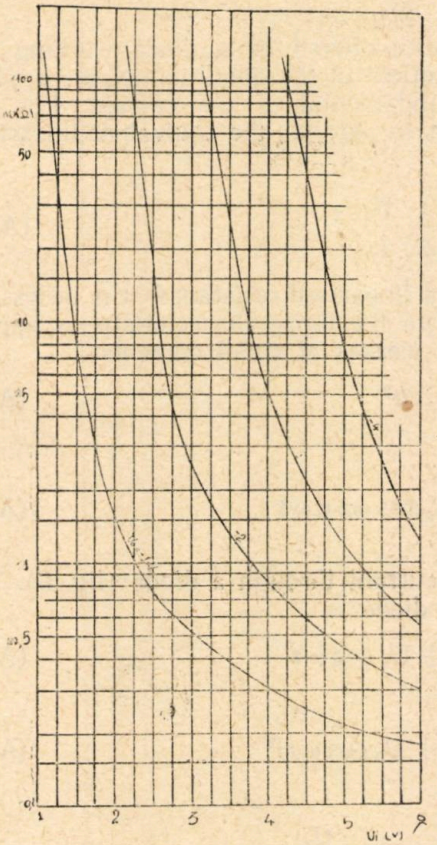
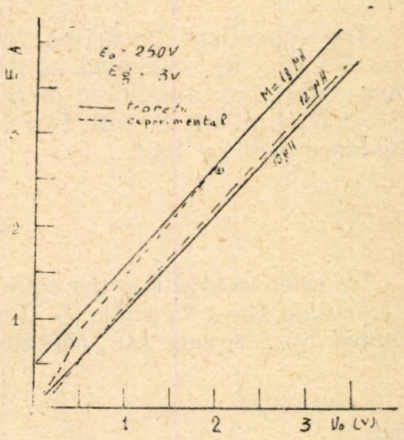


Fig. 12. The dependence of $\bar{\varrho}$ on U_1 for the particular scheme of fig. 10



Fiõ. 13. Dependence of U_1 on U_0 with M as parameter

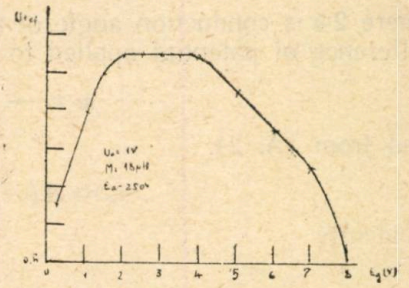


Fig. 14. Dependence of U_1 on E_a

be represented as a parallelline to the U_1 axés, at the intersection with the curves $U_0 = ct$ obtaining the value of the amplitude U_1. For instance, for $\bar{\varrho} = 8{,}2\,k\Omega$ at the intersection with the curves $U_0 = 1$ v. one finds $U_1 = 1{,}5$ v. Experimentallywe found 1,4 v.

From fig. 8 and from fig. 12 it is possible to represent the variatio $U_1 = f(U_0)$ with M as parameter (fig. 13).

Experimentally we studied the dependance of U_1 on U_0 and the dependance of U_1 on E_g fig. 14).

Fig. 14 shows clearly the necessity to work in the linear region of the characteristic $i_a - u_g$ of the electron tube. When $|E_g| < 2$ V appears the nonlinearity due to the grid current and when $|E_g| < 4$ V appears the bottom nonlinearity of the tube. Thus it is indicated to work with $2 < |E_g| < 4$ V.

ANNEX I

The equivalent linearised resistance offered by a diode working "in class C" (fig. 6) is defined as the quotient of the amplitude of the applied tension to the amplitude of the fundamental of the current. For the system D_1D_2 of fig. 3, with two diodes in parallel, the equivalent linearised resistance will be then

$$\varrho = \frac{1}{2}\frac{U_1}{I_1} \tag{A.1.}$$

In order to evaluate the equivalent linearised resistance, it is necessary to calculate the amplitude I_1. Therefore the diode characteristic is approximated by a square law (because it workes at small currents)

$$i_a = A u^2 \tag{A.2.}$$

Then

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{+\theta} i_a \cos \omega t \, d\omega t \tag{A.3.}$$

where 2θ is conduction angle of the current through a diode (fig. 6). The difference of potential applied to the diode is

$$u = -U_0 + U_1 \cos \omega t \tag{A.4.}$$

and from (A. 2).

$$i_a = A(-U_0 + U_1 \cos \omega t)^2 \tag{A.5.}$$

Evidently

$$\cos \theta = \frac{U_0}{U_1} \tag{A.6.}$$

and taking (A.6) into account, the expression (A.5) may be rewritten:

$$i_a = AU_1^2(\cos \omega t - \cos \theta)^2 \tag{A.5.a.}$$

The fundamental of the current will be then,

$$I_1 = \frac{AU_1^2}{\pi}\int_{-\theta}^{+\theta} \cos \omega t \, (\cos \omega t - \cos \theta)^2 \, d\omega t$$

from where

$$I_1 = 2\frac{AU_1^2}{\pi}\left[\sin\theta - \theta\cos\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right] \qquad (A.7.)$$

If one notes

$$\beta(\theta) = \frac{\pi}{\sin\varrho - \theta\cos\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta} \qquad (A.8.)$$

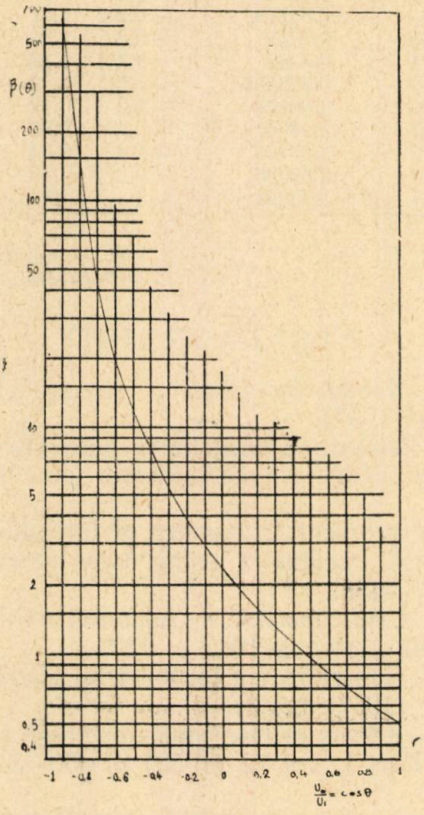


Fig. 15. *Dependence of* β *on* $\frac{U_0}{U_1}$

the fundamental I_1 can be written

$$I_1 = \frac{2AU_1^2}{\beta(\theta)} \qquad (A.9.)$$

and $\bar{\varrho}$ will be then

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{4AU_1} \cdot \beta(\theta) \qquad (A.10.)$$

In fig. 15 is represented the dependence of β on θ or $\frac{U_0}{U_1}$, in table I this function being tabulated.

Table I

$\frac{U_0}{U_1}$	θ	β	$\frac{U_0}{U_1}$	θ	β
1	3,14	0,5	0	1,57	2,35294
0,9	2,70	0,55304	— 0,1	1,47	3,02115
0,8	2,5	0,62118	— 0.2	1,37	3,98406
0,7	2,35	0,7017	— 0,3	1,26	5,52486
0,6	2,21	0,8032	— 0,4	1,16	7,93651
0,5	2,09	0,925926	— 0,5	1,05	12,4688
0,4	1,98	1,08108	— 0,6	0,92	42,3729
0,4	1,87	1,28041	— 0,7	0,89	123,4570
0,2	1,77	1,53846	— 0,8	0,64	675,6760
0,1	1,67	1,88324	— 0,9	0,43	
0	1,47	2,35294	— 1	0	∞

Electronic Laboratory
Politechnical, Institut of Bucarest

BIBLIOGRAPHY

1. *T. Tănăsescu.* — Manual de tuburi și circuite electronice. Ed. Acad. R.P.R. (vol. III 1957).
2. *N. N. Fedorov.* — Nelineinîe iscajenia v generatorah colebanii s „inerţionnoi nelineinostiu" v colebatelnom conture. Radiotehnika 10 (1955) Nov.
3. *Ziya Akçasu.* — (Technical University of Istambul Turkey) Amplitude limitation in LC oscillators using two biased diodes. Wir. Eng, June 1956, 157—155.
4. *N. N. Bogoliuboff, A. Mitropolskii.* — Asimptoticeskie metodî v teorii nelineinîh colebanîi. Moscova 1955 p. 122.
5. *M. Drăgănescu.* — Generalizarea formulei lui Barkhausen Electronica și Automatica, 1 (1957) nr. 3,
6. *D. C. de Packh.* — Effects of Harmonics on the frequence of oscillations Trans. AIEE, Part I, vol 72 (1953) p. 450—5.

ЗЛЕКТРОННЬЙ ГЕНЕРАТОР С ВНЕШНЕЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

(Краткое содержание)

В статье изучается злектронный генератор с внешней нелинейностью состоящий из двух диодов. (Рис). Такая схема представляет некоторые преимущества перед классической схемой, а именно возможность модулирования генератора и, вероятно, лучшая ставильность частоты. Схема анализирована методом эквивалентной линеаризации, теоретические результаты хорошо проверены зкспериментально.

ELECTRONIC OSCILLATOR WITH EXTERNAL NON-LINEARITY

(Summary)

The presence of a nonlinear rezistive element is essential for an electronic oscillator Usually this nonlinearity is due to the electron-tube (the nonlinearities of the grid and plate currents) but it seems more convinient ly to use au external nonlinearity, for instance, placing two polarised diodes in the grid circuit. This circuit was described by Ackasu [3], but here is presented an independent analysis based on the method of equivalent linearisation, which permitted us to study more deeply this type of oscillator. Also are presented exact experimental determinantions which are lacking in Ackasu's paper.

OSCILLATEUR ELECTRONIQUE AVEC NONLINÉARITÉ EXTERNE

(Résumé)

La présence d'un élement nonlinéaire est essentielle pour le fonctionnement d'un oscillateur électronique. En général, cette nonlinéarité appartient au tube éléctronique (à cause de la nonlinéarité du courant anodique e du courant de la grille) mais il est plus convenable d'utiliser une nonlinéarité externe, par exemple en mettant deux diodes polarisées dans le circuit de la grille. Ce montage a été décrit par Ackasu [3], mais ici on présente une analyse indépendente basée sur la méthode de la linéarisation equivalente qui nous a permis d'étudier plus profondement ce type d'oscillateur. On présente de même des résultats experimentaux précis qui manquent dans le travail d'Ackasu.

ELEKTRONISCHER OSZILLATOR MIT ÄUSSERER NICHTLINEARITÄT

(Zusammenfassung)

Die Existenz eines nichtliniarischen Elementes ist wesentlich in einer Oszillatorschaltung. Grewöhnlich ist diese Nichtliniarität verursacht die Elektronröhre (die Nichtliniaritäten des Gitter und Anodenstromes), aber es ist viel besser eine äussere Nichtliniarität zu brauchen. Diese Oszillaotrschaltung ist von Ackasu [3] beschrieben worden, aber hier ist die Rede von einer unabhängiger Analyse, die auf die Methode der equivalenter liniarization beruht. Dieses erleichtert uns dieser Oszillarschaltung besser zu studieren. Zugleich, werden hier genaue experimentelle Ergebnisse vorgestellt, die in Ackasu's Arbeit fehlen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

RADIOCOMUNICAȚII

621.396

L'IMPÉDANCE D'ENTRÉE DES DIPÔLES REPLIÉS

par A. MILLEA

Introduction.

Le dipôle replié ou dipôle en boucle est défini, dans le cas général, comme une combinaison de n dipolês parallèles de même longueur, dont les extremités sont réunies galvaniquement ; les distances entre les dipôles sont petites par rapport à la lonqueur d'onde. L'un des dipôles est alimenté symétriquement et les autres se terminent chacun sur une impédance Z_k (fig. 1). L'aire et la forme des sections des conducteurs peuvent être quelconques, mais constantes sur toute la longueur des conducteurs.

La distribution des courants et, par conséquent, l'impédance d'entrée de l'antenne se modifient en ajoutant au dipôle principal 1 les éléments passifs 2,3... n, dans les conditions mentionnées ; l'étude de ces effets est

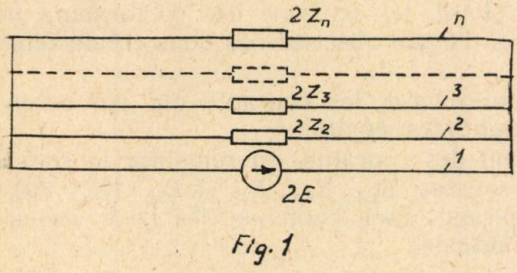


Fig. 1

Fig. 1. L'antenne dipôle replié

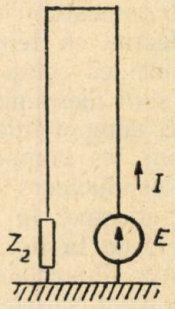


Fig. 2. Dipôle replié asymetrique a deux éléments

importante pour certaines applications pratiques. Le but du présent exposé est de déduire l'expression de l'impédance d'entrée du dipôle replié à n éléments en fonction des paramètres suivants : le rapport de la longueur de l'antenne à la longueur d'onde ; le nombre n d'éléments ; la géométrie de la section transversale du système et les impédances Z_k des éléments passifs de l'antenne. Cette expression représente une généralisation des formules obtenues par divers auteurs en traitant des cas plus simples [1, 2, 3, 4].

Pour simplifier les raisonnements, on présente d'abord le calcul concernant le dipôle replié à deux éléments, puis la généralisation pour le dipôle replié à n éléments. Pour la même raison, l'antenne symétrique de la fig. 1 est remplacée par l'antenne asymétrique de la fig. 2, dont l'impédance d'entrée est la moitié de l'impédance de l'antenne symétrique correspondante.

L'impédance d'entrée du dipôle replié à deux éléments.

L'analyse de l'antenne est fondée sur la décomposition des courants qui parcourent les deux conducteurs en des composantes en phase (ou composantes symétriques) et des composantes en antiphase (ou composantes antisymétriques), comme on le fait généralement dans la théorie des lignes de transmission asymétriques [2,5], et sur l'application du théorème de la superposition. Les composantes en phase des courants parcourent les conducteurs de l'antenne dans le même sens et contribuent tous les deux à la radiation, tandis que les composantes en antiphase parcourent les conducteurs en sens contraires et leur contribution à la radiation est nulle, parce que leurs amplitudes sont égales.

Il est à remarquer que la distribution des composantes en antiphase le long des conducteurs de l'antenne est sinusoïdale, tandis que la loi de distribution des composantes en phase est plus ou moins différente de la loi sinusoïdale, en fonction des dimensions transversales de l'antenne. Dans le calcul suivant on supposera valable l'approximation sinusoïdale pour la distribution des composantes en phase ; l'erreur ainsi commise est négligeable dans le cas des antennes minces, particulièrement pour l'antenne en demi-onde (alimentation au point de maximum du courant). Si les éléments de l'antenne sont identiques l'hypothèse d'une distribution sinusoïdale du courant n'est plus nécéssaire, comme on le verra plus loin, ce que donne une plus grande généralité aux résultats.

La décomposition des courants en composantes en phase et en antiphase s'effectue en tenant compte des faits suivants :

a) pour les composantes en phase, les tensions des conducteurs de l'antenne sont identiques, les points d'égale abscisse des deux conducteurs sont donc équipotentiels ;

b) pour les composantes en antiphase, les courants qui parcourent les deux conducteurs ont des amplitudes égales.

Pour effectuer la décomposition des courants, on remplace la source de f.e.m. E de la fig. 2 par les sources E_{1A}, E_{2A}, E_{1L} et E_{2L} (fig. 3a) ; pour assurer l'invariabilité des courants dans l'antenne, les f.e.m. de ces sources doivent satisfaire aux conditions :

$$E_{2A} - E_{2L} = 0 \tag{1}$$

$$E_{1A} + E_{1L} = E \tag{2}$$

Par suite du théorème de la superposition, on peut obtenir le schéma de la fig. 3a en superposant les schémas des fig. 3b et 3c. Les f.e.m. des sources supplémentaires peuvent être choisies de telle manière que le circuit de la fig. 3b ne soit traversé que par des courants en phase (courants d'antenne), tandis que le circuit de la fig. 3c n'est traversé que par des courants en antiphase (courants de ligne). Dans ce but, on impose les deux conditions mentionnées sous a) et b) : dans la fig. 3b les points A_1 et A_2 de l'entrée de l'antenne doivent être équipotentiels, c'est à dire qu'il est nécéssaire que

$$E_{1A} = E_{2A} - Z_2 I_{2A} \tag{3}$$

et dans la fig. 3c les courants à l'entrée de l'antenne doivent avoir des amplitudes égales :

$$I_{1L} = I_{2L} \tag{4}$$

En réunissant les points équipotentiels du circuit de la fig 3b, on obtient le montage équivalent de la fig. 4, où Z_A est l'impédance d'entrée

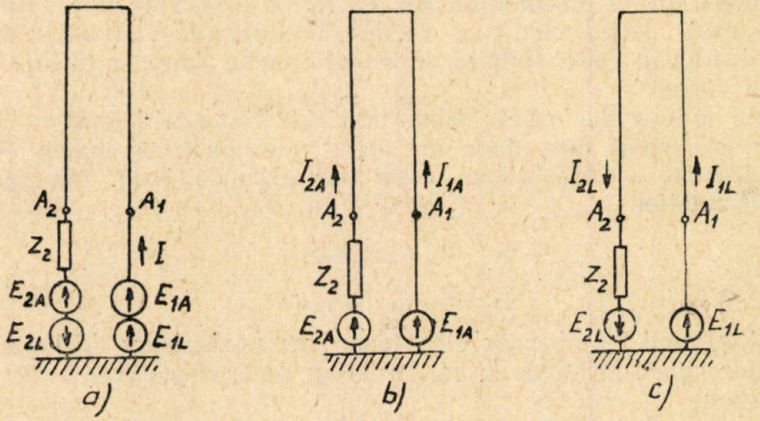


Fig. 3. Le décomposition des courants en composantes en phase et en antiphase

de l'antenne formée par les deux conducteurs groupés en parallèle. Si les conducteurs de l'antenne sont minces, Z_A est l'impédance d'entrée d'un radiateur linéaire mince, de longueur égale à celle du dipôle replié; contrairement Z_A peut être approximée par l'impédance d'entrée d'un radiateur cylindrique de diamètre équivalent.

Il résulte du montage équivalent de la fig 4:

$$E_{2A} = Z_A (I_{1A} + I_{2A}) \tag{5}$$

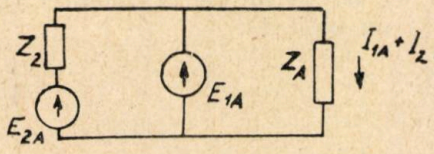


Fig. 4. Le montage équivalent pour la fig. 3 b

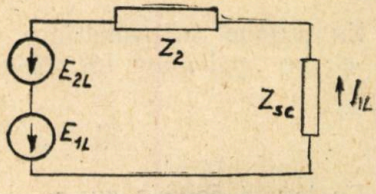


Fig 5. Le montage équivalent pour la fig. 3 c

Le montage équivalent pour la fig. 3c est celui de la fig. 5; il en résulte

$$E_{1L} + E_{2L} = (Z_2 + Z_{sc})\, I_{1L} \tag{6}$$

Dans cette égalité Z_{sc} désigne l'impédance d'entrée de la ligne en court circuit, formée par les conducteurs de l'antenne.

Pour déterminer les huit inconnues E_{1A}, E_{2A}, E_{1L}, E_{2L}, I_{1A}, I_{2A} I_{1L} et I_{2L} il faut écrire encore deux équations. On utilisera les relations

qui subsistent entre les courants i_1 et i_2 en régime symétrique et entre les tensions u_1 et u_2 en régime antisymétrique. La déduction des relations exactes est très difficile, mais on peut obtenir une approximation satisfaisante en considérant seulement le mode fondamental, transversal-électromagnétique, de propagation sur les conducteurs de l'antenne. En négligeant les modes supérieurs, on ne tient pas compte de l'influence de la radiation sur la distribution des courants dans l'antenne (sinusoïdale dans ce cas), pertes ohmiques et des discontinuités au point d'alimentation; d'ailleurs, cette simplification est usuelle dans la théorie des antennes linéaires.

Dans le cas des ondes transversal-électromagnétiques, on peut démontrer facilement que, dans un plan transversal, le champ électrique a un caractère électrostatique (voir par exemple [6]). On peut donc écrire les relations

$$\begin{aligned} q_1 &= a_{11}\, u_1 + a_{12}\, u_2 \\ q_2 &= a_{21}\, u_1 + a_{22}\, u_2 \end{aligned} \tag{7}$$

où q_1 et q_2 sont les charges électriques des conducteurs de l'antenne.

D'autre part, la loi de la conservation de la charge électrique conduit à l'équation

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial z} \tag{8}$$

d'où l'on déduit, en supposant une distribution sinusoïdale du courant:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{i_1}{i_2} \tag{9}$$

En régime symétrique $u_1 = u_2$ et, d'après (7) et (9), on peut écrire

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{a_{11} + a_{12}}{a_{22} + a_{21}} \tag{10}$$

En régime antisymétrique $i_1 = i_2$ et, en vertu de la relation (9), $q_1 = q_2$; en appliquant les relations (7) on obtient

$$\frac{u_1}{u_2} = -\frac{a_{22} + a_{12}}{a_{11} + a_{21}} \tag{11}$$

En tenant compte que $a_{12} = a_{21}$ et en notant

$$\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{22} + a_{12}} = \frac{1}{m} \tag{12}$$

on déduit les deux équations en question:

$$\frac{I_{2A}}{I_{1A}} = m \tag{13}$$

$$\frac{E_{2L} - Z_2\, I_{2L}}{E_{1L}} = \frac{1}{m} \tag{14}$$

(dans la relation (14) le premier membre représente le rapport des amplitudes des tensions aux points A_1 et A_2 de la fig. 3c).

On peut calculer les coefficients a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}, et m en résolvant le problème d'électrostatique mentionné. Dans le cas des conducteurs à section circulaire, le coefficient m est calculé par plusieurs auteurs [3,4,7].

Les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (13) et (14) constituent un système de 8 équations à 8 inconnues ; en résolvant ce système par rapport aux courants I_{1A} et I_{1L} on obtient les expressions :

$$I_{1A} = \frac{(1+m)^2 Z_A + m(1+m) Z_2}{(1+m)^2 Z_A (Z_2+Z_{sc}) + m^2 Z_2 Z_{sc}} E \tag{15}$$

$$I_{1L} = \frac{(1+m) Z_2 + Z_{sc}}{(1+m)^2 Z_A (Z_2+Z_{sc}) + m^2 Z_2 Z_{sc}} E \tag{16}$$

L'impédance d'entrée de l'antenne est donnée par

$$Z_i = \frac{E}{I_{1A}+I_{1L}} = \frac{Z_A(Z_{sc}+Z_2) + \frac{m^2}{(1+m)^2} Z_2 Z_{sc}}{Z_A + Z_2 + \frac{Z_{sc}}{(1+m)^2}} \tag{17}$$

Cette formule représente l'expression générale de l'impédance d'entrée du dipôle replié à deux éléments. A partir de (17) on peut déduire les expressions concernant les cas particuliers plus simples, fréquents en pratique:

a) $m = 1$ (les conducteurs de l'antenne sont identiques):

$$Z_i = \frac{Z_A (Z_2+Z_{sc}) + \frac{1}{4} Z_2 Z_{sc}}{Z_A + Z_2 + \frac{1}{4} Z_{sc}} \tag{18}$$

Ce cas est intéressant, la formule (18) étant valable aussi pour les antennes dont les dimensions transversales ne sont pas négligeables.

b) $Z_2 = 0$ (l'élément passif est en court circuit):

$$Z_i = \frac{Z_A Z_{sc}}{Z_A + \frac{Z_{sc}}{(1+m)^2}} = \frac{1}{\frac{1}{(1+m)^2 Z_A} + \frac{1}{Z_{sc}}} \tag{19}$$

On voit que dans ce cas l'impédance d'entrée est composée par deux impédances groupées en parallèle: l'impédance d'entrée de la ligne en court circuit Z_{sc} et l'impédance de l'antenne Z_A transformée dans le rapport $(1+m)^2$. Si la longueur de l'antenne est égale à un quart de la longueur d'onde, on a $Z_{sc} = \infty$ et on retrouve la formule usuelle

$$Z_i = (1+m)^2 Z_A \approx (1+m)^2 \cdot 36\,\Omega \tag{20}$$

On peut obtenir des valeurs divers pour m et, par conséquent, pour Z_i en variant les dimensions géométriques de l'antenne. Si $m = 1$ (les élé-

ments de l'antenne sont identiques) on obtient $Z_i = 144\,\Omega$ pour l'antenne asymétrique et $Z_i = 288\,\Omega$ pour l'antenne symétrique.

c) $Z_2 = \infty$ (l'élément passif est ouvert):

$$Z_i = Z_A + \frac{m^2}{(1+m)^2} Z_{sc} \tag{21}$$

Dans ce cas l'impédance d'entrée est formée par deux impédances groupées en série : l'impédance de l'antenne Z_A et l'impédance de la ligne en court circuit Z_{sc} transformée dans le rapport $\frac{m^2}{(1+m)^2}$.

L'impédance d'entrée du dipôle replié à n éléments.

Le calcul s'effectue de la même manière que pour le dipôle replié à deux éléments : on introduit dans les bras de l'antenne des sources de f.e.m. auxiliaires, ce qui permet de séparer les courants en composantes en phase et en antiphase, et on applique ensuite le théorème de la superposition. On peut considérer la situation de la fig. 6 comme résultant de la

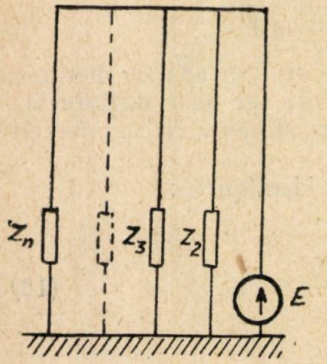


Fig. 6. Le dipôle asymétrique à n éléments

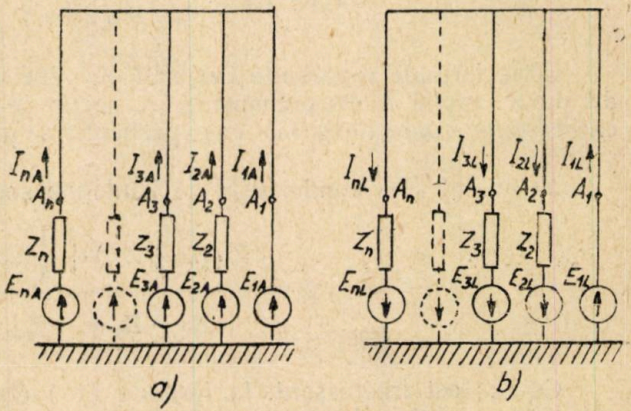


Fig. 7. La décomposition des courants en composantes en phase et en antiphase dans le cas du dipôle replié à n éléments

superposition des situations des figures 7a et 7b; les f.e.m. des sources supplémentaires doivent satisfaire aux conditions

$$E_{kL} - E_{kA} = 0\,; \quad (k = 2, 3, \ldots . n) \tag{22}$$

et

$$E_{1A} + E_{1L} = E. \tag{23}$$

Afin d'effectuer la décomposition des courants en composantes en phase et en antiphase, il convient de choisir les f.e.m. E_{kA} et E_{kL} de telle manière que les points $A_2, A_3, \ldots . A_n$ soient équipotentiels en régime symétrique de même qu'en régime antisymétrique. On peut donc réunir les points $A_2, A_3, \ldots . A$ et on obtient ainsi une ligne de transmission

dont l'un des conducteurs est constitué par l'élément actif de l'antenne et l'autre par les éléments passifs groupés en parallèle.

En régime symètrique tous les points $A_1, A_2, \ldots . A_n$ doivent être équipotentiels:

$$E_{1A} = E_{kA} - Z_k I_{kA}\,; \quad (k = 2,3 \ldots n) \tag{24}$$

Les courants satisfont à une condition analogue à l'égalité (13), qui s'écrit

$$\sum_{k=2}^{n} I_{kA} = m I_{1A} \tag{25}$$

où le coefficient m se détermine en résolvant le problème d'électrostatique équivalent (m est égal au rapport $\sum_{k=2}^{n} \frac{q_k}{q_1}$, où q_k est la charge électrique du conducteur k, tous les conducteurs ayant le même potentiel).

En régime antisymétrique (fig. 7b) les courants qui parcourent la ligne de transmission équivalente ont des amplitudes égales:

$$\sum_{k=2}^{n} I_{kL} = I_{1L} \tag{26}$$

La tension des points $A_2, A_3, \ldots . A_n$ doit satisfaire à une condition analogue à l'égalité (14):

$$\frac{E_{kL} - Z_k I_{kL}}{E_{1L}} = \frac{1}{m}\,; \quad (k = 2,3 \ldots . n)$$

Pour la situation de la fig. 7a (régime symétrique), en réunissant les points équipotentiels $A_1, A_2, \ldots . A_n$, on obtient un montage équivalent de la même forme que celui de la fig. 4, d'où l'on déduit:

$$I_{1A} + \sum_{k=2}^{n} I_{kA} = \frac{E_{1A}}{Z_A} \tag{28}$$

Dans cette relation Z_A désigne l'impédance d'entrée de l'antenne formée par les conducteurs de l'antenne groupés en parallèle.

Pour la situation de la fig. 7b (régime antisymétrique), on obtient un montage équivalent analogue à celui de la fig. 5, en réunissant les points équipotentiels $A_2, A_3, \ldots . A_n$. La f.e.m. E_{2L} de la fig. 5 doit être remplacée par la f.e.m. équivalente de $n - 1$ sources E_{kL}, groupées en parallèle, chacune de celles-ci étant connectée en série aver une impédance Z_k. Cette f.e.m. équivalente est donnée par l'expression

$$\frac{1}{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{Z_k}} \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{E_{kL}}{Z_k}$$

A son tour, l'impédance Z_2 de la fig. 5 doit être remplacée par l'impédance équivalente en série de la même combinaison des sources E_{kL}

et des impédances Z_k; cette impédance équivalente est donnée par l'expression

$$\frac{1}{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{Z_k}}$$

L'équation en question est donc la suivante :

$$I_{1L} = \frac{E_{1L} + \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{E_{kL}}{Z_k}}{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{Z_k}}}{\frac{1}{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{Z_k}} + Z_{sc}} \tag{29}$$

où Z_{sc} désigne l'impédance d'entrée de la ligne en court circuit formée par le conducteur 1 et les conducteurs $2,3 \ldots n$ groupés en parallèle.

On emploie la notation suivante:

$$Z' = \frac{1}{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{Z_k}} \tag{30}$$

$$E_L' = \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{E_{kA}}{Z_k}}{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{Z_k}} \tag{31}$$

Puisqu'il faut calculer seulement les expressions des courants I_{1A} et I_{1L}, on peut sommer les équations (24) et (27) par rapport à l'indice k, *de* $k = 2$ à $k = n$, en les multipliant d'abord par $1/Z_k$; on obtient ainsi les relations:

$$E_{1A} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{Z_k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{E_{kA}}{Z_k} - \sum_{k=2}^{n} I_{kA} \tag{32}$$

$$E_{1L} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{Z_k} = m \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{E_{kL}}{Z_k} - \sum_{k=2}^{n} I_{kL} \right) \tag{33}$$

En tenant compte de (22), (25), (26), (30) et (31), ces relations deviennent

$$E_{1A} = E_L' - Z' m I_{1A} \tag{34}$$

$$E_{1L} = m (E_L' - Z' I_{1L}) \tag{35}$$

Les équations (22), (23), (25), (26), (28), (29), (34) et (35) constituent un système identique à celui trouvé dans le cas du dipôle

replié à deux éléments (constitué par les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (13) et (14)), à condition de remplacer I_{2A} par $\sum_{k=2}^{n} I_{kA}$, I_{2L} par $\sum_{k=2}^{n} I_{kL}$, Z_2 par Z' et $E_{2L} = E_{2A}$ par E'_L. Par conséquent, l'expression de l'impédance d'entrée peut être obtenue à partir de la formule (17), en effectuant les substitutions indiquées ci-dessus:

$$Z_i = \frac{Z_A (Z_{sc} + Z') + \frac{m^2}{(1+m)^2} Z' Z_{sc}}{Z_A + Z' + \frac{Z_{sc}}{(1+m)^2}} \qquad (36)$$

L'expression de l'impédance d'entrée du dipôle replié à n éléments a donc la même forme que celle de l'impédance d'entrée du dipôle replié à deux éléments, les seules différences étant les suivantes: a) au lieu de l'impédance Z_2 il faut introduire dans la formule l'impédance équivalente des impédances Z_k groupées en parallèle; b) Z_{sc} et m ont regard à la ligne de transmission dont l'un des conducteurs est constitué par l'élément actif de l'antenne et l'autre par les éléments passifs groupés en parallèle.

Dans le cas du dipôle replié à n éléments, on peut obtenir une gamme très grande de valeurs pour l'impédance d'entrée, en variant les paramètres Z_{sc}, Z_k, n et m. En donnant des valeurs particulières à ces paramètres, on déduit facilement des expressions analogues à celles déduites pour le dipôle à deux éléments. Le cas le plus simple correspond aux valeurs $Z_k = 0$ $(k = 2,3 \ldots . n)$, $l = \frac{\lambda}{4}$ et $m = n - 1$ (les éléments passifs sont situés symétriquement en regard de l'élément actif); dans ces conditions l'impédance d'entrée est égale à

$$Z_i \approx n^2 \cdot 36\ \Omega$$

pour l'antenne asymétrique et

$$Z_i \approx n^2 \cdot 72\ \Omega$$

pour l'antenne symétrique.

Applications.

L'utilisation du dipôle replié comme élément radiant des antennes d'émission ou de réception a l'avantage de permettre l'obtention de valeurs très différentes pour l'impédance d'entrée de l'antenne. La composante résistive de l'impédance d'entrée du dipôle replié peut varier pratiquement entre quelques ohms et quelques milliers d'ohms, en fonction des paramètres Z_{sc}, Z_k, n et m, ce qui facilite considérablement l'adaptation de l'antenne au feeder. L'adaptation de ces impédances est spécialement difficile dans le cas des systèmes d'antennes comportant un grand nombre d'éléments ; lorsque les éléments du système sont constitués par des dipôles simples en demi-onde, ayant une impédance de 60—70 ohms, l'impédance d'entrée du système peut avoir des valeurs très faibles. En

utilisant des dipôles repliés au lieu des dipôles simples, on peut obtenir une augmentation considérable de la valeur de l'impédance d'entrée, sans modifier les autres performances du système d'antennes.

Un autre avantage des dipôles repliés est la possibilité d'obtenir une impédance d'entrée constante dans une bande de fréquences relativement large, ce qui s'explique par la compensation réciproque, dans certaines

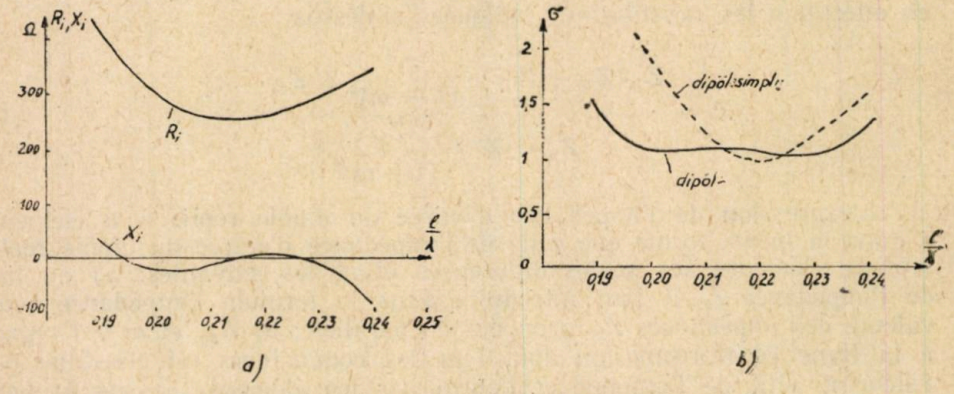


Fig. 8. *a*) L'impédance d'entrée du dipôle replié de A. *b*) Le taux d'ondes stationnaires σ sur un feeder de 285 Ω pour le dipôle replié de A. et sur un feeder de 66 Ω pour le dipôle simple correspondant.

conditions, des composantes réactives des courants en phase et en anti-phase qui parcourent l'élément actif du dipôle replié. Les cas les plus simples sont $n = 2$; $Z_2 = 0$; $l \approx \frac{\lambda}{4}$ ou $n = 2$; $Z_2 = \infty$; $l \approx \frac{\lambda}{2}$, où l désigne la longueur de l'antenne asymétrique ou la demi-longueur de

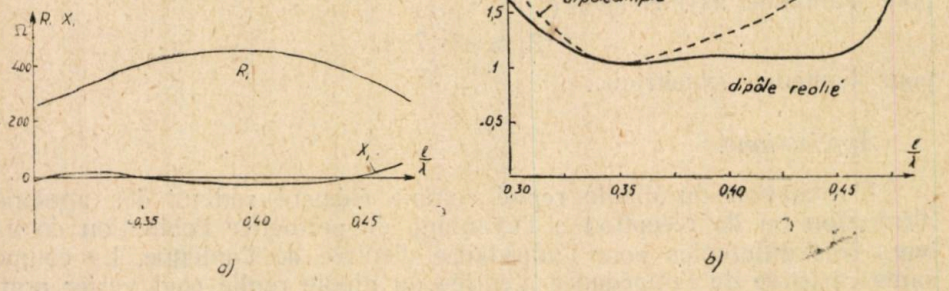


Fig. 9. *a*) L'impédance d'entrée du dipôle replié de B. *b*) Le taux d'ondes stationnaires σ sur un feeder de 420 Ω pour le dipôle replié de B. et pour le dipôle simple correspondant.

l'antenne symétrique. En ces cas, comme on peut le constater à partir des formules (19) et (21), les réactances de Z_A et de Z_{sc} ont des signes

opposés et elles peuvent se compenser si l'on choisit convenablement les paramètres de l'antenne. Pratiquement, ce choix comporte deux difficultés:

a) la longueur de résonance de la ligne en court circuit est plus grande que celle de l'antenne;

b) dans le cas du dipôle replié en demi-onde il faut réaliser des valeurs très faibles de l'impédance caractéristique Z_{0L} de la ligne en court circuit.

La première peut être surmontée en introduisant des isolateurs, ayant $\varepsilon_r > 1$, entre les éléments de l'antenne (ces isolateurs n'affectent pas la longueur électrique de l'antenne). Pour obtenir une impédance caractéristique Z_{0L} de valeur réduite, on peut donner une forme convenable aux conducteurs de l'antenne, qui peuvent être formés, par exemple, par deux rubans métalliques séparés par une couche diélectrique mince. On peut obtenir ainsi pour la bande d'adaptation relative des valeurs dépassant 10% ; le taux d'ondes stationnaires σ dans cette bande est inférieure à 1,1, comme il résulte des exemples calculés ci-dessous.

Dans certaines applications il faut assurer une valeur $\sigma < 2$ dans une bande de fréquences très large (par exemple pour les antennes des stations ionosphériques, des installations pour la mesure de l'intensité du champ, pour la réception des ondes décamétriques et métriques) ; en ces cas on peut utiliser, au lieu des antennes en losange, des dipôles repliés à deux éléments avec $Z_2 = R_2$ (l'élément passif terminé sur une impédance résistive). Le rendement de l'antenne devient ainsi de l'ordre 0,2—0,5, mais la condition $\sigma < 2$ se maintient dans une bande de fréquences dont les limites se trouvent en un rapport 5:1.

Nous donnons à titre d'exemple les résultats des calculs, effectués à l'aide des formules établies, sur la variation de l'impédance d'entrée des

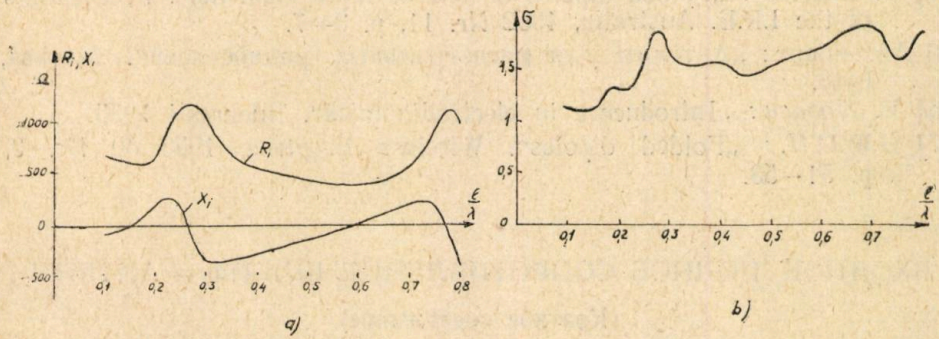


Fig. 10. *a*) L'impédance d'entrée du dipôle replié de C.
b) Le taux d'ondes stationnaires σ sur un feeder de 700 Ω pour le dipôle replié de C.

dipôles repliés en fonction de la fréquence, pour trois cas (les valeurs de Z_A sont extraites de l'ouvrage [2]) :

A. Dipôle replié symétrique ayant $Z_2 = 0$; $n = 2$; $m = 1$; éléments à section circulaire ; $l/d_e = 10$, où d_e est le diamètre du radiateur cylindrique équivalent, calculé à l'aide de la formule $d_e = \sqrt{s\,d}$, d désignant le diamètre des conducteurs de l'antenne et s la distance entre ces conducteurs. La ligne en court circuit, ayant l'impédance caractéristique

Z_{0L}, est raccourcie de façon à ce que sa longueur de résonance soit égale à celle de l'antenne ($l/\lambda = 0{,}22$). Pour Z_{0L} on a considéré la valeur assurant la meilleure compensation des réactances d'entrée : $Z_{0L} = 33\ \Omega$. Les courbes de la fig. 8 montrent que $\sigma < 1{,}1$ dans une bande relative de fréquences de 15%, tandis que dans le cas du dipôle simple analogue on obtient une bande d'adaptation de 5%.

B. Dipôle replié symétrique ayant $Z_2 = \infty$; $n = 2$; $m = 1$; éléments à section circulaire ; $l/d_e = 10$; $Z_{0L} = 800\ \Omega$. La ligne en court circuit est raccourcie pour que sa longueur d'antirésonance soit égale à $l = 0{,}35\ \lambda$ (fig. 9). La bande relative d'adaptation pour $\sigma < 1{,}1$ est de 29%, tandis que la bande d'adaptation dans le cas du dipôle simple analogue est de 6%.

C. Dipôle replié symétrique ayant $n = 2$; $Z_2 = R_2 = 800\ \Omega$; $m = 1$; $l/d_e = 100$; $Z_{0L} = 400\ \Omega$ (fig. 10). On obtient $\sigma < 2$ dans une très large bande de fréquences.

La Chaire d'Electrotechnique
Institut Politechnique Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

[1] *J. Kraus :* „Antennas". Mc. G. Hill Comp. New-York 1945.
[2] *S. Schelkunoff, H. Friis :* „Antennas". New-York 1952.
[3] *G. Corazza :* „Resistenza di radiazione del dipolo ripiegato". Alta Frequenza, 1955 *24* Nr. 1, p. 22—32.
[4] *R. Guertler :* „Folded dipoles of two or more elements". Proceedings of the I.R.E. Australia, 1952 Nr. 11, p. 3—7.
[5] Айзенберг : „Антенны для магистральных радиосвязей". Москва, 1948.
[6] *V. Novacu :* „Introducere în electrodinamică". București 1955.
[7] *G.W.O.H. :* „Folded dipoles". Wireless Engineer 1953 *30* Nr. 3, p. 51—53.

ВХОДНОЕ ПОЛНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ШЛЕЙФ — АНТЕНН

(Краткое содержание)

В работе устанавливается входное полное сопротивление шлейф — антенн в общем случае, в котором шлейф — антенна состоит из n элементов различных сечений, один из них, питаемый, а другие, оканчивающиеся полными сопротивлениями Z_k ; с этой целью используется теорема суперпозиции и разложение токов в симметричные и антисимметричные составляющие. Даны несколько кривых зависимости входного полного сопротивления от частоты для $n = 2$, в случаях $Z_k = 0$, $Z_k = \infty$ и $Z_k = R_k$, которые иллюстрируют широкополосные свойства этого типа антенн.

THE IMPUT IMPEDANCE OF FOLDED DIPOLE AERIALS

(Summary)

The input impedance of the folded dipole type aerials is determined in the general case in which the dipole is buildt up of n elements of arbitrary sections, one being driven and the others being ended on impedances Z_k, using the superposition theorem and the resolution of currents in symmetrical and antisymmetrical components. Several curves of variation of the input impedance with the frequency for $n = 2$, in the cases $Z_k = 0$; $Z_k = \infty$ and $Z_k = R_k$, which illustrate the broad band properties of this type of aerial, are given.

L'IMPÉDANCE D'ENTRÉE DES DIPÔLES REPLIÉS

(Résumé)

On établit l'expression générale de l'impédance d'entrée du dipôle replié à n éléments de section arbitraire, les éléments passifs étant terminés sur des impédances Z_k, en employant le théorème de la superposition et la décomposition des courants en composantes en phase et en antiphase. On donne des courbes de variation de l'impédance d'entrée en fonction de la fréquence pour $n = 2$, dans les cas $Z_k = 0$; $Z_k = \infty$ et $Z_k = R_k$ en illustrant les propriétés concernant la largeur de bande de ces antennes.

DER EINGANGSWIDERSTAND VON FALTDIPOLANTENNEN

(Zusammenfassung)

Mit Hilfe des Superpositionssatzes und der Zerlegung der Ströme in phasengleiche und gegenphasige Komponenten wird der allgemeine Ausdruck des Eingangswiderstandes von Faltdipolantennen mit n Elementen beliebigen Querschnittes, jedes passive Element durch eine Impedanz Z_k abgeschlossen, ermittelt. Es werden die Abhängigkeitskurven des Eingangswiderstandes als Funktion der Frequenz für die Fälle $Z_k = 0$. $Z_k = \infty$ und $Z_k = R_k$ gegeben, die die Breitbandeigenschaften dieser Antennenart veranschaulichen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

REZISTENȚA MATERIALELOR

C. Z. 620.172

MESURES TENSOMETRIQUES SOUS L'EAU, A L'INTERIEUR D'UN CONDUIT SOUS PRESSION

par GH. BUZDUGAN, A. PETRE et M. BLUMENFELD

1. BUT DE L'ETUDE

A l'occasion de l'essai sous pression d'un conduit de forme compliquée, dont le calcul préalable était difficile, on s'est posé le problème d'un examen de la résistance par la méthode tensométrique.

Etant donné que les parties les plus sollicitées de la pièce n'étaient pas accessibles de l'extérieur, on a envisagé — comme unique moyen possible — la mesure des déformations par voie de tensométrie électrique sur la surface intérieure, donc sous l'eau. Le présent article a pour but d'exposer le développement des travaux effectués par un groupe de spécialistes appartenant à la chaire de la Résistance des Matériaux de l'Institut Polytechnique de Bucarest, formé par: le Professeur Gh. Buzdugan, le maître de Conférences A. Petre, le Chef de Travaux M. Blumenfeld, l'Assistant V. Antonescu, le Préparateur Gh. Bora, le Mécanicien en Chef Gh. Tudor et les étudiants Lucia Fetcu et I. Constantinescu.

2. PREPARATION DES MESURES

A l'étranger on a effectué rarement de tels essais, étant donné que la technique des expérimentations exige une longue préparation et qu'on doit résoudre différents problèmes d'ordre technologique. La bibliographie que nous avons utilisée, ne donne pas de détails concluants dans ce domaine. Par consequent, nous avons dû mettre au point une technologie adéquate à la mesure, que nous reproduisons plus bas. Les résultats quantitatifs des mesures proprement-dites n'ont pas été reproduits dans ce travail. En fait, ils ne sont d'aucun intérêt pour le lecteur, pour le but que nous poursuivons dans cet article. Les principaux problèmes à résoudre, pour l'exécution des mesures sous l'eau, ont été les suivants:

a) L'isolation contre l'eau des jauges à fil résistant.

b) L'étancheité et l'isolation des conducteurs électriques à la sortie du récipient sous pression.

c) Le contrôle de l'isolation des conducteurs.

2.1. *L'isolation contre l'eau des jauges à fil résistant.*

Les premiers essais effectués à l'aide de certaines laques protectrices, n'ont pas donné de résultats satisfaisants. L'urgence exigée dans la solution du problème, empêchait l'expérience avec d'autres laques. Ces raisons nous ont amené à utiliser un procédé basé sur l'isolation des jauges à fil resistant à l'aide de l'huile de transformateur. On a fait,

au préalable, une vérification du comportement des jauges dans l'huile de transformateur, en utilisant un récipient d'étalonnage. L'expérience a démontré que les résultats obtenus étaient corrects, et par conséquent, le procédé choisi utilisable.

Par la suite, étant impossible de remplir tout le récipient avec de l'huile de transformateur (approximativement 500 m^3) on a réalisé,

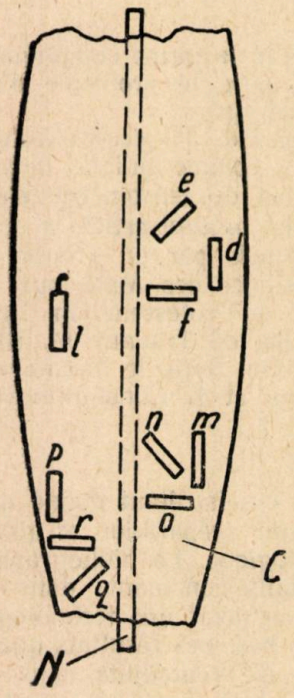


Fig. 1

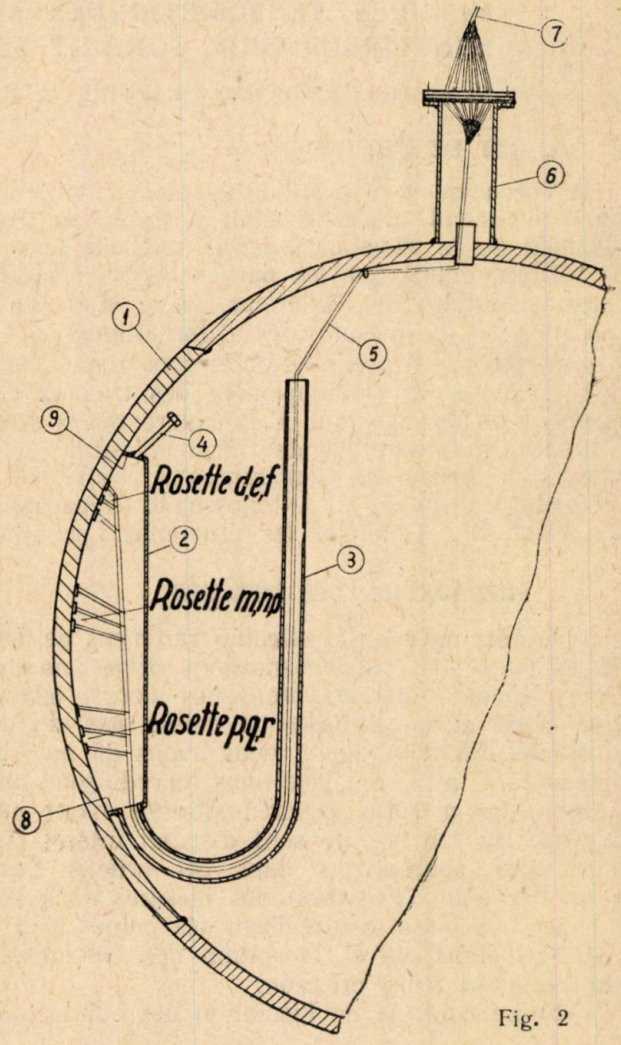


Fig. 2

avec de la tôle mince, un espace destiné à protéger les jauges à fil résistant et qui a été rempli avec de l'huile (figure 2). Pour que cette enveloppe en tôle ne soit pas sollicitée par l'effet de la pression de l'eau, l'espace à l'huile a été mis en communication directe avec l'eau, par un tuyau en U (figure 2). En réalisant cette enveloppe protectrice, on a dû prendre de nombreuses précautions pour éviter spécialement la détérioration des jauges ou des conducteurs, durant l'exécution de la soudure. Les opérations se sont succédées comme il suit :

a) On a appliqué sur la surface étudiée, toute une série de rosettes de jauges (fig. 1) :

$$d,\ e,\ f\ ;$$
$$m,\ n,\ o\ ;$$
$$p,\ q,\ r\ ;$$

Dans cette énumération, la première jauge est verticale, la seconde a une inclinaison de 45°, et la troisième est horizontale.

Sur la figure 1 on voit l'emplacement des jauges à fil résistant. La jauge l est la compensatrice, étant collée sur une tôle non-sollicitée, suspendue à un crochet.

Les jauges ont été collées avec celluloïde dissout dans de l'acétone, et mises à sècher pendant 24 heures.

b) Le lendemain, après le sèchage de la colle, on a soudé les conducteurs électriques aux jauges. Chaque conducteur avait une longueur de 10 mètres. A l'occasion des soudures électriques on a pris des mesures spéciales de protection contre l'éventualité des courts-circuits : les fils de liaison des jauges ont été coupés, pour obtenir des longuers de 3 à 5 mm, l'isolation des conducteurs a été coupée sur une petite longueur de 3 à 5 mm, et, en-dessous de la soudure des conducteurs on a collé, sur le métal, un papier dans la continuation de la jauge.

c) La manière dont on a réalisé l'espace à l'huile, peut être comprise en examinant la figure 2. Les jauges à fil résistant sont collées sur la tôle 1. Le manteau protecteur 2, ainsi que ses couvercles, supérieur et inférieur, 9 et 8, ont été exécutés en forme approximative, dans l'atelier.

Dès le commencement, on a soudé le tuyau 3 à diamètre de 2″, avec le couvercle inférieur 8. On a exécuté ensuite la soudure du couvercle 8 avec la tôle 1, tous les conducteurs étant relevés, donc éloignés de la soudure. Après le refroidissement des soudures, le faisceau de conducteurs 5 a été introduit dans le tuyau 3, tiré à l'aide d'un fil en acier et sorti par l'extrémité supérieure du tuyau. Pour la protection contre l'effet des soudures ultérieures, on a placé, à l'entrée des conducteurs dans le tuyau 3, un tuyau protecteur en asbeste. On a continué ensuite la soudure du manteau protecteur 2, qui a été pendant tout ce temps martelé afin que ses bords reçoivent la forme de la surface sur laquelle il est soudé. De même, on a soudé le fond 8, ainsi que le fond 9, en obtenant ainsi l'étanchement complet de l'espace où se trouvent les jauges.

d) A la fin des opérations de soudure, on a versé de l'huile de transformateur par le col du tuyau 3, jusqu'à ce que l'huile a commencé à couler par le col du tuyau 4. Entre temps, on a réparé, par soudure, ou par martelage, les endroits où l'on a remarqué des écoulements d'huile. Après avoir exécuté ces réparations on a fermé le bouchon fileté du tuyau 4, et on a rempli à l'huile le tuyau 3 jusqu'au refus.

e) Après avoir terminé les opérations mentionnées, les conducteurs ont été enlevés par le récipient 6 et, en utilisant l'amplificateur, on a exécuté le contrôle de la résistance des jauges. On a constaté ainsi qu'aucune des jauges n'était endommagée.

f) On a commencé ensuite à remplir le réservoir avec de l'eau, opération qui a duré approximativement. 42 heures.

2.2. *L'étanchement et l'isolation des fils à la sortie du récipient sous pression.*

A la sortie des conducteurs du récipient on doit réaliser un étanchement contre la perte de la pression, ainsi qu'une isolation électrique. A cette fin, on a soudé dans la partie supérieure du distributeur, le récipient cylindrique 6, qu'on voit sur la figure 3, et qui avait servi, au préalable, à l'étalonnage.

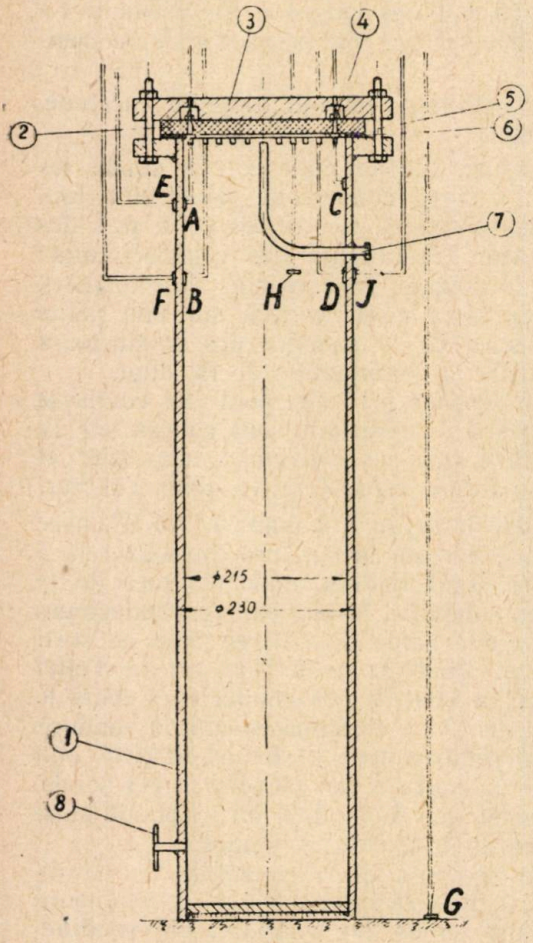


Fig. 3

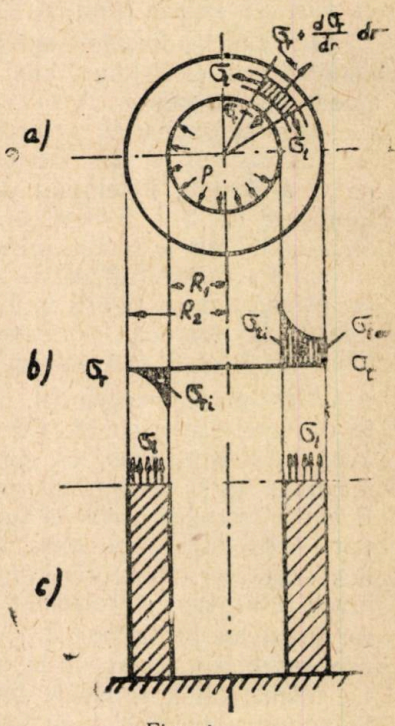


Fig. 4

Le personnel du chantier a résolu le problème de l'isolation contre la pression, de la manière montrée sur la figure 3. Dans la partie supérieure du tuyau 1 se trouve la plaque en pertinaux 2, à 24 trous traversés par les vis coniques 4, auxquelles on attache, par soudure, à l'intérieur et à l'extérieur, les conducteurs électriques.

Etant donné que la plaque en pertinax ne peut pas assumer des contraintes de flexion, elle a été couverte avec la plaque en acier 3,

munie de 24 trous, par lesquels passent les conducteurs isolés. Les extrémités des conducteurs extérieurs, soudées aux vis, sont couvertes avec un tube varnisch, et se trouvent dans les cavités exécutées spécialement sur la plaque 3.

Pour l'étanchement, sous la plaque 2, se trouvent les garnitures 6 collées à laque de bakélite et fortement serrées par les vis 5.

Nous continuerons, par la suite, la description successive des opérations préparatoires des mesures.

g) On a rempli attentivement tout le récipient, d'approximativement 500 m³, avec de l'eau. Au moment où l'eau est arrivée à la moitié du tuyau 6, de la figure 2, on a arrêté l'alimentation. On a laissé, ensuite, l'eau s'écouler lentement, jusqu'à ce que son niveau est arrivé au fond du tuyau 6, qui a été rempli ensuite avec de l'huile de transformateur. De cette manière, les liaisons électriques des extrémités des vis coniques seront plongées dans l'huile, et isolées du point de vue électrique.

h) On a soudé d'abord les conducteurs intérieurs aux extrémités des vis coniques, et ensuite les conducteurs extérieurs. On a exécuté un nouveau contrôle avec l'amplificateur et le résultat obtenu étant satisfaisant, on a fixé le couvercle du tuyau, le réservoir étant ainsi prêt pour les épreuves sous pression.

2.3. *L'isolation des conducteurs sous l'eau.*

Avant de les utiliser, tous les conducteurs qui reliaient, par l'eau, les jauges au couvercle en pertinax, ont été contrôlés du point de vue de l'isolation électrique. Le contrôle a été fait avec l'extensomètre-même, en reliant une jauge à l'extrémité de chaque paire de conducteurs et en les plongeant dans l'eau. On a remplacé les conducteurs qui ne convenaient pas.

3. LES APPAREILS UTILISÉS. OPERATIONS D'ETALONNAGE

On a utilisé pour les mesures, des extensomètres électriques à amplificateur de type SA1, fabriqués en Tchécoslovaquie. L'étalonnage des jauges à fil résistant a été fait à l'aide d'une barre-console d'égale-résistance, en déterminant la constante des jauges.

L'étude de l'effet de la pression et de l'huile de transformateur sur les jauges à fil résistant a été faite en utilisant un récipient spécialement construit pour l'étalonnage, à fond soudé et à couvercle amovible (figures 3 et 5).

Par les essais entrepris, on a contrôlé :

— le mode d'étanchement à la sortie des conducteurs du récipient ;

— le comportement des jauges à fil résistant, à l'huile sous pression ;

— l'effet de la pression sur les indications des jauges à fil résistant.

Conformément à la figure 3, le récipient d'étalonnage se compose des parties suivantes :

1, le corps du récipient ;

2, la bride de tuyau en pertinax, à 24 vis ;

3, le couvercle de résistance, à 24 trous ;

4, les vis pour les contacts électriques ;

5, les vis à fixer le couvercle ;
6, la garniture en klingerit ;
7, la bride de tuyau à lier le manomètre ;
8, la bride de tuyau pour le robinet de remplissage et évacuation.

Les essais préalables, faits avec de l'eau, jusqu'à 60 at, ont démontré que les soudures de ce récipient étalon, ainsi que les boulons résistent, et que l'étanchement, par des vis coniques est adéquate.

Etant donné que les vis coniques, par lesquelles on a fait les liaisons électriques, n'étaient pas isolées à l'intérieur du récipient, il était nécessaire que dans l'intérieur de ce récipient, au moins dans sa partie supérieure, se trouvât de l'huile de transformateur ou de l'air. Pour les essais d'étalonnage, ainsi que pour les essais proprement-dits, on a utilisé l'huile de transformateur.

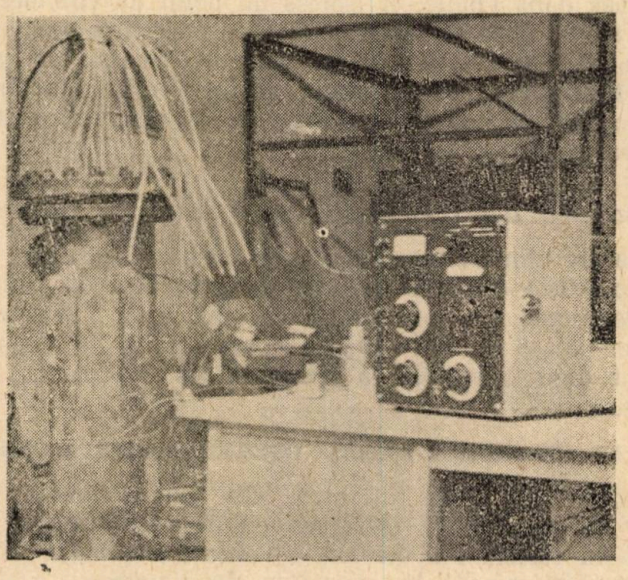


Fig. 5

Le récipient d'étalonnage peut être considéré comme un tube cylindrique à parois épaisses, à l'intérieur duquel se produisent les contraintes montrées sur la figure 4.

Pour une pression donnée p, avec les côtes de la figure 3, les contraintes montrées sur la figure 4 sont les suivantes :

a) Contrainte normale circonférencielle intérieure

$$\sigma_{ti} = p\,\frac{R_2^2 + R_1}{R_2^2 - R_1^2} = p\,\frac{D_2^2 + D_1^2}{D_2^2 - D_1^2} = p\,\frac{529 + 462}{529 - 462} = 14{,}78\,p$$

b) Contrainte normale circonférencielle extérieure

$$\sigma_{te} = p\,\frac{2\,R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = p\,\frac{2\,D_1^2}{D_2^2 - D_1^2} = 13{,}8\,p$$

c) Contrainte normale radiale, intérieure et extérieure

$$\sigma_{ri} = -p\,; \quad \sigma_{re} = 0$$

d) Contrainte normale longitudinale

$$\sigma_l = \frac{p\pi R_1^2}{\pi (R_2^2 - R_1^2)} = p\,\frac{D_1^2}{D_2^2 - D_1^2} = 6{,}9\,p$$

Les allongements unitaires en direction circonférencielle, sont :

a) A l'intérieur

$$\varepsilon_{ti} = \frac{1}{E}[\sigma_{ti} - \mu(\sigma_{ri} + \sigma_l)] = \frac{p(14{,}78 + 0{,}3 - 0{,}3 \times 6{,}9)}{2{,}1 \times 10^6} = 6{,}19 \times 10^{-6}\,p$$

b) à l'extérieur

$$\varepsilon_{te} = \frac{1}{E}[\sigma_{te} - \mu\,\sigma_l] = \frac{p(13{,}8 - 0{,}3 \times 6{,}9)}{2{,}1 \times 10^6} = 5{,}60 \times 10^{-6}\,p$$

On a monté toute une série de jauges à fil résistant, à l'intérieur et à l'extérieur du récipient, ainsi qu'on le voit sur la figure 3, en direction circonférencielle, mesurant donc ε_{ti} et ε_{te}. Les jauges *A*, *B* ont été couvertes de plexiglass. Leurs indications n'ont pas été adéquates, d'où l'on a tiré la conclusion que ce mode de protection n'est pas convenable. Les jauges *C*, *D*, ont fonctionné dans l'huile, et *E*, *F*, *J*, à l'extérieur.. Les jauges *H* et *G* étaient compensatrices, la première fonctionant dans l'huile, et la seconde dans l'atmosphère.

Les essais faits jusqu'à des pressions de 25, respectivement 30 at., ont donné les résultats qu'on voit sur le tableau 1.

En examinant les résultats obtenus avec les jauges intérieures *C* et *D*, pour une variation de pression de 25 at., en haut et en bas, on constate ce qui suit :

— la déformation calculée doit être $\varepsilon_{ti} \approx 155 \times 10^{-6}$;

— les déformations mesurées (les variations des déformations) sont :

la jauge *C*, à la hausse de la pression : $157{,}0 \times 10^{-6}$
„ *C*, à la baisse de la pression : $133{,}0 \times 10^{-6}$
la jauge *D*, à la hausse de la pression : $170{,}0 \times 10^{-6}$
„ *D*, à la baisse de la pression : $160{,}0 \times 10^{-6}$

La valeur moyenne : $155{,}0 \times 10^{-6}$

Il ressort, en moyenne, qu'il y a une concordance parfaite entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées. Ces essais ont montré, d'une part, que les jauges se comportent bien dans l'huile, et, d'autre part, que l'effet de la pression ne modifie point les indications des jauges.

Il est à préciser qu'aux essais entrepris, dans le récipient d'étalonnage il y avait de l'huile dans sa partie supérieure (où se trouvaient les jauges) et de l'eau dans la partie inférieure. La pression a été réalisée à l'aide d'une pompe à piston actionnée à la main.

En ce qui concerne les jauges extérieures *E*, *F*, *J*, les diférences qui existent entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées, ont été un peu plus grandes, allant jusqu'à 18% en moyenne.

On peut, aussi, faire un examen de l'effet de la pression, à l'aide du calcul. En effet, si l'on considère que la déformation de la jauge à fil

Essais avec le récipient d'étalonnage, à l'eau et à l'huile

Tableau 1

Pression	Allongements unitaires ε_t déterminés par calcul		Allongements unitaires déterminés de manière expérimentale									
			A l'intérieur du tuyau				A l'extérieur du tuyau					
			Jauge C		Jauge D		Jauge E		Jauge F		Jauge J	
	A l'intérieur $\varepsilon_{ti} = 10^{-6}x$	A l'extérieur $\varepsilon_{te} = 10^{-6}x$	Lectures au potentiomètre	$\varepsilon_{ti} = 10^{-6}x$	Lectures au potentiomètre	$\varepsilon_{ti} = 10^{-6}x$	Lectures au potentiomètre	$\varepsilon_{te} = 10^{-6}x$	Lectures au potentiomètre	$\varepsilon_{te} = 10^{-6}x$	Lectures au potentiomètre	$\varepsilon_{te} = 10^{-6}x$
0	0	0	4,596	0	7,225	0	8,185	0	8,530	0	10,773	0
5	30,95	28,00	4,540	34,0	7,267	42,0	8,207	22,0	8,555	25,0	10,797	24,0
10	61,90	56,00	4,568	62,0	7,298	73,0	8,245	60,0	8,575	45,0	10,818	45,0
15	92,85	84,00	4,597	91,0	7,327	102,0	8,268	83,0	8,600	70,0	10,840	67,0
20	123,80	112,00	4,626	120,0	7,352	127,0	8,270	85,0	3,618	88,0	10,860	87,0
25	154,75	140,00	4,663	157,0	7,395	170,0	8,298	113,0	8,638	108,0	10,886	113,0
30	185,70	168,00	—	—	—	—	—	—	8,658	128,0	—	—
30	185,70	168,00	—	—	—	—	—	—	8,658	128,0	—	—
25	154,75	140,00	4,632	127,0	7,395	170,0	8,298	113,0	8,637	107,0	10,886	113,0
20	123,80	112,00	4,604	98,0	7,340	115,0	8,270	85,0	8,618	88,0	10,863	90,0
15	92,85	84,00	4,577	71,0	7,320	95,0	8,247	62,0	8,597	67,0	10,838	65,0
10	61,90	56,00	4,552	46,0	7,320	95,0	8,225	40,0	8,585	55,0	10,814	41,0
5	30,95	28,00	4,525	19,0	7,300	75,0	8,204	19,0	8,557	27,0	10,840	67,0
0	0	0	4,500	—6,0	7,235	10,0	8,185	0	—	—	—	—

résistant est due à la déformation du métal sur lequel elle est collée, ainsi qu'à l'effet de la pression, on peut écrire

$$\varepsilon_{lu} = \varepsilon_{réel} + \frac{p\,(1 - 2\,\mu)}{E}$$

où μ, E sont des constantes du matériel de la jauge.

En prenant, approximativement, pour constantan, les valeurs $E = 1{,}8 \times 10^6$ kg/cm^2 et $\mu = 0{,}3$, la relation ci-dessus devient

$$\varepsilon_{lu} = \varepsilon_{ti} + \frac{p\,(1 - 0{,}6)}{1{,}8 \times 10^6} = 6{,}19 \times 10^{-6}\,p + 0{,}22 \times 10^{-6}\,p.$$

On remarque que le terme qui représente l'erreur due à la pression est une fraction

$$\frac{0{,}22}{6{,}19} \times 100 \approx 3{,}5\ \%$$

de la valeur réelle de la déformation. En réalité, l'erreur est complètement écartée par la jauge compensatrice, soumise au même effet de la pression. Par conséquent, les indications des extensomètres, obtenues aux mesures, ont été considérées comme des valeurs réelles probables des déformations de la pièce étudiée.

4. EXECUTION DES MESURES. RESULTATS OBTENUS

Après les opérations d'étalonnage, le récipient cylindrique a été soudé à la partie supérieure du récipient à étudier, ainsi qu'on le voit sur la figure 2, pour servir à l'étanchement et à l'isolation nécessaire pour sortir les conducteurs de l'eau.

On a procédé ensuite à l'exécution des mesures tensométriques en haussant la pression jusqu'à la valeur indiquée et en la baissant jusqu'à 1 at. L'opération a été exécutée trois fois, en faisant des mesures tensométriques à la hausse de la pression tout aussi bien qu'à la baisse.

Parallèlement à l'étude tensométrique à l'intérieur, on a effectué aussi des mesures avec des extensomètres mécaniques de type Huggenberger, dans les endroits extérieurs les plus sollicités du réservoir.

Les valeurs maxima des contraintes, mesurées à l'intérieur par voie électrique, ont été pratiquement égales à celles des endroits rapprochés, mesurées à l'extérieur à l'aide des extensomètres mécaniques.

5. CONCLUSIONS

L'emploi de la solution technologique adoptée par nous, montre que les extensomètres électriques peuvent être utilisés avec succès aux mesures sous l'eau, à des pièces complexes, où les mesures extérieures ne sont pas concluantes.

Chaire de la Résistance des Matériaux
Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. Измерение Механических величин электрическими методами, под редакцией Н.И Пригоровского, Машгиз, 1952.
(Mesure des grandeurs mécaniques par des méthodes électriques, recueil d'articles sous la rédaction du Prof. N. I. Prigorovski).

2. *G. A. Miticenko:* Măsurarea eforturilor unitare pe suprafețe interioare ale vaselor sub presiune (Mesure des contraintes sur les surfaces intérieures des récipients sous pression, article publié dans le recueil „Mesure des contraintes dans les éléments de machines", traduit du russe), București, I.D.T., 1956.

3. Применение тензометрии в машиностроении, под редакциеи П. З. Петухова и А. В. Казанцева, машгиз, 1956
(Application de la tensométrie dans la construction des machines, recueil d'articles sous la rédaction de P. Z. Petuhov et A. V. Kazantzev).

4. *A. M. Turicin:* Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice, București, Edit. Tehnică, 1956 (Mesure électrique des grandeurs non-électriques).

ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПОД ВОДОЙ ВНУТРИ ТРУБОПРОВОДА ПОД ДАВЛЕНИЕМ

(краткое содержание)

Для осуществления тензоме рических измерений под водой, было необходимо решить главным образом задачу изоляции датчиков от воды, а также закупорку и изоляцию электрических проволочек у выхода из распределителя трбопровода. Это достиглось использованием защитной кошомки.

датчиков, наполненной трансформаторным маслом и поставленной в сообщении с водой. Выводы проводников были сделаны через пертинаксовую пластину, служащую изоляцией и дублированную стальной пластиной для прочности. В продолжении описывается вся техника измерений и тарировочных операций.

STRAIN GAGE MEASUREMENTS BELOW WATER IN THE INTERIOR OF A PRESSURE CONTAINER

(Summary)

To obtain strain gage measurements below water it was necesary to solve mainly the problem of insulating the transducers against water as well as to fasten and insulate the electric wires at the container exit. This was accomplished by using a protective box for transducers, filled with transformer oil and connected to the water. The conductor exit was performed tkrough an insulated pertinax plate, doubled by a steel strengthening one. Further paper describes the whole measuring and operation technique.

MESURES TENSOMETRIQUES SOUS L'EAU, A L'INTERIEUR D'UN CONDUIT SOUS PRESSION

(Resumé)

Pour rendre possibles des essais tensométriques sous l'eau, il a été nécessaire de résoudre d'abord le problème de l'isolation contre l'eau, des jauges à fil résistant. Il a fallu que l'étancheté et l'isolation des conducteurs électriques soient assurées à leur sortie du récipient sous pression. On a réalisé cela en protégeant les jauges dans un espace rempli d'huile à transformateurs et qui a été mis en communication avec l'eau du réservoire par un tube en *U*. La sortie des conducteurs a été pratiquée dans une plaque en acier. L'article a été écrit pour montrer la technique des mésures et des opérations d'etalonnage.

DEHNUNGSMESSUNGEN UNTER WASSER IM INNERN EINES DRUCKROHRES

(Zusammenfassung)

Für die Durchführung von Dehnungsmessungen unter Wasser musste zunächst das Problem der Isolierung der Messstreifen gegen Wasser, sowie der Abdichtung und Isolierung der elektrischen Drähte bei ihrer Herausführung aus dem Gefäss grundsätzlich gelöst werden. Dieses wurde erreicht durch Unterbringung der Messstreifen in ein mit Transformatoröl gefülltes Schutzgehäuse, das durch Vermittlung eines *U* Rohres mit dem Wasser in Verbindung gesetzt wurde. Die Leitungen wurden durch eine mittels einer Stahlplatte verstärkte isolierende Pertinaxplatte herausgeführt. Weiterhin wird der gesamte Messvorgang sowie die Auswertung und Eichung der Messungen beschrieben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 1

RECENZII

ЧАСТОТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Проф. инж. Г. КАРТИАНУ

Частотная модуляция занимает важное место в системах радиосвязи исползуемих в настоящее время, благодаря существенных достоинств представляемых ней относительно другими типами модуляции.

К сожалению расчёты напряжений на выходе цепей в случае сигналов модулированных по частоте сложны и кажется что они не могут быть представлены в простой форме, приступные широким кругам техников, имеющих среднего образования.

Много написанных учебников относительно частотной модуляции содержат или слишком простое представленне явлений, исключительно для квазистационарного режима или слишком громоздкие математические расчёты при которых даются сложные и длиные демонстрации, трудные для инженеров. С этой точки зрения работа „Частотная модуляция" профессора Г. Картиану занимает среднее положение. В действительности автор часто упрощает и отказывается от каких-то характеристик сложного изучаемого явления в целях упрощения и облегчения понимания демонстрации но это делается только если соответствующие характеристики являются несущественными и если при этом упрощении сохраняется существенный вид явления. Там где математизация необходима, расчеты представлены кратко и в логическом порядке отбрасая мелкие детали. Такое представление конечно не удовлетворяет математику но в польностю удовлетворяет как проектировщика интересующего конечные формулы и выражения которые он исползует каким-то образом в своей р боты, как и исследовательного инжинера желающий знать точно какие были гипотезы в силу которых была установлена формула, как могут быть изменены эти гипотезы для того чтобы найти новые условня, верные для исследованного явления. Такой вид представления дают возможность охватить большой объём задач и это обясняется том что „Частотная модуляция" являлся важнейшим предметом исследования профессора Г. Картиану в течении многих лет в Политехническом Институте Бухареста.

В общим чертах работа занимается первоначально общими задачами частотной модуляции заключая в этои части и задача определения напряжений на выходе линеиных цепей и следовательно расчёта искажении вносимые любыми линеиными электрическими цепями на вход которых подаются сигналы модулированные по частоте.

Следующая часть занимается задачей щумов являющихся на приёме сигналов с ча тотной модуляцией при одновременном сравне-

нием с той-же самой задачей в случае сигналов с амплитудной модуляцией.

Следует изучение радиопередающих и радио приёмнных устроиств а в последней части изучаются кратко задач измерения в частотном модуляции и также области применения частотной модуляции.

В первой части входят первые две главы. В первои главе изучается задача разложения в гармоницеских составляющих некоторых сигналов модулированных по частоте или по фазе, модулирующий сигнал вудучи разными формами; анализируется также аналогичная задача для сигналов одновременно модулированных по амплитуде и по частоте или по амплитуде и по фазе.

Вторая глава содержит расчёт напряжения на выходе цепей при колебаниях модулированных по амплитуде частоте или фазе. Показывается метод расчета при помощи разложения по составляющих (Фурье) и метод Карсон — Фрай для случая произволных линейных цепей и потом для нескольких частичных случаях (дискриминатор, многоступенный усилитель с резонансными или расстроенными контурами и. т. д.) Для частичных изучаемых сгучаях расчитываются искажения в квазистационарным и динамическим режимах.

Третьяя глава довольно большой а свой предмет является изучением шумов проявляющих при приёме сигналов с частотной модуляцией. В работе устанавливается важное выражение отношения сигнал-шум в системах частотний и амплитудной модуляции а также улучшение в системе Ч. М. относительно систему амплитудной модуляцией. Шумы классифицируются по категориям и особено рассматривается шумы произведены при совмещении полезного сигнала и мешающего сигнала. Это делается как для случая маленких шумов так и для случая когда отношение сигнал-шум приближается к единице.

В четвёртой главе анализируются задач и радиопередающих устроиств модулированных по частоте.

После как обясняется основные принципы конструирования радиопередатчков с частотной модуляцией описывается подробно прямые и косвенные методы получения частотной модуляции. В конце главы приводятся схемы радиопередающих устроиств частотной модуляции.

Пятая глава изучает радиоприёмные устроиства для сигналов частотной мудуляций. Изучение делается по каскадах (входная цепь, преобразователь частоты, каскады промежуточной частоты, ограничитель, и. т. д. подробно с особым вниманием к физических явлениях имеющих место в схеме.

В шестой главе изучается автоматическая подстроика частоты.

Седмая глава содержит краткий анализ нескольких задач в связи с измерением отклонения частоты некоторого сигнала частотной модуляцией а также с измерениями проделанными в радиоприёмных устроиств частотной модуляций.

Последния глава, то есть восьмая глава, анализирует в общих чертах области применения частотной модуляции (радиовещание, телевидение, радиорелейные линии).

Сделанное выше представление содержания глав дает только непольное мнение об огромном количестве и отличном качестве мате-

рияла ыниги. Надо поэтому показать что работа „Частотная модуляция“ даёт ответ на очень многих задачах которых ставит инжинерская прахтика.

Работа профессора Картиану каторую рекомандируем читательям может быть использована всяким инжинером работающим в области частотной модуляции.

Однако многие из глав в пристутной форме более широкому кругу техников, Решение задач почти всегда делается в целях правильного установления некоторых приёмов или удобных формул в предложениях. Книга содержит много оригинальных метод решения некоторых задач встретенных в практике. Так является случай метода решения урав, нения колебательного цеия с переменными параметрами во время, расчет искажении внесенных многими цепями, возбуждаемыми сигналами частотной модуляцией, расчёт усилителей промежуточной частоты, метод проектирования фазового дискриминатора или детектора отношения. Синтетизирующие глава основаны на богатую документацию, то что доказывает большая литература цитированная на конце каждой главы. С точки зрения графического исполнения работа сделана акуратно, рисунки и таблицы хорошо напечатанны. Какие-то опечатки требовали-бы прибавление к книги эрату; надо показать что немногие и несущественые опечатки могут быть удалёны очень легко в последующем выпуске.

Имея качества указаны выше, работа „Частотная модуляция“ профессора Г. Картиану представляет собой основную работу румынской радиотехнической литературы и важныи вклад в мирной радиотехнической литературы.

Мугур Сэвеску

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de pronume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent, Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

Responsabil de carte: Ing. A. SĂVESCU
Tehnoredactor: Ing. A. SĂVESCU
Corector: Colectivul de autori

Dat la cules 12.X.1958 - Bun de tipar 30.XII.1958 - Tiraj 2000.
hîrtie semi velină 70/100/45 - Coli de tipar 13 A. - 400

Tiparul executat sub cda. nr. 1993 de Litografia
și Tipografia Învățămîntului, str. Mihai Vodă 44-46 București

F 1130

KAT

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XX — FASCICOLA 2

APRILIE — IUNIE

1958

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках продолжением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производится по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges des publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului“)

ORSZÁGOS·MŰSZAKI·KÖNYVTÁR
1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XX — FASCICOLA 2

APRILIE — IUNIE
1958

COMITETUL DE REDACȚIE:

Prof. *Antoniu S. Ion;* Prof. *Ausländer Iosif;* Prof. *Buzdugan Gh.*; Conf. *Călin Sergiu;* Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. *Ionescu Tudor;* Acad. Prof. *Negrescu Traian*; Acad. Prof. *Neniţescu Costin;* Prof. *Nicolau Edmond;* Prof. *Răduleț Remus,* membru corespondent al Academiei R. P. R.; Prof. *Tănăsescu Tudor,* membru corespondent al Academiei R.P.R.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
membru corespondent al Academiei R. P. R.

SUMAR

MATEMATICA

C. IONESCU-BUJOR — Sur certaines suites de transformations 13

HAR. P. IONESCU — Une représentation vectorielle des courbes planes et quelques propriétés 23

GH. SIMIONESCU — Reducerea ecuației generale de gr. II în cazul $\delta = 0$ printr-o translație urmată de o rotație . . 33

M. GUTMANN — Quelques opérations linéaires de type delta-Dirac 39

M. GUTMANN — La convérgence en delta et le calcul opérationnel singulier 47

A. TĂNĂSESCU — Note sur la ponctuation des épures d'intersection des polyèdres et des surfaces 55

HIDRAULICĂ

D. TAȘCĂ — Remarques sur les relations entre les tensions et les vitesses de deformations unitaires dans le mouvement laminaire des fluides réels incompressibles 61

ST. ZAREA — The helicoïdal movement Gromeca-Beltrami of fluide parfait dans une conduite cylindrique, circulaire . . 65

TEHNOLOGIA COMPUȘILOR MACROMOLECULARI

O. SOLOMON, E. NUȚESCU — Suspensionsagenten für die Perlpolymerisation 71

CHIMIE ANALITICĂ

V. ARMEANU, D. CAMBOLI, C. IANCU — Une nouvelle methode sensible pour déceler le nickel 81

V. ARMEANU, D. CAMBOLI, C. IANCU — Une nouvelle methode sensible pour déceler le fer trivalent 85

V. ARMEANU, N. CĂPLESCU, G. MIHAIL — I Une nouvelle méthode semi-micro-analytique pour le dosage gravimétrique de cuivre en présence de mercure 89
V. ARMEANU, N. CĂPLESCU, G. MIHAIL — II Méhtode rapide et precise sémi-micro-gravimétrique pour le dosage du mercure en présence du cuivre 93

CHIMIE FIZICĂ

V. PĂRĂUȘANU, O. LANDAUER — Gefrierspunktmessungen in nichtwässerigen Lösungen 97

ELECTROCHIMIE

I. ATANASIU, L. BLUM, M. POPA — La reduction électrolytique du p-nitrophénétole en p-phénétidine à l'aide d'une électrode rotative 103
L. BLUM - LAZĂR — Die elektrochemische chlorierung von Paraffinwachs 109

CHIMIE TEHNOLOGICĂ

I. BLUM, FR. BOLCHI, B. BERCOVICI, E. POPESCU — Le fractionnement gravimétrique utilisé comme méthode de caracterisation physico-chimique des charbons jeunes. I. L'etude des lignites de Rovinari et Schitu-Golești 113
I. DRIMUȘ, E. SCHUSTER — Die Möglichkeit das chinesishe Holzöl und Leinöl durch Risinusöl zu ersetzen 123
I. DRIMUȘ, M. KLANG, F. SCHEUERMAN — Das Problem der Separierung einiger neutralen Verbindungen, bei der Fabrikation der Fettsauren durch die Oxydation der Paraffine 129

ELECTROTEHNICĂ

C. MOCANU — Contributions à l'étude des multipôles linéaires actifs et passifs 141

ELECTRONICĂ

R. PIRINGHER — Notă asupra aproximării matematice a caracteristicelor dinatron și tranzitron 167

UNDE ELECTROMAGNETICE

E. NICOLAU, A. DOBRESCU — On inhomogeneous electromagnetic waves 175
A. MILLEA — Une contribution à l'étude électrodynamique directe de la propagation des ondes sur les lignes de transmission 183

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

К. ИОНЕСКУ-БУЖОР — О ряде преобразований . . . 13
Х. ИОНЕСКУ — Векторные представление кривых на плоскости и некоторые свойства 23
Г. СИМИОНЕСКУ — Преобразование общего уравнения 2-ой степени в случае $\delta = 0$ путём переноса с последующим поворотом 33
М. ГУТМАНН — Несколько приложений особенных дельта-функции Дирака 39
М. ГУТМАНН — Сходимость в делта и особенное операционное исчисление 47
А. ТАНАСЕСКУ — О видимости чертежей пересечения многогранников с поверхностями 55

ГИДРАВЛИКА

А. ТАШКЭ — Замечания относительно отношений между напряжениями и скоростями единой деформаций в ламинарных течениях реальных несжимаемых жидкостей 61
Ш. ЗАРЕА — Винтовое движение Громека-Белтрами идеальной жидкости в круговом цилиндрическом трубопроводе 65

ТЕХНОЛОГИЯ ПОЛИМЕРОВ

О. СОЛОМОН, Е. НУЦЕСКУ — Суспензионые агенты для бисерной полимеризации 71

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. АРМЕАНУ, Д. КАМБОЛИ, К. ЯНКУ — Новый чувствительный метод открытия никсля 81
А. АРМЕАНУ, Д. КАМБОЛИ, К. ЯНКУ — Новый чувствительный метод открытия железа 85

В. АРМЕАНУ, Н. КЭПЛЕСКУ, Г. МИХАИЛ — Новый полумикроаналитический метод для гравиметрической дозировки меди в присутсвии ртути 89
В. АРМЕАНУ, Н. КЭПЛЕСКУ, Г. МИХАИЛ — Скорый и точный полумикрогравиметрический метод для дозировки ртути в присутствии меди 93

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

В. ПЭРЭУШАНУ, О. ЛАНДАУЕР — Криоскопические измерения в неводных растворах 97

ЭЛЕКТРОХИМИЯ

И. АТАНАСИУ, Л. БЛУМ, М. ПОПА — Восстановления р-нитрофенетола в р-фенетидин при помоши вращающегося катода 103
Л. БЛУМ - ЛАЗЭР — Электрохимическое хлорирование парафина 109

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

И. БЛУМ, Ф. БОЛКИ, Б. БЕРКОВИЧ, Е. ПОПЕСКУ — Гравиметрическое фракционирование как метод физико-химической характеристики молодых углеи 113
И. ДРИМУШ, Е. ШУСТЕР — Возможность замены тунгового масла и линового масла касторовым маслом . . 123
И. ДРИМУШ, М. КЛАНГ, Ф. ШОЕРМАН — Вопрос разделения некоторых неитральных продуктов полученных при производстве жирных кислот окислением парафинов 129

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

К. МОКАНУ — Вклад к изучению линейных активных и пассивных многополюсов 141

ЭЛЕКТРОНИКА

Р. ПИРИНГЕР — К аналитической апроксимации динатронных и транзитронных характеристик 167

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Е. НИКОЛАУ, А. ДОБРЕСКУ — Неоднородные электромагнитные волны 175
А. МИЛЛЕА — К непосредственной электродинамической трактовке распространения волн по длинным линиям . 183

CONTENTS

MATHEMATICS

C. IONESCU-BUJOR — Some transformations 13

HAR. P. IONESCU — A vectorial representation of plane curves and some properties 23

GH. SIMIONESCU — Reduction of the general ecuation of second degree in case of $\delta = 0$ by a translation followed by a rotation 33

M. GUTMANN — Some linear operations of delta-Dirac type 39

M. GUTMANN — The convergence in delta and the singular operational calculus 47

A. TĂNĂSESCU — Over the punctuation of the intersections between polyedres and surfaces 55

HYDRODINAMICS

D. TAȘCĂ — Remarks on the relationship between stresses and velocities of unit deformation in the laminar of real uncompressible fluids 61

ST. ZAREA — The helicoïdal movement Gromeca-Beltrami of an ideal fluid in a cylindrical circular pipe 65

TECHNOLOGY OF POLYMERS

O. SOLOMON, E. NUȚESCU — Suspension agents for suspension polymerisation 71

ANALYTICAL CHEMISTRY

V. ARMEANU, D. CAMBOLI, C. IANCU — A new sensible method for discovering the nickel 81

V. ARMEANU, D. CAMBOLI, C. IANCU — A new sensible method for discovering the iron 85

V. ARMEANU, N. CĂPLESCU, G. MIHAIL — A new semi-micro-analytical method for the gravimetric estimation of copper in the presence of mercury 89
V. ARMEANU, N. CĂPLESCU, G. MIHAIL — Quick and accurate semi-micro-gravimetric method for estimation of mercury in the presence of copper 93

PHYSICAL CHEMISTRY

V. PĂRĂUȘANU, O. LANDAUER — Crioscopical measurements in the no-watery solutions 97

ELECTROCHEMISTRY

I. ATANASIU, L. BLUM, M. POPA — The electrochemical reduction of p-nitrophenetol to p-phenetidin by using a rotating cathode 103
L. BLUM, — LAZĂR — The electrochemical chlorination of paraffin wax 109

TECHNOLOGYCAL CHEMISTRY

I. BLUM, FR. BOLCHI, B. BERCOVICI, E. POPESCU — The gravimetric fractionation as a methode of physicochemical caracterisation of young coals 113
I. DRIMUȘ, E. SCHUSTER — The posibility of replacing tung and linoil by ricin oil 123
I. DRIMUȘ, M. KLANG, F. SCHEUERMANN — The problem of the separation of certain neutral products in the manufacture of fatty acids through the oxidation of paraffins . . 129

ELECTRICITY

C. MOCANU — Contributions to the studyng active and passive linear multipoles 141

ELECTRONICS

R. PIRINGER — Note concerning the analytical approximation of dynatron and transitron characteristics 167

ELECTROMAGNETIC WAWES

E. NICOLAU, E. DOBRESCU — On inhomogeneous electromag netic wawes 175
A. MILLEA — A contribution to the direct electrodynamical treatement of wawe propagation on transmission lines . . 183

SOMMAIRE

MATHEMATIQUE

C. IONESU-BUJOR — Sur certaines suites de transformations 13

HAR. P. IONESCU — Une représentation vectorielle des courbes planes et quelques propriétés 23

GH. SIMIONESCU — La réduction de l'équation générale de II-ème degré dans le cas $\delta = 0$ par une translation suivie d'une rotation 33

M. GUTMANN — Quelques opérations linéaires de type delta-Dirac 39

M. GUTMANN — La convérgence en delta et le calcul opérationnel singulier 47

A. TĂNĂSESCU — Note sur la ponctuation des épures d'intersection des polyèdres et des surfaces 55

HYDRAULIQUE

D. IAȘCĂ — Remarques sur les relations entre les tensions et les vitesses de déformations unitaires dans le mouvement laminaire des fluides réels incompressibles 61

ST. ZAREA — Le mouvement hélicoïdal Gromeca-Beltrami d'un fluide parfait dans une conduite cylindrique circulaire . . 65

LA TECHNOLOGIE DES POLYMÈRES

O. SOLOMON, E. NUȚESCU — Agents de suspension pour la polymerisation en perles 71

CHIMIE ANALITIQUE

V. ARMEANU, O. CAMBOLI, C. IANCU — Une nouvelle méthode sensible pour déceler le nickel 81

V. ARMEANU, O. CAMBOLI, C. IANCU — Une nouvelle méthode sensible pour déceler le fer trivalent 85

V. ARMEANU, N. CĂPLESCU, G. MIHAIL — Une nouvelle méthode semi-micro-analytique pour le dosage gravimétrique de cuivre en présence de mercure 89
V. ARMEANU, N. CĂPLESCU, G. MIHAIL — II Méthode rapide et précise sémi-micro-gravimétrique pour le dosage du mercure en présence du cuivre 93

CHIMIE PHYSIQUE

V. PĂRĂUȘANU, O. LANDAUER — Mesures cryoscopiques dans les solutions non aqueuses. 97

ELECTROCHIMIE

I. ATANASIU, L. BLUM, M. POPA — La réduction electrolytique du p-nitrophénétole en p-phénétidine à l'aide d'une électrode rotative 103
L. BLUM, LAZĂR — La chloruration électrochimique de la paraffine 109

CHIMIE TECHNOLOGIQUE

I. BLUM, FR. BOLCHI, B. BERCOVICI, E. POPESCU — Le fractionnement gravimétrique utilisé comme méthode de caracterisation physico-chimique des charbons jeunes 113
I. DRIMUȘ, E. SCHUSTER — La posibilité du remplacement de l'huile de tung et de lin avec de l'huile de ricin . . . 123
I. DRIMUȘ, M. KLANG, F. SCHENERMAN — Le probleme de la séparation de certains produits neutres dans la fabrication des acides gras, par l'oxydation des paraffines . . 129

ELECTROTECHNIQUE

C. MOCANU — Contributions à l'étude des multipôles linéaires actifs et passifs 141

ELECTRONIQUE

R. PIRINGER — Note sur l'approximation mathématique des caractéristiques dynatron et transitron 167

ONDES ELECTROMAGNETIQUES

ED. NICOLAU — Sur les ondes electromagnetiques non-homogenes 175
A. MILLEA — Une contributions à l'étude éléctrodynamique directe de la propagation des ondes sur les lignes de transmission 183

INHALT

MATHEMATIK

C. IONESCU-BUJOR — Über einige Folgen von Transformationen 13

HAR. P. IONESCU — Über eine vektorielle Darstellung der ebenen Kurven und einige ihrer Eigenschaften 23

GH. SIMIONESCU — Das Reduzieren der allgemeinen Gleichung II-ten Grades im Falle $\delta = 0$ durch eine parallele, von einer umdrehung befolgte, Verschebung. . . . 33

M. GUTMANN — Einige lineare Operationen vom delta-Dirac typus 39

M. GUTMANN — Die Konvergenz in delta und die singuläre Operational-rechnung 47

A. TĂNĂSESCU — Über die Sichtbarkeit der Aufrisse der Schnitte von Vielflächen und Flächen 55

HYDRODYNAMIK

D. TAȘCĂ — Bemerkungen über die Beziehungen zwischen den Spannungen und die spezifische Deformations geschwidigkeiten bei der laminor strömung der zöhen Flüssigkeiten . 61

ST. ZAREA — Spirabewegung Gromeca — Beltrami einer idealen Flüssigkeit in einem zylindrischen Kreisrohr . . . 65

TEHNOLOGIE DER KUNSTSTOFFE

O. SOLOMON, E. NUȚESCU — Suspensionagenten für die Perpolymerisation 71

ANALYTISCHE CHEMIE

V. ARMEANU, D. CAMBLI, C. IANCU — Eine neue empfindliche qualitative Bestimmungs methode für Nickel . . . 81

V. ARMEANU, D. CAMBOLI, C. IANCU — Eine neue empfindliche qualitative Bestimmungsmethode für Eisen . . . 85

V. ARMEANU, N. CĂPLESCU, G.MIHAIL — Eine neue semi-micro-analytische Methode für die gravimetrische Bestimmung des Kupfers neben des Quecksilbers 89
V. ARMEANU, N. CĂPLESCU, G.MIHAIL — Eine schnelle und genaue semi-mikro-analytische gravimetrische Methode für die Bestimmung des Quecksilbers neben des Kupfers . 93

PHYSIKALISCHE CHEMIE

V. PĂRĂUȘANU, O. LANDAUER — Gefrierspunktmesungen in nichtwässerigen Lösungen 97

ELEKTROCHEMIE

I. ATANASIU, L. BLUM, M. POPA — Die elektrolytische Reduktion des p-Nitrophenetols zu p-Phenetidine mit Hilfe einer rotierenden Kathode 103
L. BLUM-LAZĂR — Die elektrochemische Chlorierung von Paraffinwachs 109

TEHNOLOGISCHE CHEMIE

I. BLUM, FR. BOLCHI, B. BERCOVICI, E. POPESCU — Gravimetrische fraktionierung als Methode zur physikalisch-chemischen Kennezeichnung der jüngeren Kohlen 113
I. DRIMUȘ, E. SCHUSTER — Die Möglichkeit das chinesische Holzöl und Leinöl durch Rizinusöl zu ersetzen 123
I. DRIMUȘ, M. KLANG, F. SCHEUERMANN — Das Problem der Separierung einiger neutralen Verbindungen, bei der Fabrikation der Fettsauren durch die Oxydation der Paraffine 129

ELEKTROTECHNIK

C. MOCANU — Beiträge zum Studium der aktiven und passiven linieären Mehrpole 141

ELEKTRONIK

R. PIRINGER — Note über mathematische Annäherungsausdrücke für Dynatron-und Transitron-Kennlinien 167

ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

E. NICOLAU, A. DOBRESCU — Über nicht homogene elecktromagnetische Wellen 175
A. MILEA — Beitrag zur direkten elektrodynamischen Behandlung der Wellenverbreitung auf Langen Leitungen . . . 183

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

MATEMATICA

517.5

SUR CERTAINES SUITES DE TRANSFORMATIONS *)

par CONSTANTIN IONESCU-BUJOR

1°. *La transformation pédale.* Considérons le triangle $T \equiv ABC$ et le point O dans son plan.

Soit T_1 le triangle pédal du point O dans le triangle T, à savoir le triangle formé par les points A_1 (BC, AO), B_1 (CA, BO), C_1 (AB, CO), de même soit T_2 le triangle pédal du point O dans le triangle T_1, en général T_n le triangle pédal du même point par rapport au triangle T_{n-1}.

Si M est un point du plan ABC et si l'on note A^1, B^1, C^1 les points (AM, B_1C_1), (BM, C_1A_1), (CM, A_1B_1), les droites A_1A^1, B_1B^1, C_1C^1 concourent en un point Q_1.

On nomme Q_1 *le transformé pédal du point M dans le triangle T, par rapport au point O.*

Soit Q_2 le transformé pédal du point Q_1 dans le triangle T_1 par rapport au même point O, en général soit Q_n le transformé pédal du point Q_{n-1} dans le triangle T_{n-1}, par rapport au point O.

De cette manière nous avons défini une suite de transformations qui font correspondre succesivement à un point M la suite de points

$$Q_1, Q_2, \ldots Q_n, \ldots$$

Je veux préciser la nature de ces transformations et les généraliser, en observant que si l'on considère un système de coordonnées projectives, défini par le triangle T et par un point U $(1, 1, 1)$, où M (x_1, x_2, x_3), Q_1 (y_1, y_2, y_3) et O $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, on a

$$\varrho \frac{y_1}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2 x_2} + \frac{1}{\alpha_3 x_3}$$

$$\varrho \frac{y_2}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1 x_1} + \frac{1}{\alpha_3 x_3} \qquad (1)$$

$$\varrho \frac{y_3}{\alpha_3} = \frac{1}{\alpha_1 x_1} + \frac{1}{\alpha_2 x_2}.$$

Ces relations montrent que le point Q_1, dérive du point M par l'application du produit de transformations

$$\varrho_1 \xi_i = \frac{1}{x_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad (2)$$

*) Communication presentée à la IV-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest (le 18—19 Oct. 1958).

et

$$\varrho_2 \frac{y_1}{\alpha_1} = \frac{\xi_2}{\alpha_2} + \frac{\xi_3}{\alpha_3}$$
$$\varrho_2 \frac{y_2}{\alpha_2} = \frac{\xi_1}{\alpha_1} + \frac{\xi_3}{\alpha_3} \qquad (3)$$
$$\varrho_2 \frac{y_3}{\alpha_3} = \frac{\xi_1}{\alpha_1} + \frac{\xi_2}{\alpha_2}.$$

La dernière transformation est une homologie dont le centre est le point O et qui a pour axe la polaire trilinéaire du point O par rapport au triangle T.

2°. *L'inversion projective.*

L'inversion projective par rapport au système T, U c'est la transformation définie par les relations (2). Soit P cette transformation. Le point $N(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est l'inverse projectif du point $M(x_1, x_2, x_3)$ par rapport au système T, U. On a

$$P^2 = 1.$$

On déduit

$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = 1 : \frac{x_1}{x_3}$$

et, si l'on note $V(\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta)$ le rapport anharmonique du faisceau de droites dont le sommet est V et dont les rayons passent par les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ on a

$$\frac{x_1}{x_3} = A(BCUM), \quad \frac{\xi_1}{\xi_3} = A(BCUN).$$

Il résulte

$$A(BCUN) = \frac{1}{A(BCUM)}. \qquad (4)$$

On déduit de la même manière :

$$B(CAUN) = \frac{1}{B(CAUM)}, \quad C(ABUN) = \frac{1}{C(ABUM)}. \qquad (5)$$

Réciproquement, les relations (4), (5) conduisent aux relations (3).

Donc, *deux points, inverses projectives par rapport au système T, U satisfont aux relations (4), (5).*

Cette définition ne suppose pas que T soit le triangle de référence du système de coordonnées, ce qui nous permet de définir simultanement des inversions projectives par rapport à d'autres systèmes (triangle T_q, point U_q).

3°. *Théorème. Etant donnés le triangle T, le point U et les points M, N correspondants dans une inversion projective par rapport au système T, U, si H est une homographie qui transforme le triangle T et les points U, M, N en T_1, U_1, M_1, N_1, alors les points M_1, N_1 sont en inversion projective par rapport au système T_1, U_1.*

Si les points A_1, B_1, C_1, correspondent à A, B, C, l'invariance du rapport anharmonique à la suite de l'application de l'homographie H, donne

$$A\,(BCUM) = A_1\,(B_1\,C_1\,U_1\,M_1),$$

$$A\,(BCUN) = A_1\,(B_1\,C_1\,U_1\,N_1),$$

donc la relation (4) devient

$$A_1\,(B_1\,C_1\,U_1\,N_1) = \frac{1}{A_1\,(B_1\,C_1\,U_1\,M_1)}. \qquad (4')$$

Ce résultat joint aux relations, qui s'obtiennent de (5) en raison de l'application de H, nous montre qu'il existe une correspondance inverse projective par rapport au système T_1, U_1, entre les points M_1, N_1. Désignons-la par P_1.

4°. *La suite des inversions projectives engendrée par l'application successive de l'homographie H.*

Soit

$$T_1,\ T_2, \ldots, T_q \ldots$$

la suite des triangles qui résulte du triangle T par l'application des homographies

$$H,\ H^2, \ldots H^q \ldots \qquad (6)$$

La suite (6) transforme de même les points U, M, N en

$$U_1,\ U_2, \ldots, U_q \ldots$$

$$M_1,\ M_2, \ldots, M_q \ldots$$

$$N_1,\ N_2, \ldots, N_q \ldots$$

Si les points M, N sont correspondants dans l'inversion projective P par rapport au système T, U, alors les points M_1, N_1 sont correspondants dans l'inversion projective P_1 par rapport au système T_1, U_1 (§ 3°).

On déduit de la même manière pue les points M_2, N_2 sont correspondants dans une inversion projective P_2, définie par le système T_2, U_2. En général, les points M_q, T_q sont en correspondance inverse P_q dans le système T_q, U_q.

On obtient ainsi la suite des inversions projectives engendrée par l'application successive de l'homographie H :

$$P_1,\ P_2 \ldots, P_q, \ldots \qquad (7)$$

Les termes de cette suite seront exprimés en P, H.

En effet, on transforme le point M_1 en M par H^{-1}, le point M en N par l'inversion projective P et le point N en N_1 par l'homographie H.

Donc

$$P_1 = H\,P\,H^{-1}$$

et, en général, nous venons d'obtenir de la même manière

$$P_q = H^q\,P\,H^{-q} \tag{8}$$

On déduit

$$P = H^{-q}\,P_q\,H^q \tag{9}$$

et

$$P_q\,H^q = H^q\,P.$$

5°. *La suite de produits des transformations* $H\,P_i$. Considérons les transformations

$$C_{q+1} = H\,P_q \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots\ P \equiv P_0).$$

et la suite

$$C_1,\ C_2C_1,\ C_3C_2C_1, \ldots \tag{10}$$

C'est comme je viendrai de montrer plus loin, la suite des transformatons pédales considérée à (§ 1°), lorsque H est une homographie particulière, à savoir l'homologie (3).

Les termes de la suite (10) s'expriment en H, P de la manière suivante :

$$C_1 = H\,P\,;$$

$$C_2\,C_1 = (H\,P_1)\,(H\,P) = H\,(H\,P\,H^{-1})\,(H\,P) = H^2\,;$$

$$C_3\,C_2\,C_1 = C_3\,H^2 = (H\,P_2)\,H^2 = H\,(H^2\,P\,H^{-2})\,H^2 = H^3\,P\,;$$

$$C_4\,C_3\,C_2\,C_1 = C_4\,(H^3\,P) = (H\,P_3)\,(H^3\,P) = H\,(H^3\,P\,H^{-3})\,(H^3\,P) = H^4.$$

En général,

$$C_{2r}\,C_{2r-1} \ldots C_1 = H^{2r}, \tag{11}$$

$$C_{2r+1}\,C_{2r} \ldots C_1 = H^{2r+1}\,P, \tag{12}$$

de sorte que la suite (10) équivaut à la suite

$$HP,\ H^2,\ H^3P,\ H^4, \ldots,\ H^{2r},\ H^{2r+1}\,P, \ldots \tag{10'}$$

ce qui montre que les transformations de rang impair de la suite (10) sont des transformations quadratiques, tandis que celles dont le rang est pair sont des homographies.

Il en résulte de même que par l'application des transformations (10) le point M est transformé successivement en

$$N_1,\ M_2,\ N_3,\ M_4, \ldots,\ M_{2r},\ N_{2r+1}, \ldots \tag{13}$$

pendant que le point N est transformé en

$$M_1,\ N_2,\ M_3,\ N_4, \ldots N_{2r},\ M_{2r+1} \ldots \tag{14}$$

Donc lorsq'on transforme un point M par la suite de transformations (10), on trouve une suite de points dont les termes de rang pair sont les homologues de M dans les homographies

$$H^2, H^4, \ldots, H^{2r} \ldots \tag{15}$$

dont les termes de rang impair sont les homologues de son inverse projectif par rapport au système T, U, dans les homographies

$$H, H^3, \ldots H^{2r+1} \ldots \tag{16}$$

6⁰. *Sur l'ensemble des suites (10)*

En considérant le triangle T, le point U et l'inversion projective P par rapport au système T, U, de même que l'ensemble des homographies du plan $[H]$, on construit avec chaque homographie de l'ensemble $[H]$ une suite (10).

Quelles sont les suites (10), qui transforment le point quelconque M, tel que la suite obtenue

$$N_1, M_2, N_3, M_4 \ldots$$

soit fermée, à savoir

$$N_{2r+1} \equiv M \quad \text{ou} \quad M_{2r} \equiv M \,?$$

Si pour une suite (10) on avait

$$N_{2r+1} \equiv M,$$

il faudrait

$$H^{2r+1} P \equiv 1,$$

ou, en faisant le produit à droite par P,

$$H^{2r+1} \equiv P$$

ce qui n'a pas du sens.

Si pour une suite (10) on avait

$$M_{2r} \equiv M, \tag{17}$$

alors

$$H^{2r} = 1,$$

donc pour $M(x_1, x_2, x_3)$, $M_{2r}(z_1, z_2, z_3)$ on aurait

$$\varrho\, z_i = \delta_{ij}\, x_j$$

(où δ_{ij} est le symbole de Kronecker).

Mais pour M_1 (y_1, y_2, y_3) les équations de l'homographie H étant

$$\varrho\, y_i = a_{ij}\, x_j,$$

en désignant par

$$\delta = | a_{ij} | ,$$

on a

$$| \delta_{ij} | = \delta^r .$$

Par conséquent,

$$\delta = \pm 1.$$

Donc les homnographies H, qui satisfont à la condition (17), sont — en laissant de côté la transformation identique H_0:

$$(H_1) \quad \varrho\, y_1 = x_2, \quad \varrho\, y_2 = x_3, \quad \varrho\, y_3 = x_1 ;$$

$$(H_2) \quad \varrho\, y_1 = x_3, \quad \varrho\, y_2 = x_1, \quad \varrho\, y_3 = x_2 ;$$

$$(H') \quad \varrho\, y_1 = x_1, \quad \varrho\, y_2 = x_3, \quad \varrho\, y_3 = x_2 ;$$

$$(H'') \quad \varrho\, y_1 = x_3, \quad \varrho\, y_2 = x_2, \quad \varrho\, y_3 = x_1 ;$$

$$(H''') \quad \varrho\, y_1 = x_2, \quad \varrho\, y_2 = x_1, \quad \varrho\, y_3 = x_3.$$

Lorsqu'on emploie à la construction de la suite (10) l'homographie H_1 ou H_2, alors la suite (13) est fermée à M_6. Elle est fermée à M_2 si on considère les homographies H', H'', H'''.

7°. *Propriétés.* a). Considérons la droite

$$(\Delta) \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad (a, b, c \neq 0)$$

et la conique

$$(\Gamma) \quad ax_2x_3 + bx_3x_1 + cx_1x_2 = 0$$

circonscrite au triangle T.

Désignons par

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_q, \ldots$$

les droites qui résultent de (Δ) par l'application de la suite (5), par

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_q, \ldots$$

les coniques circonscrites aux triangles

$$T_1, T_2, \ldots T_q \ldots$$

déduites de (Γ) par l'application de la même suite (5).

On conclut de ce qui a été dit, que (Δ) est transformée par la suite (10) successivement en

$$\Gamma_1, \Delta_2, \Gamma_3, \Delta_4, \ldots$$

de même que (Γ) est transformée en

$$\Delta_1, \Gamma_2, \Delta_3, \Gamma_4, \ldots$$

b) Si H est une homologie dont le centre est O, les termes de rang pair de la suite (13) sont en ligne droite sur $O\,M$, les termes de rang impair appartiennent à la droite $O\,N$.

8°. *H homologie du groupe* $\omega_2(0, \lambda)$.

En utilisant les notations du (§ 1°), les transformations

$$\begin{aligned}
\varrho \frac{y_1}{\alpha_1} &= \lambda \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} + \frac{x_3}{\alpha_3} \\
\varrho \frac{y_2}{\alpha_2} &= \frac{x_1}{\alpha_1} + \lambda \frac{x_2}{\alpha_2} + \frac{x_3}{\alpha_3} \\
\varrho \frac{y_3}{\alpha_3} &= \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} + \lambda \frac{x_3}{\alpha_3}
\end{aligned} \tag{18}$$

où λ est un paramètre ($\lambda \neq 1, -2$), constituent un groupe abélien, formé par les homologies dont le centre est $O(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et ayant comme axe la polaire trilinéaire de O par rapport au triangle T. *).

Soit

$$H = \omega(0, \lambda).$$

En tenant compte des résultats donnés *), nous pouvons en ce cas écrire les équations des transformations de la suite (10).

On a pour C_1:

$$\begin{aligned}
\varrho \frac{y_1}{\alpha_1} &= \lambda \frac{x_2x_3}{\alpha_1} + \frac{x_3x_1}{\alpha_2} + \frac{x_1x_2}{\alpha_3} \\
\varrho \frac{y_2}{\alpha_2} &= \frac{x_2x_3}{\alpha_1} + \lambda \frac{x_3x_1}{\alpha_2} + \frac{x_1x_2}{\alpha_3} \\
\varrho \frac{y_3}{\alpha_3} &= \frac{x_2x_3}{\alpha_1} + \frac{x_3x_1}{\alpha_2} + \lambda \frac{x_1x_2}{\alpha_3}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Du fait que

$$C_2C_1 = \omega^2(0, \lambda),$$

les équations de $C_2\ C_1$ sont:

$$\begin{aligned}
\varrho \frac{y_1}{\alpha_1} &= \frac{\lambda^2 + 2}{2\lambda + 1} \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} + \frac{x_3}{\alpha_3} \\
\varrho \frac{y_1}{\alpha_2} &= \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{\lambda^2 + 2}{2\lambda + 1} \frac{x_2}{\alpha_2} + \frac{x_3}{\alpha_3} \\
\varrho \frac{y_3}{\alpha_3} &= \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} + \frac{\lambda^2 + 2}{2\lambda + 1} \frac{x_3}{\alpha_3}.
\end{aligned} \tag{20}$$

*) Bul. de l'Institut Polytechnique de Bucarest. Tome XIX, Fasc. 3—4. p. 15.

En général, $C_{2r}\,C_{2r-1}\ldots C_1$ est une homologie

$$\begin{aligned}
\varrho\frac{y_1}{\alpha_1} &= \mu\frac{x_1}{\alpha_1}+\frac{x_2}{\alpha_2}+\frac{x_3}{\alpha_3}\\
\varrho\frac{y_2}{\alpha_2} &= \frac{x_1}{\alpha_1}+\mu\frac{x_2}{\alpha_2}+\frac{x_3}{\alpha_3}\\
\varrho\frac{y_3}{\alpha_3} &= \frac{x_1}{\alpha_1}+\frac{x_2}{\alpha_2}+\mu\frac{x_3}{\alpha_3}
\end{aligned}\qquad (21)$$

où

$$\mu=\frac{(\lambda+2)^{2r}+2(\lambda-1)^{2r}}{(\lambda+2)^{2r}-(\lambda-1)^{2r}},$$

tandis que $C_{2r+1}\,C_{2r}\ldots C_1$ est une transformation quadratique :

$$\begin{aligned}
\varrho\frac{y_1}{\alpha_1} &= \nu\frac{x_2x_3}{\alpha_1}+\frac{x_3x_1}{\alpha_2}+\frac{x_1x_2}{\alpha_3}\\
\varrho\frac{y_2}{\alpha_2} &= \frac{x_2x_3}{\alpha_1}+\nu\frac{x_3x_1}{\alpha_2}+\frac{x_1x_2}{\alpha_3}\\
\varrho\frac{y_3}{\alpha_3} &= \frac{x_2x_3}{\alpha_1}+\frac{x_3x_1}{\alpha_2}+\nu\frac{x_1x_2}{\alpha_3}
\end{aligned}\qquad (22)$$

où

$$\nu=\frac{(\lambda+2)^{2r+1}+2(\lambda-1)^{2r+1}}{(\lambda+2)^{2r+1}-(\lambda-1)^{2r+1}}.$$

Pour

$$H=\omega_2(O,0),$$

les équations (19) peuvent recevoir la forme des équations (1), donc C_1 est bien la transformation pédale dans le triangle T par rapport au point O.

Rapportons-nous aux notation de (§ 1°). En observant que le point Q_2 résulte du point Q_1 de la même manière que ce dernier du M, on conclut que le point Q_2 est déduit de Q_1 par la transformation

$$C_2=\omega_2(O,0)\cdot P_1,$$

donc il résulte qu'on transforme M en Q_2 par le produit $C_2\,C_1$.

En général Q_n s'obtient de M par

$$C_n\,C_{n-1}\ldots C_1.$$

En tenant compte des relations (21), (22) on déduit les coordonnées projectives des points Q_{2r}, Q_{2r+1} en y faisant $\lambda=0$.

9°. *Sur la construction du point* Q_n.

En nous rapportant à la suite (10), comme

$$C_2\,C_1 = H^2,$$

$$C_{2r}\,C_{2r-1}\ldots C_2\,C_1 = H^{2r},$$

on a

$$C_{2r}\,C_{2r-1}\ldots C_2\,C_1 = (C_2\,C_1)^r\,. \tag{23}$$

Cette observation conduit à une propriété concernant le transformé pédal Q_{2r}. En effet nous venons de voir (§ 8°) qu'on déduit le point Q_{2r} de M par le produit de transformations

$$C_{2r}\,C_{2r-1}\ldots C_2\,C_1\,,$$

lorsque

$$H = \omega_2\,(O,\,0).$$

Si Q'_{2r} est le transformé du point M par $(C_2\,C_1)^r$, l'égalité (23) montre que

$$Q_{2r} \equiv Q'_{2r}\,.$$

Cette observation permet la construction du point sans en utiliser des transformations pédales successives par rapport aux triangles

$$T,\,T_1\ldots.\,T_{2r-1},$$

mais en employant r fois une succession de transformations pédales seulement par rapport aux triangles T, T_1, ce qui simplifie la construction du point Q_{2r}.

Si l'on observe de même que

$$C_3\,C_2\,C_1 = H^3\,P = H^2\,HP = C_2\,C_1\,C_1$$

et en général

$$C_{2r+1}\,C_{2r}\ldots C_1 = H^{2r+1}\,P = H^{2r}\,HP = (C_2\,C_1)^r C_1, \tag{24}$$

alors, le transformé pédal Q_{2r+1} est superposé au point Q'_{2r+1}, qu'on obtient du point M par le produit des transformations $(C_2\,C_1)^r\,C_1$, ça veut dire qu'on peuve construire le point Q_{2r+1} sans en recourir aux transformations pédales par rapport aux triangles

$$T,\,T_1,\ldots T_{2r},$$

mais en utilisant seulement des transformations pédales par rapport aux triangle T, T_1.

La Chaire de Mathématique
L'Institut Polytechnique de Bucarest

О РЯДЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Краткое содержание)

Пусть $T \equiv ABC$ основной треугольник и точка U (1, 1, 1) в проективной плоскости.

Соотношения (4), (5) определяют соответствие между двумя точками M и N в обратно-проективном преобразовании P относительно системы T, U.

Если H — гомографрическое преобразование и T_q, U_q, M_q, N_q — точки, полученные из T, U, M, N преобразованием H^q, то точки M_q, N_q являются соответствующими в обратко-проективном преобразовании P_q относительно системы T_q, U_q.

Рассматриваются преовразования $C_{q+1} = H P_q$ и исследуется ряд преовразований (10), посредством которого точка M преовразуется в точки ряда (13). Точка M_6 или M_2 совпадает с M для прсовразованй H_1, H_2 или H', H'', H''', определённых в тексте.

Исследуется случай, когда $H = \omega_2(0,1)$ есть гомология (18) и в частности для $\lambda = 0$ получены (§ 1°, 9°) простые построения точек ряда (13).

SOME TRANSFORMATIONS

(Summary)

The author examines the transformations (10) where $C_{q+1} \equiv H P_q$ H being a linear transformation. P_q is defined at (8) and P at (4), (5) in connexion with the triangle $T \equiv ABC$ and the point U $(1, 1, 1)$. If H is a homology (18) the transformations $C_{2r} C_{2r-1} \dots C_1$ and C_{2r+1} $C_{2r} \dots C_1$ are given at (21) and (22); for $\lambda = 0$ we obtain (§ 1°, 9°) two simples constructions of the points which correspond to a point M.

SUR CERTAINES SUITES DE TRANSFORMATIONS

(Résumé)

Soit $T \equiv ABC$ le triangle de référence dans le plan projectif et U (1, 1, 1). Les relations (4), (5), définissent une correspondance entre les points M, N dans l'inversion projective P par rapport au système, T, U.

Si H este une homographie et T_q, U_q, M_q, N_q, les transformés des points T, U, M, N par H^q, alors les points M_q, N_q sont correspondants dans l'inversion projective P_q par rapport au système T_q. U_q.

On considère les transformations $C_{q+1} = H P_q$, on examine la suite des transformations (10) qui fait correspondre à un point M les points de la suite (13). La suite (13) est fermé à M_6 ou à M_2 pour les homographies H_1, H_2 ou H', H'', H''' définies dans le texte. On examine le cas $H = \omega_2(0, \lambda)$, homologie définie par (18), et particulierement pour $\lambda = 0$ on donne des constructions des points de la suite (13) dans (§ 1°, 9°).

UBER EINIGE FOLGEN VON TRANSFORMATIONEN

(Zusammenfassung.)

Man studiert die von Transformationen (10), wo $C_{q+1} = HP_q$ und H eine lineare Transformation ist. P_q ist an (8) und P an (4), (5) in Beziehung auf das Dreieck $T \equiv ABC$ und den Punkt U (1, 1, 1) bestimmt.

Wen H eine Transformation (18) ist, dann werden die Transformationen $C_2 \cdot C_{2r-1} \dots C_1$ und $C_{2r+1}\, C_{2r} \dots C_1$ bei (21) und (22) gegeben; für $\lambda = 0$, wir haben (§ 1°, 9°) zwei einfachen Konstructionen der Punkte die aus einem Punkte M abziehen werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

UNE REPRÉSENTATION VECTORIELLE DES COURBES PLANES ET QUELQUES PROPRIÉTÉS

par HARALAMBIE P. IONESCO

1. — Dans ce qui suit nous donnerons une représentation vectorielle des courbes planes et, en utilisant cette représentation, nous démontrerons quelques proprétés d'une manière trés simple ; c'est ce qui nous fait croire qu'elles presentent des avantages.

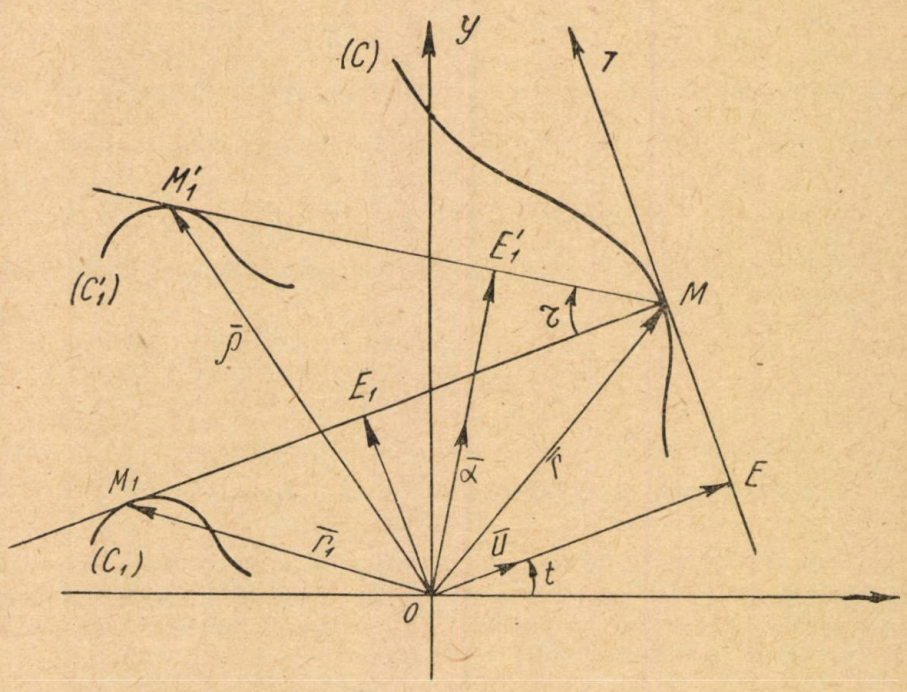


Fig. 1.

Si nous considérons une courbe plane (C) et désignons par MT la tangente dans un point M de la courbe, par $OE = f(t)$ l'expression de la grandeur du vecteur $\overline{OE}$, rectangulaire à MT et par l'angle $t = \sphericalangle OEx$ le paramètre de variation ; nous pouvons écrire :

$$\bar{r}(t) = \overline{OM} = \overline{OE} + \overline{EM}.$$

Si $\bar{u}$ est le vecteur unitaire de la direction OE ; $\bar{u}' = \dfrac{d\bar{u}}{dt}$ sera le vecteur unitaire pour EM.

Alors la relation ci-dessus donne :

$$\bar{r} = f\bar{u} + g\frac{d\bar{u}}{dt}, \tag{1}$$

où nous avons désigné par $g(t)$ — une fonction inconnue, — l'expression de la grandeur du vecteur $\overline{EM}$.

II. — 1°. — *Nous montrerons que* $g(t) = f'(t)$.

La relation (1) derivée par rapport à t et puis multipliée par $\bar{u}$ nous donne :

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\bar{u} = \frac{df}{dt}\bar{u}\bar{u} + f\frac{d\bar{u}}{dt}\bar{u} + \frac{dg}{dt}\frac{d\bar{u}}{dt}\bar{u} + g\frac{d^2\bar{u}}{dt^2}\bar{u}.$$

Mais, en tenant compte des : $\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} = \bar{u}'' = -\bar{u}$; $\bar{u}\frac{d\bar{u}}{dt} = 0$; car $\bar{u}$ est un vecteur unitaire et le vecteur $\frac{d\bar{r}}{dt}$ est situé sur la tangente MT de la courbe ; on a :

$$\frac{df}{dt} - g = 0 ; \quad g(t) = f'(t). \tag{2}$$

Donc pour l'équation de la courbe (C) nous obtenons la représentation vectorielle suivante :

$$\bar{r} = f\bar{u} + \frac{df}{dt}\frac{d\bar{u}}{dt} ; \quad \bar{r} = f\bar{u} + f'\bar{u}'.$$

2°. *La grandeur du rayon de courbure dans un point M de la courbe* (C) *est égale au module du vecteur* $\frac{d\bar{r}}{dt}$ *et a l'expression* $(f + f'')$.

Soint M_1 le centre de courbure au point M et $\bar{r}_1 = \overline{OM}_1$ son vecteur de position. Soit $\overline{OE}_1$ un vecteur équipollent avec $\overline{EM}$. En désignant par (C_1) la développée de la courbe (C), — qui s'appele aussi la courbe enveloppée de la normale MM_1 — on a

$$\overline{OM}_1 = \overline{OE}_1 + \overline{E_1M_1}.$$

Mais

$$\overline{E_1M_1} = f''\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} = f''\bar{u}''$$

et donc

$$\bar{r}_1 = f'\bar{u}' + f''\bar{u}'',$$

qui représent l'équation vectorielle de la développée (C_1).

Pour calculer le rayon de courbure dans un point quelconque M, de la courbe (C), nous avons

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = \overline{ME_1} + \overline{E_1M_1}$$

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = -f\bar{u} + f''\bar{u}'' = (f + f'')\bar{u}''$$

d'où [3] :

$$R = f + f''.$$

D'autre part on a :

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = f'\bar{u}' + f\bar{u}' + f''\bar{u}' + f'\bar{u}'' = (f + f')\bar{u}',$$

donc

$$|R| = |f + f''| = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|. \tag{4}$$

Pour le rayon de courbure R_1 de la courbe (C_1) — par une methode analogue — on trouve la formule :

$$R_1 = f' + f''' = (f + f'')'. \tag{5}$$

3°. *La développée et la développée d'ordre m d'une courbe plane.*

Les relations (2) et (3) montrent que $\bar{r}_1(t)$ peut être défini par une opération symbolique $\mathcal{J}$ sur $\bar{r}$.

Donc nous écrivons

$$\bar{r}_1 = \mathcal{J}(\bar{r}) = f'\bar{u}' + f''\bar{u}''$$

où

$$\bar{r}_2 = \mathcal{J}(\bar{r}_1) = f''\bar{u}'' + f'''\bar{u}'''.$$

Donc, l'opération $\mathcal{J}$ indique la construction nécessaire pour passer du $\bar{r}_i$ à $\bar{r}_{i+1}$ et nous pouvons écrire la relation

$$\bar{r}_m = \mathcal{J}(\bar{r}_{m-1}) \tag{6}$$

ou

$$r_m = f^{(m)}\bar{u}^{(m)} + f^{(m+1)}\bar{u}^{(m+1)}. \tag{6'}$$

Alors (6) représente l'équation de la courbe (C_m), la développée d'ordre m de la courbe (C).

Si l'on désigne par R_m le rayon de courbure dans un point M_m de la courbe (C_m), de la formule (5) on obtient aisément la formule

$$R_m = (f + f'')^{(m)}. \tag{7}$$

Dans ces conditions le probleme : *„déterminer les courbes planes pour lesquelles leurs développées d'ordre m coïncident avec les courbes données"* ; se réduit à l'équation

$$\bar{r} = \bar{r}_m \tag{8}$$

ou

$$f\bar{u} + f'\bar{u}' = f^{(m)}\bar{u}^{(m)} + f^{(m+1)}\bar{u}^{(m+1)}. \tag{8'}$$

Ces équations se transforment, sans difficulté, en des équations différentielles linéaires à coefficients constants. — Les restes de la division du nombre m par 4, sont très utiles. Nous nous arrêtons ici pour ce problème.

4°. *Le lieu des cenires de courbure oblique au point M de la courbe (C) est un cercle qui a pour diamètre le rayon de courbure normal au point M.*

Soit, par le point M, une droite qui fait avec la normale MM_1 l'angle τ, et sur cette droite un point M_1', le centre de courbure oblique de la courbe (C). Donc la droite MM_1' enveloppera une courbe (C_1') appelée la développée oblique de la courbe (C). [1].

Dans ces conditions nous notons par $\bar{\alpha}$ le vecteur unitaire sur $\overline{OE_1'}$, la perpendiculaire sur MM_1' et par $\varphi(t, \tau)$ une fonction, telle que $\overline{OE_1'} = \varphi\bar{\alpha}$. Puis d'une manière analogue — comme au point 1° — nous avons :

$$\overline{E_1'M_1'} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \varphi'\bar{\alpha}'$$

Il est facile de voir que $\measuredangle E'ox = \frac{\pi}{2} - (\tau - t)$, et donc

$$\bar{\alpha} = \bar{i}\sin(\tau - t) + \bar{j}\cos(\tau - t).$$

D'autre part le contour vectoriel $OEME_1'O$ nous donne

$$f\bar{u} + f'\bar{u}' = \varphi\bar{\alpha} - \zeta\bar{\alpha}'$$

si nous noton $E_1'M = \zeta(t, \tau)$.

En multipliant cette derniére relation par $\bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha}'$ on a :

$$\varphi = f\bar{u}\bar{\alpha} + f'\bar{u}'\bar{\alpha}; \quad -\zeta = f\bar{u}\bar{\alpha} + f'\bar{u}'\bar{\alpha}'$$

ou

$$\varphi = f\sin\tau + f'\cos\tau; \quad \zeta = f\cos\tau - f'\sin\tau.$$

Pour avoir l'expression du rayon de courbure oblique nous observons que

$$\overline{MM_1'} = \overline{ME_1'} + \overline{E_1'M_1'}$$

ou

$$\overline{MM_1'} = (f + f'')\bar{\alpha}'\cos\tau.$$

Si nous désignons par R' le rayon de courbure oblique au point M nous avons :

$$R' = (f + f'')\cos\tau = R\cos\tau. \tag{9}$$

Donc : 1) Le rayon de courbure oblique est la projection du rayon de courbure normale sur la direction considérée MM_1'.

2) Son maximum a lieu pour $\tau = 0$; $\tau = \pi$, donc pour la courbure normale.

3) Le triangle $M_1M_1'M$ est un triangle rectangle avec $\widehat{M_1'} = 90^0$. Le lieu du point M_1' est le cercle qui a pour diamètre MM_1

Dans ces conditions, nous pouvons écrire l'équation de la développée oblique de la courbe (C). Nous observons que

$$\bar{\varrho} = \overline{OM_1} = \overline{OM} + \overline{MM_1}; \quad \bar{\varrho} = \varphi\,\bar{\alpha} + \varphi'\bar{\alpha}'$$

donc

$$\bar{\varrho} = f\bar{u} + f'\bar{u}' + (f + f'')\,\bar{\alpha}\cos\tau. \tag{10}$$

ou

$$\bar{\rho} = \bar{r} + R\,\bar{\alpha}\cos\tau.$$

Pour $\tau = 0$ l'équation (10) se reduit à l'équation de la développée normale (3).

Remarque. Si dans l'équation (10) t reste fixe — donc nous nous considérons dans un point fixe M de la courbe (C) — et τ est variable, (10) devient l'équation du cercle lieu géométrique du point M_1. Nous l'appelerons le *cercle de semi-courbure.*

III. *Aplications.* Soit, par exemple, deux courbes classiques, très utiles dans les problemes techniques : la cycloïde et la spirale logarithmique.

5°. *La cycloïde.* En considérant la définition géométrique de la cycloïde et en utilisant la fig 2 nous avons :

$$x = a\,(\varphi - \sin\varphi); \quad y = a\,(1 - \cos\varphi)$$

si nous désignons par φ l'angle $M\,\omega\,N$. Alors avec les notations de la même fig. 2 nous avons $\varphi = 2.\ \sphericalangle MTN$, donc $t + \frac{\varphi}{2} = \pi$ ou $\varphi = 2(\pi - t)$ et les équations paramétriques de la cycloïde devienent :

$$x = a\,[2\,(\pi - t) + \sin 2t]; \quad y = a\,[1 - \cos 2t]. \tag{11}$$

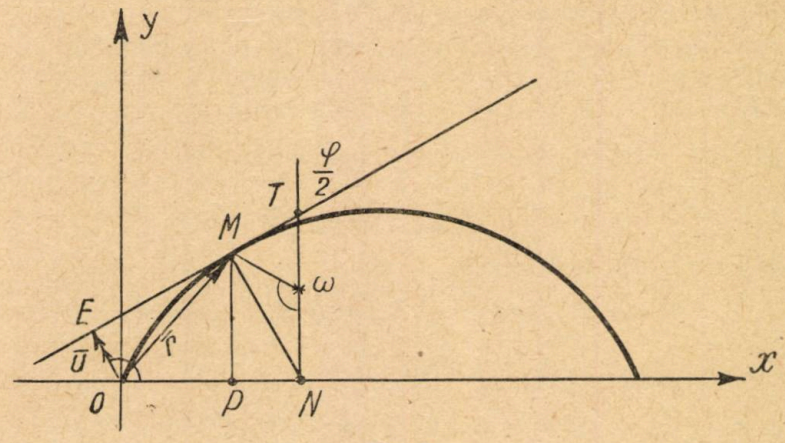


Fig. 2.

En tenant compte du sens du vecteur $\overline{EM}$ et de l'équation (3) nous avons $f(t) = 2a\,(\pi - t)\cos t + 2a\sin t$ et

$$\bar{r} = 2a\,[(\pi - t)\cos t + \sin t]\,\bar{u} + a\,[(t - \pi)\sin t]\,\bar{u}'$$

l'équation de la cycloïde.

Le rayon de courbure est donnée par la formule

$$R = f + f'' = 4a \sin t.$$

Pour la développée nous avons

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + (4a \sin t)\, \bar{u}$$

ou

$$x_1 = \bar{r}\ \bar{i} - 2a \sin 2t\,; \quad y_1 = -\ 2a + \bar{r}\ \bar{j} + 2a \cos 2t.$$

Ces résultats montrent que la développée de la cycloïde est la même cycloïde mais déplacée par rapport à l'axe des x avec une demi-période et par rapport à l'axe des y avec 2a dans le sens negatif. Donc la développée ne coïncidera jamais avec la cycloïde donnée. [2].

Le cercle de semi-corbure a le rayon $2a \sin t$ et les coordonnées de son centre sont

$$X = \frac{x + x_1}{2} = 2a\,(\pi - t)\,; \quad Y = \frac{y + y_1}{2} = (1 - \cos 2t) - a\,(1 - \cos 2t) = 0.$$

Donc on trouve la propriété clasique de la construction du centre de courbure normale de la cycloïde.

Ce cercle a l'équation

$$[X - 2\alpha\,(\pi - t)]^2 + Y^2 = 4a^2 \sin^2 t.$$

6°. *La spirale logarithmique.* Soit la spirale logarithmique définie par l'équation $\varrho = b\, e^{a\theta}$, où a et b sont deux constantes réelles.

La condition, pour que le vecteur $\overline{OE}$ et la tangente de la courbe soient perpendiculaires, donne $t = \theta - \alpha$ si $\operatorname{tg}\alpha = a$. Alors l'équation (3) donne $f(t) = qe^{at}$, si nous notons $be^{a\alpha}\cos\alpha = q$.

L'équation (3) pour la spirale logarithmique devient

$$\bar{r} = q\,(\bar{u} + a\,\bar{u}')\, e^{at}.$$

Pour les rayons de courbure on a

$$R = q\,(1 + a^2)\, e^{at}\,; \quad R_m = q\,a^m\,(1 + a^2)\, e^{at}.$$

La développée d'ordre m a l'équation

$$\bar{r}_m = q\,a^m\,[\bar{u}^{(m)} + a\,\bar{u}^{(m+1)}]\, e^{at}$$

ou

$$\bar{r}_m = q\,a^m\,[\bar{u} + a\,\bar{u}']^{(m)}\, e^{at}.$$

Cette derniére forme montre que la développée d'ordre m est aussi une spirale logarithmique, mais dilatée (contractée) par le coefficient a^m.

En tenant compte que : $\bar{u}'' = -\bar{u}$; $\bar{u}''' = -\bar{u}'$; $\bar{u}'''' = -\bar{u}'' = \bar{u}$; $\bar{u}''''' = \bar{u}'$ nous avons.

$$\bar{r}_4 = q\,a^4\,(\bar{u} + a\bar{u}')\,e^{at} = \bar{r}\,;$$

donc la quatrième développée coïncide avec la courbe donnée si $a^4 - 1 = 0$, donc $a = \pm 1$.

Pour $a \neq \pm 1$, la quatrième développée coïncide avec une transformée homothétique de la spirale donnée.

Il est très facile de voir que les développées C_1, C_2, C_3 représentent la même spirale, mais transformée par une rotation autour de l'origine, respectivement avec $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ si $a = \pm 1$.

La développée oblique de la spirale logarithmique a l'équation

$$\bar{\varrho} = q\,[\bar{u} + a\bar{u}' + \bar{a}'\,(1 + a^2)\cos t]\,e^{at}.$$

7°. *La transformation du rayon de courbure dans les coordonnées rectangulaires.*

Dans l'équation (2) de la courbe la direction de la tangente est donnée par $\bar{u}'$: En tenant compte des

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} t, \qquad \bar{r}\,\bar{i} = x$$

nous avons

$$\frac{dx}{dt} = \bar{i}\,\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i}\,(f + f'')\,\bar{u}' = -(f + f'')\sin t$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{-1}{(f + f'')\sin^3 t}\,;\; f + f'' = \frac{-1}{y''\sin^3 t}\,.$$

En exprimant $\sin^3 t$ par $\operatorname{ctg} t = -y'$ nous avons

$$R = f + f'' = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}\,.$$

8°. *Remarques :*

a) Le vecteur $\bar{u}^{(m)}$ la m-ième dérivée du vecteur $\bar{u}$, résulte par une rotation dans le sens direct du vecteur $\bar{u}$, autour de l'origine et d'un angle égale à $m \cdot \frac{\pi}{2}$.

b) La position du vecteur $\overline{OE}$ par rapport au vecteur $\overline{OM}$, ne change pas la forme de l'équation.

On a

$$\bar{r} = \overline{OE} + \overline{EM} = f\bar{u} - \bar{u}g.$$

Mais on trouve $g = -f'$ donc $\bar{r} = f\bar{u} + f'\bar{u}'$.

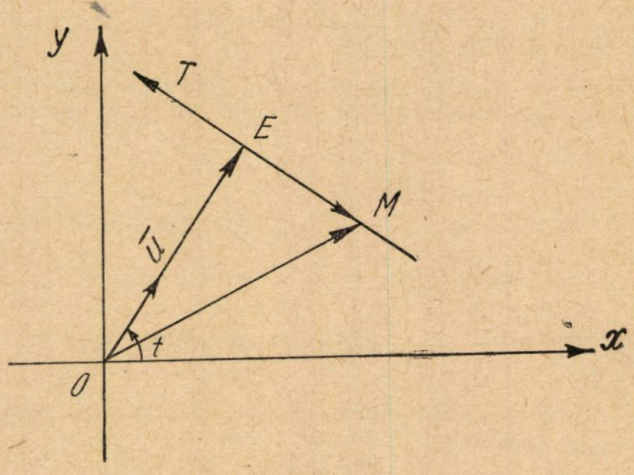


Fig. 3.

c) Le point M_1 de la développée peut être située d'une part ou d'autre de la droite EM. Il y a donc une question de sens ; mais toutes les formules restent invariables.

Le Chaire de Mathématique
l'Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. — *L'abbé Aoust* — L'analyse infinitésimal des courbes planes — Paris — 1873 : pag. 112.
2. — *Tr. Lalescu* — Curs de geometrie analitică — fascicola IV ; pag. 38, 68.
3. — *D. V. Ionescu* — Desfăşurate succesive. — R.M.T. — vol. XII. pag. 110.

ВЕКТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

(Краткое содержание)

В работе даётся векторное представление кривых на плоскости в форме:

$$\bar{r} = f \cdot \bar{u} + f' \cdot \bar{u}'.$$

С помощью этого представления доказывается ряд свойств и устанавливается очень легко уравнение эволюты (3), эволюты порядка m (6), а также выражение соответствующего радиуса кривизны.

Также легко устанавливается уравнение наклонной эволюты (10) некоторой данной кривой и уравнение геометрического места центров наклонной кривизны в любой точке некоторой данной кривой (10′). Затем даётся простой способ решения проблемы определения кривых, совпадающих с их эволютой порядка m.

В качестве примера рассматриваются циклоида и логарифмическая спираль.

Автор надеется, что изложенный метод представляет интерес.

A VECTORIAL REPRESENTATION OF PLANE CURVES AND SOME PROPERTIES.

(Summary)

By the vectorial representation of plane curves under the form

$$\bar{r} = f\bar{u} + f'\bar{u}'$$

is demonstrated a set of properties and established, by a very easy method, the equations of the evoluta, the evolventa of the m-th order, and the expression of the radius of curvature too.

In the same way are established the equation of the oblique evoluta and the geometrical locus of oblique curvature in any point of the curve.

This method permits to obtain easily the curves coinceeding with their evoluta of the m-th order.

Applications: the cycloidal and logarithmical curves.

UNE REPRÉSENTATION VECTORIELLE DES COURBES PLANES ET QUELQUES PROPRIÉTÉS.

(Résumé)

Nous donnons une représentation vectorielle des courbes planes sous la forme

$$\bar{r} = f\bar{u} + f'\bar{u}'.$$

En utilisant cette représentation nous demontrons quelques propriétés et d'une manière très simple nous trouvons l'équation de la developyée (3), de la developpée d'ordre m et la formule du rayon de courbure.

D'une manière analogue nous trouvons l'équation de la developpée oblique (10) ; le lieu des centres de courbure oblique (10') et par consequent le probleme : „determiner les courbes planes pour lesquelles leurs developpée d'ordre m coïncident avec les courbes données" se reduit a l'équation (8').

Aplications : la cycloide, la spirale logarithmique.

ÜBER EINE VEKTORIELLE DARSTELLUNG DER EBENEN KURVEN UND EINIGE IHRER EIGENSCHAFTEN.

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wird eine vektorielle Darstellung der ebenen Kurven unter der Form

$$\bar{r} = f\bar{u} + f'\bar{u}'$$

gegeben. An Hand dieser Darstellung werden eine Reihe von Eigenschaften bewiesen und die Gleichung (3) der Evolute, die Gliechung der Evolute m^{ter} Ordnung, sowie der Austdruck des entsprechenden Krümmungsradius auf sehr einfache Weise abgeleitet.

Ferner wird die Gleichung (10) der schiefen Evolute einer gegebenen Kurve und die Gleichung des Ortes aller schiefen Krümmungszentren in einen beliebigen Punkt einer gegebenen Kurve (10') leicht festgestellt. Es wird ein einfaches Verfahren angegeben welches das Auffinden der Kurven gestattet die mit ihrer Evolute m^{ter} Ordnung Zusammenfallen.

Als Beispiele werden die Zykloide und die logarittmische Spirale behandelt.

Wir hoffen dass die vorliegende Untersuchung nicht uninteressant ist.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

REDUCEREA ECUAȚIEI GENERALE DE GR. II ÎN CAZUL $\delta = 0$ PRINTR-O TRANSLAȚIE, URMATĂ DE O ROTAȚIE

de GHEORGHE D. SIMIONESCU

1. In general pentru conicele de gen parabolă reducerea ecuației generale se face invers ca la conicele cu centru, adică întîi se rotesc axele și apoi se face translația. Motivarea este că nu se cunosc coordonatele vîrfului parabolei și deci nu se poate face întîi translația.

Am căutat să văd dacă reducerea conicelor în cazul $\delta = 0$ nu se poate face ca la conicele cu centru, cu alte cuvinte dacă nu se poate trata întreaga problemă a reducerii conicelor într-un mod unitar.

Rezultatele la care am ajuns le expun mai jos.

2. Presupunem ecuația conicei dată sub forma:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

în care $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ sau $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$.

In determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

notăm cu A_{hk} complementul algebric al elementului a_{hk}, deci

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} \tag{2}$$

Rezultă

$a_{11}A_{13} + a_{12}A_{23} = 0$ și Δ se poate scrie sub formele

$$\Delta = -\frac{1}{a_{11}}A_{23}^2 = -\frac{1}{a_{22}}A_{13}^2. \tag{3}$$

3. In cazul $\delta = 0$ se știe că diametrul conjugat direcției m are coeficientul unghiular $m' = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$. Oricare ar fi deci direcția m, diametrul conjugat păstrează o direcție constantă, perpendiculară pe direcția dată de $m_1 = \frac{a_{12}}{a_{11}}$.

Axa curbei rezultă ca diametrul conjugat al acestei direcții, deci

$$a_{11} f'_x + a_{12} f'_y = 0. \tag{4}$$

Înlocuim pe f'_x și f'_y și notăm invariantul $a_{11} + a_{22} = \eta$. Ținînd seamă că

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{11}^2 + a_{11}a_{12} = a_{11}\eta \text{ și } a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} = a_{13}\eta + A_{13},$$

ecuația axei ia forma

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = -\frac{A_{13}}{\eta} \text{ sau } f'_x = -2\frac{A_{13}}{\eta}. \tag{5}$$

Relația $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$ permite ca ecuația axei să se scrie și sub formă

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = -\frac{A_{23}}{\eta} \text{ sau } f'_y = -2\frac{A_{23}}{\eta}. \tag{6}$$

4. Cu pregătirea de mai sus trecem la problema reducerii ecuației generale (1). Facem întîi translația de axe mutînd originea în punctul de intersecție al axei cu conica (vîrful conicei). Fie (x_0, y_0) coordonatele acestui punct, deci trebuie să avem:

$$f(x_0, y_0) = 0; \quad f'_{x_0} = -2\frac{A_{13}}{\eta}; \quad f'_{y_0} = -2\frac{A_{23}}{\eta}. \tag{7}$$

Notînd cu x_1 și y_1 coordonatele unui punct față de noile axe avem $x = x_0 + x_1$ și $y = y_0 + y_1$ care introduse în ecuația conicei ne dă:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + \frac{1}{2}(x_1^2 f''_{x_0^2} + 2x_1 y_1 f''_{x_0 y_0} + y_1^2 f''_{y_0^2}) = 0$$

sau

$$\boxed{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1 y_1 + a_{22}y_1^2 - 2\frac{A_{13}}{\eta}x_1 - 2\frac{A_{23}}{\eta}y_1 = 0.} \tag{8}$$

Urmează acum să facem rotația astfel încît axa de simetrie să devină axa OX. Direcția axei fiind:

$$m' = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = \operatorname{tg}\alpha,$$

deducem

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \pm\sqrt{\frac{a_{22}}{\eta}}; \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \mp\sqrt{\frac{a_{11}}{\eta}}.$$

Dacă notăm cu X, Y coordonatele unui punct față de noile axe, după rotire, atunci formulele de transformare:

$$x_1 = X\cos\alpha - Y\sin\alpha; \quad y_1 = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

devin

$$x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{\eta}}(X\sqrt{a_{22}} + Y\sqrt{a_{11}}); \quad Y_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{\eta}}(-X\sqrt{a_{11}} + Y\sqrt{a_{22}}). \tag{9}$$

Aceste expresii ale lui x_1 și y_1 introduse în (8) ne dau, după ordonarea termenilor:

$$\eta Y^2 \mp \frac{2}{\eta^{3/2}} [X(A_{13}\sqrt{a_{22}} - A_{23}\sqrt{a_{11}}) + Y(A_{13}\sqrt{a_{11}} + A_{23}\sqrt{a_{22}})] = 0. \quad (10)$$

Dar:

$$A_{13}\sqrt{a_{22}} - A_{23}\sqrt{a_{11}} = \frac{\sqrt{a_{11}}\, A_{13}}{a_{12}} = \eta\sqrt{-\Delta}.$$

Coeficientul lui Y este

$$A_{13}\sqrt{a_{11}} + A_{23}\sqrt{a_{22}} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}(A_{13}a_{11} + A_{23}a_{12}) = 0.$$

Ecuația (10) devine:

$$\eta Y^2 \mp \frac{2}{\eta^{3/2}} \cdot \eta\sqrt{-\Delta} \cdot X = 0$$

sau

$$\therefore \quad \boxed{Y^2 = \pm 2\sqrt{\frac{-\Delta}{\eta^3}} \cdot X} \quad (11)$$

Prin urmare în cazul $\delta = 0$ $(\Delta \neq 0)$ conica se reduce la o parabolă de parametru:

$$p = \sqrt{\frac{-\Delta}{\eta^3}} \quad (12)$$

raportată la axa ei de simetrie și la tangenta la vîrf. Semnul dublu arată că parabola poate fi de o parte sau alta a tangentei la vîrf. Aceasta depinde de rotația pe care am dat-o axelor de coordonate (α sau $\pi + \alpha$).

5. *Cazul* $\Delta = 0$. Dacă $a_{11} = 0$, rezultă imediat, presupunînd $a_{22} \neq 0$, din $\delta = 0$ că $a_{12} = 0$ și din $\Delta = 0$ că $a_{13} = 0$. Ecuația conicei se reduce la $a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, deci la două drepte paralele la OX.

În mod analog dacă $a_{22} = 0$ și $a_{11} \neq 0$ se obțin două drepte paralele la OY.

Lăsînd la o parte aceste cazuri particulare, presupunem $a_{11} \neq 0$; $a_{22} \neq 0$, de unde deducem $a_{12} \neq 0$. Din $\delta = 0$ și $\Delta = 0$, care echivalează cu $A_{23} = 0$ sau $A_{13} = 0$ [formulele (3)] rezultă:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} \quad (13)$$

și ecuațiile (5) sau (6) ale axei de simetrie devin:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0; \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \quad (14)$$

adică:

$$f'_x = 0 \quad \text{sau} \quad f'_y = 0.$$

Alegem un punct (x_0, y_0) pe axa de simetrie și facem translația de axe mutînd originea în acest punct.

Ecuația conicei devine:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_1} + \varphi(x_1, y_1) = 0 \tag{15}$$

unde $\varphi(x_1, y_1)$ este grupul termenilor de gr. II.

Punctul (x_0, y_0) fiind pe axa de simetrie avem

$$f'_{x_0} = f'_{y_1} = 0$$

și pe de altă parte omogenizînd:

$$2f(x_0, y_0, z_0) = x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0} = f'_{z_0}$$

deci

$$f(x_0 y_0) = a_{13} x_0 + a_{23} y_0 + a_{33}.$$

Din sistemul:

$$\begin{array}{l|l} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 & -a_{13} \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = f(x_0, y_0) & a_{11} \end{array}$$

înmulțind convenabil ecuațiile și ținînd seama de (13) găsim:

$$f(x_0, y_0) = \frac{A_{22}}{a_{11}}.$$

Ecuația (15) se reduce deci la:

$$\frac{A_{22}}{a_{11}} + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 = 0. \tag{15'}$$

Dacă facem și rotația de axe, grupul termenilor de gr. II se reduce tot la ηY^2 încît ecuația conicei devine:

$$\eta Y^2 + \frac{A_{22}}{a_{11}} = 0 \tag{16}$$

care reprezintă două drepte simetrice față de axa OX sau confundate cu ea, după cum $A_{22} \neq 0$ sau $A_{22} = 0$.

* * *

6. *Coordonatele vîrfului parabolei.* Pentru calculul coordonatelor vîrfului pornim de la sistemul format de axă și de parabolă a cărei ecuație o scriem punînd în evidență patratul perfect:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = -\frac{A_{13}}{\eta} \tag{17}$$

$$(a_{11}x + a_{12}y)^2 + a_{11}(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}) = 0.$$

Ridicînd prima ecuație la patrat și scăzînd din a doua obținem:

$$-2A_{23}y + A_{22} = -\frac{A_{13}^2}{\eta^2} \quad \therefore \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{A_{22}}{A_{23}} + \frac{A_{13}^2}{A_{23}\eta^2}\right).$$

Dacă ținem seama că $A_{13}^2 = \frac{a_{22}}{a_{11}} A_{23}^2$ atunci:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{A_{22}}{A_{23}} + \frac{a_{22}}{a_{11}} \cdot \frac{A_{23}}{\eta^2}\right). \tag{18}$$

In mod asemănător dacă se pornește de la forma (6) a axei și se modifică și forma ecuației parabolei, se obține:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{A_{11}}{A_{13}} + \frac{a_{11}}{a_{12}} \cdot \frac{A_{13}}{\eta^2}\right). \tag{19}$$

Coordonatele vîrfului sînt date deci de formulele (19) și (18).

Dacă se ține seama de relațiile (3) atunci coordonatele vîrfului pot fi puse și sub forma:

$$x = \frac{1}{2A_{13}}\left(A_{11} - a_{11}\frac{\Delta}{\eta^2}\right); \quad y = \frac{1}{2A_{23}}\left(A_{22} - a_{22}\frac{\Delta}{\eta^2}\right). \tag{20}$$

Catedra de Matematică
Institutul Politehnic București

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ 2-ой СТЕПЕНИ В СЛУЧАЕ $\delta = 0$, ПУТЕМ ПЕРЕНОСА С ПОСЛЕДУЮЩИМ ПОВОРОТОМ

(Краткое содержание)

Автор показывает, как возможно преобразовать кривую 2-го порядка в случае $\delta = 0$ через перенос с последующим поворотом, с целью получения единой методы в проблеме преобразования кривых 2-го порядка.

В конце даются координаты вершины параболы, как функции коэффициентов и инвариантов.

REDUCTION OF THE GENERAL ECUATION OF SECOND DEGREE, IN CASE OF $\delta = 0$, BY A TRANSLATION FOLLOWED BY A ROTATION

(Summary)

The author shows how the equation of the conics may be done in the case of $\delta = 0$, by a translation followed by a rotation in the scope of keeping an unitary method in the problem of the reduction of the conics.

At the end are given the coordinates of the vertex of the parabole in fonction of the coefficients of the equation and of the invariants.

LA REDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DE II-ème DEGRE, DANS LA CAS $\delta = 0$, PAR UNE TRANSLATION SUIVIE D'UNE ROTATION

(Résumé)

L'auteur montre comment on peut faire la réduction des coniques, dans le cas $\delta = 0$, par une translation suivie d'une rotation, afin de conserver une méthode unitaire dans le probléme de la réduction des coniques.

A la fin on donne les coordonnées du sommet de la parabole en fonction des coefficients de l'équation et des invariants.

DAS REDUZIEREN DER ALLGEMEINEN GLEICHUNG II-ten GRADES, IM FALLE $\delta = 0$, DURCH EINE PARALLELE VON EINER UMDREHUNG BEFOLGTE VERSCHIBUNG

(Zusammenfassung)

Der Verfasser beweist vie man das Reduzieren der Kegelschnitte, wenn $\delta = 0$, durch eine parallele von einer umdrehung befolgte Verschiebung ausführen kann, mit dem Zweck eine einheittliche Methode in der Frage des Reduzierens der Kegelschnitte aufzubewahren.

Zum Schluss werden die Koordinaten des Parabelgipfels als Funktionen von den Gleichungs Koeffizienten und den Invarianten angegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 2

517.5

QUELQUES OPÉRATIONS LINÉAIRES DE TYPE DELTA — DIRAC

par MARCIAN GUTMANN

1. Dans ces lignes, nous donnons à l'aide des fonctions singulières de Dirac, des expressions pour les dérivées d'ordre réel ou complexe des fonctions réglées *), la dérivation étant considérée comme un produit de composition ; en dehors des nouvelles formules intégrales pour les fonctions de Dirac, nous présentons aussi des démonstrations pour des formules de type Fourier, Bromwich, Kotelnikov, démonstrations utilisant les deltas de Dirac.

2. Si $f(t)$ est une fonction réglée, nous avons :

$$f(t) \ast \delta^{(m)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \delta^{(m)}(t-\tau)\, d\tau = \frac{f^{(m)}(t-0) + f^{(m)}(t+0)}{2}.$$

Si nous donnerons un sens à $\delta^{(\alpha)}(t)$ (α réel ou complexe), nous aurons un moyen de définir à l'aide du produit de composition, la dérivée d'ordre quelconque α de $f(t)$; or, on sait que :

$$\delta^{(m)}(t) \sqsupset p^m \quad \text{et} \quad t^s \sqsupset \frac{\Gamma(s+1)}{p^{s+1}} \quad (s \neq -1, -2, \ldots),$$

les correspondances $\sqsupset$ représentant des transformations Laplace ; pour $s + 1 = -\lambda$, on obtient :

$$p^\lambda \sqsupset \frac{1}{\Gamma(-\lambda)\, t^{\lambda+1}} \quad (\lambda \neq 0, 1, 2, \ldots)$$

et on est donc conduit à poser, pour $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$

$$\delta^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\, t^{\alpha+1}}.$$

*) ou fonctions à discontinuités de prémière espèce (par exemple les fonctions en escalier, les fonctions monotones ou à variation bornée etc.) ; le terme „fonctions réglées" est du à l'école Bourbaki. Ces fonctions sont limites uniformes des suites de fonctions en escalier (ou constantoïdes) ; elles forment une algèbre $\mathfrak{R}$, sous-algèbre de l'algèbre $\mathfrak{H}$ d'Heaviside-Dirac, qui comprend les fonctions réglées et leurs dérivées d'ordre quelconque, réel ou complexe.

Par conséquent, on peut écrire :

$$\frac{f^{(\alpha)}(t-0)+f^{(\alpha)}(t+0)}{2}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\delta^{(\alpha)}(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}}\quad(\alpha\neq 0,1,2,\ldots).$$

En particulier, pour $\alpha=-m$:

$$\frac{f^{(-m)}(t-0)+f^{(-m)}(t+0)}{2}=\frac{1}{(m-1)!}\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\tau)^{m-1}f(\tau)\,d\tau\quad(m\neq 0,\ 1,-2,\ldots),$$

la convergence de l'intégrale pouvant être interprétée de plusieurs façons, selon la forme de $f(t)$. Nous donnerons ensuite des autres expressions, dans des conditions plus larges.

3. Nous allons établir maintenant, des autres expressions pour $\delta^{(\alpha)}(t)$ (α réel ou complexe), à l'aide des fonctions cylindriques de prémière espèce $J_\lambda(t)$, qui donneront des autres formes pour $f(t)*\delta^{(\alpha)}(t)$, α quelconque.

De la correspondance opérationelle $t^{\frac{\lambda}{2}}J_\lambda(2\sqrt{t})\sqsupset\frac{1}{p^{\lambda+1}}e^{-\frac{1}{p}}$, on obtient l'original de $F\left(\frac{1}{p}\right)$ — en fonction de $f(t)$, original de $F(p)$ — en observant qu'on a aussi $\left(\frac{t}{\omega}\right)^{\frac{\lambda}{2}}J_\lambda(2\sqrt{\omega t})\sqsupset\frac{1}{p^{\lambda+1}}e^{-\frac{\omega}{p}}$, en vertu d'une formule de multiplication bien connue ; on a, en effet :

$$\frac{1}{p^{\lambda+1}}F\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p^{\lambda+1}}\int_0^\infty f(\omega)\,e^{-\frac{\omega}{p}}\,d\omega\sqsubset\int_0^\infty\left(\frac{t}{\omega}\right)^{\frac{\lambda}{2}}J_\lambda(2\sqrt{\omega t})\,f(\omega)\,d\omega.$$

Pour $\lambda=-1$,

$$\text{on a :}\quad F\left(\frac{1}{p}\right)\sqsubset\int_\infty^0\sqrt{\frac{\omega}{t}}\,J_1(2\sqrt{\omega t})\,f(\omega)\,d\omega.$$

Pour $\lambda=0$,

$$\text{on a :}\quad\frac{1}{p}F\left(\frac{1}{p}\right)\sqsubset\int_0^\infty J_0(2\sqrt{\omega t})\,f(\omega)\,d\omega.$$

De la correspondance particulière $\frac{t^m}{m!} \sqsupset \frac{1}{p^{m+1}}$, on en déduit, pour $\lambda = 0$, par exemple :

$$\frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) = p^m \sqsubset \int_0^\infty J_0 (2\sqrt{\omega t}) \frac{\omega^m}{m!} d\omega$$

où

$$\delta^{(m)}(t) = \frac{1}{m!} \int_0^\infty \omega^m J_0 (2\sqrt{\omega t})\, d\omega ;$$

pour $m = 0$, on a $\delta(t) = \int_0^\infty J_0 (2\sqrt{\omega t})\, d\omega$ *).

4. Si on part de la correspondance $t^s \sqsupset \frac{\Gamma(s+1)}{p^{s+1}} (s \neq -1, -2, \ldots)$, on obtient aussi :

$$\frac{1}{p^{\lambda+1}} \cdot F\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma(s+1)\, p^{s-\lambda} \sqsubset \int_0^\infty \left(\frac{t}{\omega}\right)^{\frac{\lambda}{2}} J_\lambda (2\sqrt{\omega t}) \cdot \omega^s \cdot d\omega ;$$

en posant $s - \lambda = \alpha$, il en résulte :

$$p^\alpha \sqsubset \frac{t^{\lambda/2}}{\Gamma(\alpha + \lambda + 1)} \int_0^{+\infty} J_\lambda (2\sqrt{\omega t})\, \omega^{\alpha + \frac{\lambda}{2}} \cdot d\omega$$

et donc :

$$\delta^{(\alpha)}(t) = \frac{t^{\lambda/2}}{\Gamma(\alpha + \lambda + 1)} \cdot \int_0^{+\infty} J_\lambda (2\sqrt{\omega t})\, \omega^{\alpha + \frac{\lambda}{2}}\, d\omega ;$$

pour chaque α, on peut utiliser les fonctions de Bessel d'ordre λ, tel que $\alpha + \lambda \neq -1, -2, \ldots$

On obtient ainsi, une formule de dérivation qui vaut pour α quelconque :

$$\frac{f^{(\alpha)}(t-0) + f^{(\alpha)}(t+0)}{2} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\tau)^{\frac{\lambda}{2}} f(\tau)\, d\tau \int_0^{+\infty} J_\lambda (2\sqrt{\omega(t-\tau)}) \cdot \omega^{\alpha+\frac{\lambda}{2}} d$$

*) Les deux dernières intégrales peuvent être interprétées comme convergentes, de plusieurs manières, par exemple dans le sens de la *convergence opérationnelle* c'est-à-dire que

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = \lim_{p \to 0} \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \lim_{p \to 0} \mathfrak{L}\, f(t).$$

p étant une variable complexe, tendant vers zéro sur un chemin quelconque ; pour p réel, et $\lim p = +0$, on a „la partie finie de l'intégrale".

5. Si $f(t)$ est une fonction réglée, alors, en utilisant encore les produits de composition avec une fonction delta comme facteur (formules dites „de séléction" *) et exprimant la fonction de Dirac, par une forme connue, convenable, on peut établir, par exemple, des formules de type Bromwich, Fourier, etc.

On a, en effet :

$$\frac{f^{(\alpha)}(t-0)+f^{(\alpha)}(t+0)}{2} = f(t) \ast \delta^{(\alpha)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\delta^{(\alpha)}(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} p^{\alpha}\,e^{pt}\,dp \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{-p\tau}\,d\tau \quad (c>0)$$

pour

$$\delta^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} p^{\alpha}\cdot e^{pt}\cdot dp \sqsupset p^{\alpha},$$

dans l'hypothèse de la convergence absolue de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt \quad (s_0 < Rp < s_1).$$

En supposant que $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et, en notant selon l'usage :

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt \,(Rp > s_0),$$

il en résulte des formules d'inversion de type Bromwich :

$$\frac{f^{(\alpha)}(t-0)+f^{(\alpha)}(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} p^{\alpha}\cdot F(p)\,e^{pt}\,dp \quad (c>0);$$

pour $\alpha = 0$, on obtient l'original en fonction de son image opérationnelle.

6. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ est convergente, alors en exprimant $\delta^{(\alpha)}(t)$ par une intégrale convergente dans le sens de la convergence opérationnelle, on obtient des formules de type Fourier :

On a ainsi :

$$\delta^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2\pi j}\lim_{c\to+0}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} p^{\alpha}\cdot e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}\cdot e^{j\left(\omega t+\alpha\frac{\pi}{2}\right)}\,d\omega \quad (p=j\omega)$$

*) Voir les observations de 9.

et donc

$$\frac{f^{(\alpha)}(t-0)+f^{(\alpha)}(t+0)}{2}=f(t)\ast\delta^{(\alpha)}(t)=\frac{e^{j\alpha\frac{\pi}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^{\alpha}\,e^{j\omega t}\,d\omega\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau\,;$$

pour $\alpha=0$, on obtient la formule classique de Fourier.

7. Si l'on décompose $\delta(t-\tau)$ par rapport à un spectre continu $\{\varphi(t,\omega)\}$, ω étant le paramètre du spectre, on obtient :

$$\delta(t-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{*}{\varphi}(t,\omega)\cdot\varphi(\tau,\omega)\,d\omega$$

et donc, — en utilisant le produit de composition $f(t)\ast\delta(t)$, — il en résulte :

$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}=f(t)\ast\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\cdot d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\,d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{*}{\varphi}(t,\omega)\,\varphi(\tau,\omega)\,d\omega$$

ou

$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{*}{\varphi}(t,\omega)\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\,\varphi(\tau,\omega)\,d\tau.$$

En posant $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\varphi(t,\omega)\,dt$, la formule inverse Fourier est

$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,\overset{*}{\varphi}(t,\omega)\,d\omega\,.$$

8. *Si une fonction $F(\omega)$, image Fourier par rapport au spectre continu $\{\varphi(t,\omega)\}$, est nulle en dehors d'un intervalle borné, alors l'original $f(t)$ est complètement déterminé par un certain ensemble dénombrable de ses valeurs, valeurs qui représentent les coordonées de $f(t)$, par rapport à un spectre discret déterminé, deduit du spectre continu $\{\varphi(t,\omega)\}$.*

Pour démontrer cette proposition, nous utiliserons les formules du point precedent.

Soit

$$F(\omega)=\begin{cases}0 & \text{pour} \quad |\omega|>\omega_0>0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\varphi(t,\omega)\,dt & \text{pour} \quad |\omega|<\omega_0\,,\end{cases}$$

la fonction dont il s'agit dans l'énoncé ; alors, en posant pour simplifier :

$$f(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2},$$

on a :

$$f(t) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\omega)\, \overset{*}{\varphi}(t, \omega)\, d\omega .$$

Il est facile à reconnaître l'analogie entre cette dernière expression et celle des coefficients du développement de $F(\omega)$ par rapport à un certain spectre discret $\{\varphi_n(\omega) = \varphi(\lambda_n, \omega)\}$, dans l'intervalle $[-\omega_0, +\omega_0]$; si $F(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \varphi_n(\omega)$, alors $c_n = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\omega)\, \overset{*}{\varphi}_n(\omega)\, d\omega$ et donc

$$f(t) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \overset{*}{\varphi}(t, \omega)\, d\omega \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \varphi(\lambda_n, \omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \overset{*}{\varphi}(t, \omega)\, \varphi(\lambda_n, \omega)\, d\omega.$$

Les fonctions $\delta_{\omega_0}(t, \lambda_n) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \overset{*}{\varphi}(t, \omega)\, \varphi(\lambda_n, \omega)\, d\omega$ sont *indépendantes de* $f(t)$; elles sont une sorte de deltas-tranches ou pseudodeltas, pour $\omega_0 \to +\infty$, en ayant $\lim_{\omega_0 \to +\infty} \delta_{\omega_0}(t, \lambda_n) = \delta(t - \lambda_n)$. Quant aux coefficients c_n, il est évident que : $c_n = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\omega)\, \overset{*}{\varphi}(\lambda_n, \omega)\, d\omega = f(\lambda_n)$, en comparant avec la valeur de $f(t)$ en fonction de $F(\omega)$.

Nous avons donc pour $f(t)$, l'expression :

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\lambda_n) \cdot \delta_{\omega_0}(\lambda_n, t)}$$

ce qui prouve la proposition énoncée.

En ce qui concerne l'ensemble dénombrable $\{\lambda_n = \lambda(n, \omega_0)\}$, qui détermine le spectre $\{\varphi(\lambda_n, \omega)\}$, il est donné par l'équation $\varphi(\lambda_n, \omega + 2\omega_0) = \varphi(\lambda_n, \omega)$, qui doit être une identité par rapport à ω.

En particulier, pour

$$\varphi(\lambda_n, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} e^{j\omega\lambda_n},$$

on a

$$2j\omega_0 \lambda_n = 2n\pi j, \quad \lambda_n = n \cdot \frac{\pi}{\omega_0}$$

et

$$\delta_{\omega_0}(t, \lambda_n) = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{j\omega(\lambda_n - t)}\, d\omega = \frac{\sin \omega_0 (t - \lambda_n)}{\omega_0 (t - \lambda_n)} = \frac{\sin(\omega_0 t - n\pi)}{\omega_0 t - n\pi}.$$

La fonction $f(t)$ est donc donnée par la relation:

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(n\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)\frac{\sin(\omega_0 t-n\pi)}{\omega_0 t-n\pi}$$

Cette dernière égalité est le contenu d'un théorème connu, dit de Kotelnikov.

9. *Observations.* Les produits de composition $f(t)*\delta^{(m)}(t)$, peuvent être démontrées directement, en considérant les intégrales comme des intégrales Stieltjes, relativement à la fonction unité $U(t)$ d'Heaviside et sans recourir au calcul opérationnel ou aux suites des fonctions qui ont $\delta^{(m)}(t)$ comme limite, méthodes contestables par plusieurs points de vue.

On a

$$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau=\lim_{A,\,B\to+\infty}\int_{-A}^{B} f(t-\tau)\,dU(\tau);$$

or,

$$\int_{-A}^{0} f(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(t-\tau_k')\,[U(\tau_{k+1})-U(\tau_k)]=$$

$$=\lim_{\tau_{n-1}'\to-0} f(t-\tau_{n-1}')\,[U(0)-U(\tau_{n-1})]=\frac{1}{2}f(t+0).$$

De même:

$$\int_{0}^{B} f(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(\ldots)=\lim_{\tau_0'\to+0} f(t-\tau_0')\,[U(\tau_1)-U(0)]=\frac{1}{2}f(t-0).$$

Pour

$$f(t)*\delta^{(m)}(t)=(-1)^m\cdot m!\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\,\tau^{-m}\,dU(\tau),$$

on a évidemment

$$f(t)*\delta^{(m)}(t)=f^{(m)}(t)*\delta(t),$$

car

$$f^{(p)}(t)*\delta^{(q)}(t)=f^{(p+1)}(t)*\delta^{(q-1)}(t)=\ldots=f^{(p+r)}(t)*\delta^{(q-r)}(t),$$

pour r entier et $0\leq r\leq q$.

Tous les calculs s'expriment aisément par des intégrales Stieltjes, relativement à $U(t)$, en ne faisant point intervenir les deltas de Dirac, bien que cela ne serait un défaut.

La Chaire de Mathématique
L'Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

En ce qui concerne quelques définitions, formules et résultats, on peut consulter :

1. *M. A. Lavrentiev* et *B. V. Sabat.* — Les méthodes de la théorie des fonctions de variable complexe, Moscou-Léningrad, 1951.
2. *N. Bourbaki.* — Fonctions de variable réelle, Paris, 1949.
3. *B. van der Pol* and et *H. Bremmer.* — Operational calculus based on the two-sided Laplace integral, Cambridge, 1950.
4. *D. Ivanenko* et *A. Sokolov.* — Théorie classique du champ (Nouveaux problèmes), Moscou-Léningrad, 1951.
5. *Maurice Janet.* — Précis de calcul matriciel et de calcul opérationnel, Paris, 1954.

ПРИЛОЖЕНИЙ ОСОБЕННЫХ δ-ФУНКЦИЙ ДИРАКА

(Краткое содержание)

Как свертки, даются выраженй производных действительного или комплексного порядка для функции действительного переменного с прерывистностями первого порядка.

Даются несколько интегральные выражений для δ — функций и кроме это и доказательвства формулы типа Фурье, Бромвичь, Котельников.

SOME LINEAR OPERATIONS OF DELTA-DIRAC TYPE

(Summary)

In this note are given with composition products, some expressions for any real or complex order derivatives of the functions of the real variable, with discontinuities of the first kind ; it is also given, some integral formulae for deltas ; finally, using Dirac deltas, are demonstrated Fourier, Bromwich, Kotelnikov formulae.

QUELQUES OPÉRATIONS LINÉAIRES DE TYPE DELTA-DIRAC

(Résumé)

Dans cette note ,on donnent sous la forme des produits de composition, des expressions pour les dérivées d'ordre réel ou complexe des fonctions de variable réelle, à discontinuités de prémière espèce ; outre quelques formules intégrales pour les deltas, on donnent aussi, des démonstrations, utilisant les deltas de Dirac, pour des formules de type Fourier, Bromwich, Kotelnikov.

EINIGE LINEAR OPERATIONEN VON DELTA-DIRAC TYPUS

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit, werden, in der Form von Faltungsprodukten, Ausdrücke für Differential-quotienten von einem reelen oder complexen Orden der Funktionen von einer reeler Veränderlichen, mit Diskontinuitäten erster Art, gegeben ; ausser einigen Integralformeln für delta's, werden auch Beweisen, welche Dirac delta's gebrauchen, für Formeln von Fourier, Bromwich, Kotelnikov typus, angeführt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 2

517.5

LA CONVERGENCE EN DELTA ET LE CALCUL OPÉRATIONNEL SINGULIER

par MARCIAN GUTMANN

1. Une question des plus importantes du calcul opérationnel est l'extension de l'ensemble des originaux et de l'ensemble des images, en partant de divers points de vue, pratiques ou théoriques.

En considérant seulement, la transformée de Laplace unilatérale $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt\,(p = s + j\omega)$, on voit qu'en demandant aux images $F(p)$, de vérifier la condition $\lim_{|p|\to\infty,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2}} |F(p)| = 0$, ils restent encore des fonctions analytiques élémentaires, comme : p^n (n entier, positif), les polynômes ou les fractions rationnelles ayant en $p = \infty$ un pôle, qui ne sont pas des images Laplace. Si on rénonce à cette restriction et on conserve les relations limites :

$$p \cdot F(p) \Big|_{\substack{Rp=+\infty \\ I=0}} = f(t) \Big|_{\substack{t=+0 \\ t=+\infty}} \qquad \text{(limites finies ou non)},$$

alors l'introduction des fonctions delta de divers ordres, permet *l'extension de l'ensemble des originaux Laplace,* de sorte que, les polynômes et les fractions rationnelles quelconques, en p, deviennent des images Laplace, leurs originaux s'exprimant à l'aide des fonctions singulières $\delta^{(n)}(t)$ *).

L'introduction des fonctions de Dirac présente ainsi une analogie avec l'introduction des nombres complexes ou des séries de Fourier qui ont permis l'extension de la notion de fonction de variable réelle (functio continua d'Euler etc.).

On observe cependant que les fonctions $\frac{1}{t^n}$, $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{t^n}$, etc. n'ont pas

*) La représentation de $\delta^{(n)}(t)$ à l'aide des opérations intégrales et des fonctions analytiques montre qu'il s'agit *en fait des fonctionnelles* linéaires relatives à la fonction (ou fonctionnelle) d'Heaviside, ayant comme images Laplace, des fonctions analytiques : $\delta^{(n)}(t) \rfloor p^n$.

encore des images, de même qu'avant l'introduction des deltas de Dirac, les fonctions p^n, $\sum_1^\infty a_n p^n$ n'avaient pas des originaux *).

Cette partie, sur la convergence en delta, essaie de répondre à cette question, d'un point de vue pratique particulier, bien que cela n'est pas un défaut.

*) Comme les intégrales $\int_0^{+\infty} t^{-n} e^{-pt}\,dt$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont divergentes en sens classique, pour obtenir des images Laplace pour t^{-n}, on doit modifier la convergence, ce que nous allons faire à l'aide des fonctions delta.

La modification en delta d'une fonction $f(t)$ pour laquelle $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\,dt$ diverge classiquement, signifie la construction d'une fonction $f_\delta(t)$ égale à $f(t)$, si $f(t)$ est finie, simultanément infinies, et tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_\delta(t)\, e^{-pt}\,dt$ soit finie et déterminée ; si les discontinuités t_α de $f(t)$, sont d'ordre fini (n_α), on voit qu'une modification linéaire en delta de $f(t)$ est donnée par :

$$f_\delta(t) = f(t) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha\beta}\, \delta^{(\beta)}(t - t_\alpha).^{**})$$

3. Tout d'abord, nous allons déterminer les images opérationnelles singulières de t^{-n} par deux méthodes.

Pour $f(t) = \frac{1}{t}$, on part évidemment de

$$t^{s-1} - \lambda\,\delta(t) \rightrightarrows \frac{\Gamma(s)}{p^s} - \lambda$$

où $\lambda = \lambda(s)$ sera déterminé, en demandant que $\lim_{s\to 0}\left[\frac{\Gamma(s)}{p^s} - \lambda(s)\right]$ soit finie et déterminée.

Or, on a, pour

$$\lambda = \frac{1}{s} : \lim_{s\to 0}\left[\frac{\Gamma(s)}{p^s} - \frac{1}{s}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{\Gamma(s+1) - p^s}{s}\cdot\frac{1}{p^s}\right] = \Gamma'(1) - \log p = -C - \log p$$

$(C = -\Gamma'(1)$, constante d'Euler).

On est donc conduit à la correspondance opérationnelle singulière

$$\boxed{\frac{1}{t} \rightrightarrows -C - \log p}$$

*) Car la correspondance opérationnelle $t^s \rightrightarrows \frac{\Gamma(s+1)}{p^{s+1}}$ est valable sauf pour les pôles de $\Gamma(s+1)$, c'est-à dire $s = -1, -2, \ldots$.

**) Les coefficients $\lambda_{\alpha\beta}$ sont tels que l'image de $f_\delta(t)$ soit déterminée etc; les calculs suivants donneront des détails.

l'original $\frac{1}{t}$ étant modifié en delta ; on voit que

$$\lim_{t\to t_0\neq 0}\left[\frac{1}{t}\right]_\delta = \lim_{t\to t_0\neq 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{s}\,\delta(t)\right] = \lim_{t\to t_0\neq 0}\frac{1}{t}$$

et

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{s}\,\delta(t)\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1-\frac{1}{s}\cdot t\,\delta(t)}{t}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ (\text{car } t\delta(t)=0).$$

4. De même, on a

$$\frac{1}{t-a}-\frac{1}{s}\,\delta(t-a) \sqsupset\!\underset{s\to 0}{} -e^{-ap}(C+\log p)$$

et

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{A_\alpha}{t-a_\alpha} \sqsupset -(C+\log p)\sum_{\alpha=1}^{n}A_\alpha e^{-a_\alpha p}$$

l'original étant modifié en delta.

5. Comme applications, on voit que les originaux de $(C+\log p)\,\mathrm{sh}ap$ et $(C+\log p)\sin ap$ sont donnés par le correspondances :

$$(C+\log p)\,\mathrm{sh}ap \sqsubset_{s\to 0} \frac{a}{t^2-a^2}-\frac{1}{2s}\left[\delta(t-a)-\delta(t+a)\right]$$

$$(C+\log p)\sin ap \sqsubset_{s\to 0} \frac{a}{t^2+a^2}-\frac{1}{2js}\left[\delta(t-ja)-\delta(t+ja)\right]$$

6. Pour $f(t)=\frac{1}{t^2}$, on part de

$$t^{s-2}-\lambda\,\delta'(t) \sqsupset \frac{\Gamma(s-1)}{p^{s-1}}-\lambda p$$

où $\lambda=\lambda(s)$ sera déterminé, tel que

$$\lim_{s\to 0}\left[\frac{\Gamma(s-1)}{p^{s-1}}-\lambda p\right]$$

soit finie et déterminée.

On a

$$\frac{\Gamma(s-1)}{p^{s-1}}-\lambda p=\frac{1}{p^{s-1}}\left[\frac{\Gamma(s+1)}{s(s-1)}-\lambda p^s\right]\underset{s\to 0}{\to}-p\left[\Gamma'(1)-\log p\right]=p(C+\log p)$$

si l'on pose $\lambda=\frac{1}{s(s-1)}$, comme on voit facilement.

Il en résulte la correspondance singulière :

$$\boxed{\frac{1}{t^2} \sqsupset p\,(C + \log p)}$$

la modification en delta pour $\frac{1}{t^2}$, donnant

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ s\to 0}} \left[\frac{1}{t^2}\right]_\delta = \lim_{\substack{t\to t_0\\ s\to 0}} \left[t^{s-2} - \frac{1}{s\,(s-1)}\,\delta'(t)\right] = \lim_{\substack{t\to t_0\\ s\to 0}} t^{s-2} = \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t^2}$$

(car on a $t^2\,\delta'(t) = 0$).

7. De même, pour $f(t) = \frac{1}{t^n}$ (n, entier positif), on part de

$$t^{s-n} - \lambda(s)\,\delta^{(n-1)}(t) \sqsupset \frac{\Gamma(s-n+1)}{p^{s-n+1}} - \lambda(s)\,p^{n-1}.$$

On voit que :

$$\frac{\Gamma(s-n+1)}{p^{s-n+1}} - \lambda p^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{p^{s-n+1}} \left[\frac{\Gamma(s+1)}{s\,(s-1)\dots(s-n+1)} - \lambda p^s\right] \underset{s\to 0}{\to} \frac{\Gamma'(1) - \log p}{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}\,p^{n-1}$$

si on prend

$$\lambda(s) = \frac{1}{s\,(s-1)\dots(s-n+1)}.$$

On est donc conduit à la correspondance opérationnelle singulière :

$$\boxed{\frac{1}{t^n} \sqsupset \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\,p^{n-1}\,(C + \log p)} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

La modification en delta de $\frac{1}{t^n}$ donne évidemment :

$$\lim_{t\to t_0} \left[\frac{1}{t^n}\right]_\delta = \lim_{\substack{t\to t_0\\ s\to 0}} \left[t^{s-n} - \lambda(s)\,\delta^{(n-1)}(t)\right] = \lim_{t\to t_0} t^{-n} \quad (\text{car } t^n\,\delta^{(n-1)}(t) = 0)\ ^*)$$

et aussi

$$\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\,p^n\,(C + \log p)\Big|_{\substack{p=0\\ Rp=+\infty}} = \left[\frac{1}{t^n}\right]_\delta\Big|_{\substack{t=+\infty\\ t=+0}} = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$$

---

*) On a :

$\delta^{(n)}(t) \sqsupset p^n$, $(-t)^{n+k}\,\delta^{(n)}(t) \sqsupset \frac{d^{k+n}}{dp^{k+n}}\,p^n = 0$ ou $t^{n+k}\,\delta^{(n)}(t) = \left(t^{n+k}\right)^{(n)}_{t=0} = 0$

8. Nous allons vérifier maintenant ces resultats, par une méthode directe ; en effet, de

$$\frac{1}{t^s} \sqsupset \frac{\Gamma(1-s)}{p^{1-s}} = \frac{\pi}{\Gamma(s)\sin s\pi} \cdot p^{s-1}$$

on obtient

$$\frac{1}{t^s} - \frac{\pi}{\sin s\pi} \cdot \frac{\Gamma(s-n+1)}{\Gamma(s)} \delta^{(n-1)}(t) \sqsupset \frac{\pi}{\Gamma(s)} \cdot \frac{p^{s-1} - \Gamma(s-n+1)\, p^{n-1}}{\sin s\pi}$$

avec

$$\lambda(s) = \frac{\pi}{\sin s\pi} \cdot \frac{\Gamma(s-n+1)}{\Gamma(s)}$$

arrangeant ainsi une indétermination pour l'image de $\left[\frac{1}{t^s}\right]_\delta$, si $s \to n$.

On a donc :

$$\lim_{s \to n} \frac{\pi}{\Gamma(s)} \cdot \frac{p^{s-1} - \Gamma(s-n+1)\, p^{n-1}}{\sin s\pi} = \frac{\pi}{\Gamma(n)} \cdot \frac{p^{n-1} \log p - \Gamma'(1)\, p^{n-1}}{\pi \cos n\pi}$$

ou

$$\left[\frac{1}{t^n}\right]_\delta \sqsupset \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\, p^{n-1}(C + \log p)$$

9. Les images singulières de $\left[\frac{1}{t^n}\right]_\delta$ vérifient l'inégalité

$$|F(p)| < M \cdot |p|^\alpha, \quad M, \alpha > 0, \quad \text{pour } |p| \gg 0.$$

Pour les originaux $f(t)$ des images satisfaisant à une telle inégalité, on voit qu'on a $f(t) = 0$ pour $t < 0$; en prenant pour contour d'intégration

$$C\left[s = 0,\ p = j\omega,\ -R < \omega < +R \text{ et } |p| = R,\ -\frac{\pi}{2} < \arg p < \frac{\pi}{2},\ R \to \infty\right]$$

et en appliquant une lemme connue, à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp \quad (c > 0),$$

on a sur

$$|p| = R \to \infty, \quad |\arg p| < \frac{\pi}{2} :$$

$$|pF(p)\, e^{pt}| < MR^{\alpha+1} e^{Rt\cos\theta} \to 0 \quad (\theta = \arg p), \text{ si } t < 0\ *).$$

*) Si $|F(p)| < M|e^{\lambda p}|$, $\lambda > 0$, $|p| \gg 0$, on a aussi $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(p)] = 0$, mais pour $t < -\lambda$, critère qui est quelque fois avantageux.

10. On a pour les fractions rationnelles $\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{m_\alpha} \frac{a_{\alpha\beta}}{(t-a_\alpha)^\beta}$, la correspondance singulière

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{m_\alpha} \frac{a_{\alpha\beta}}{(t-a_\alpha)^\beta} \sqsupset (C+\log p) \sum_{\alpha=1}^{n} e^{-a_\alpha p} \cdot \sum_{\beta=1}^{m_\alpha} \frac{(-1)^\beta}{(\beta-1)!} p^{\beta-1}.$$

11. Si les séries $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n t^n$ sont uniformément convergentes, pour $0 \leqq t < +\infty$, on peut écrire :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n t^n \sqsupset (C+\log p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} a_{-n} p^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{p^{n+1}}.$$

12. Comme application, soit à déterminer l'original de

$$F(p) = \frac{p(C+\log p)}{1-e^{-p\pi}}$$

(C, contante d'Euler).

On a

$$F(p) = p(C+\log p) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-np\pi} \quad (|e^{-p\pi}| < 1, \text{ car } Rp > 0),$$

d'où

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(t-n\pi)^2},$$

(en prenant l'original modifié en delta) et qui représente la partie principale de $\frac{1}{\sin^2 t}$ relative aux pôles compris entre $[0, \infty]$.

De même, l'original de

$$F(p) = (C+\log p) \sum_{m=N_1}^{N_2} \cos\left(m+\frac{1}{2}\right) p$$

est

$$f(t) = -\sum_{m=N_1}^{N_2} \frac{t}{t^2+\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2},$$

car on a

$$\frac{t}{t^2+a^2} \sqsupset -(C+\log p)\cos ap$$

(en prenant l'original modifié en delta).

On reconnaît en $f(t)$, la partie principale de th$t$ relative aux pôles compris entre

$$\left[-j\left(N_2+\frac{1}{2}\right)\pi,\ -j\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\pi\right] \text{ et } \left[j\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\pi,\ j\left(N_2+\frac{1}{2}\right)\pi\right].$$

La Chaire de Mathématique
L'Institut Politechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

En ce qui concerne quelques définitions, formules et résultats, on peut consulter :

1. *M. A. Lavrentiev* et *B. V. Sabat.* — Les méthodes de la théorie des fonctions de variable complexe, Moscou-Léningrad, 1951.
2. *B. van der Pol* and *H. Bremmer.* — Operational calculus based on the two-sided Laplace integral, Cambridge, 1950.
3. *Maurice Janet.* — Précis de calcul matriciel et de calcul opérationnel, Paris, 1954.
4. *N. W. Mc. Lachlan.* — Modern Operational Calculus, London, 1948.

СХОДИМОСЬ В δ (ДЕЛТА) И ОСОБЕННОЕ ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

(Краткое содержание)

Использоваются сходимость в делта, аналогично определеное как разности потенциалов и находится, из двух методах, особенное операционные изображения функций t^{-n}, видоизменёные в делта, которые не обладали до настоящего время обкновеные изображения по Лапласу, так как ни функций p^n не одладали оригиналов по Лапласу до введения особенные δ — функций Дирака.

Даются несколько применения также и проверка асимптотических соотношениах для этих особенных изображениях.

THE CONVERGENCE IN DELTA AND THE SINGULAR OPERATIONAL CALCULUS

(Summary)

Using the convergence in delta, defined by analogy with the potentials difference, it determins by two methods, the singular operational images of the functions t^{-n}, modified in delta ; these functions had not ordinary Laplace images, so how before the introduction of the singular deltas of Dirac, nor the functions p^n had not the originals Laplace ; it is given then, some applications and a verification of a limit-relations for a singular Laplace images.

LA CONVERGENCE EN DELTA ET LE CALCUL OPERATIONNEL SINGULIER

(Résumé)

En utilisant la convergence en delta, définie par une analogie avec la différence de potentiels, on déterminent par deux méthodes, les images opérationnelles singulières des fonctions t^{-n}, modifiées en delta ; ces fonctions n'avaient pas des images Laplace ordinaires, de même qu'avant l'introduction des deltas singulières de Dirac, ni les fonctions p^n n'avaient pas des originaux Laplace ; on donnent ensuite, quelques applications, ainsi qu'une verification des relations limites, relativement à ces images Laplace singulières.

DIE KONVERGENZ IN DELTA UND DIE SINGULÄRE OPERATIONALRECHNUNG

(Zusammenfassung)

Es werden durch zwei Methoden, die singulären operationalen Abbildungen der funktionen t^{-n} nach delta modifiziert gegeben, durch benutzung der delta Konvergenz, die durch Analogie mit den Potentialen Differenzen definiert ist ; diese Funktionen hatten keine ordinären Laplace Abbildungen, eben so wie die p^n Funktionen, keine ordinären Laplace Originale, bis zur Einführung der singulären Dirac delta's, hatten ; es werden dann einige Anwendungen gegeben, so wie die Prufung der Grenz- beziehungen im zusammenhang mit diesen singulären Laplace Abbildungen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

NOTE SUR LA PONCTUATION DES ÉPURES D'INTERSECTION DES POLYÈDRES ET DES SURFACES*)

par AURELIAN TĂNĂSESCU

Nous donnerons une méthode générale qui nous rendra par la suite de grands services dans la ponctuation des épures d'intersections de surfaces et de polyedres.

On applique cette méthode, qui s'adresse spécialement aux jeunes rechercheurs, dans les situations ou la jonction des points est faite avec la règle du mobile.

La ponctuation des épures d'intersection des polyèdres et des surfaces dépend de l'objet qu'on veut représenter et il importe de la faire avec grande attention.

Elle n'est pas toujours évidente et s'assure, en général, à l'intuition de „voir dans l'espace" pour le rechercheur.

On sait que dans la ponctuation du polygone (courbe) d'intersection tout côté (arc de courbe) qui est à l'intersection de deux faces (portions de surfaces) vues est vu et tout côté (arc de courbe) qui est à l'intersection de deux faces (portions de surfaces) dont une au moins est cachée, est caché.

Nous enfermerons ce principe connu dans une diagrame que nous venons d'attacher au tableau qui a été employé pour la jonction des points.

I. Soit, par exemple, l'intersection d'un prisme et d'un cylindre. (Fig. 1).

Les points de l'intersection sont:

a	1	2
	α'	α'_1
e	3	4
	β'	β'_1

g	3	4
	γ'	γ'_1
d	5	6
	δ'	δ'_1

h	5	6
	ε'	ε'_1
k	7	8
	ν'	ν'_1

f	7	8
	ϱ'	ϱ'_1
m	9	10
	μ'	μ'_1

b	9	10
	φ'	φ'_1
t	11	12
	θ'	θ'_1

*) Communication presentée à la II-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest (20—22 Juin 1956).

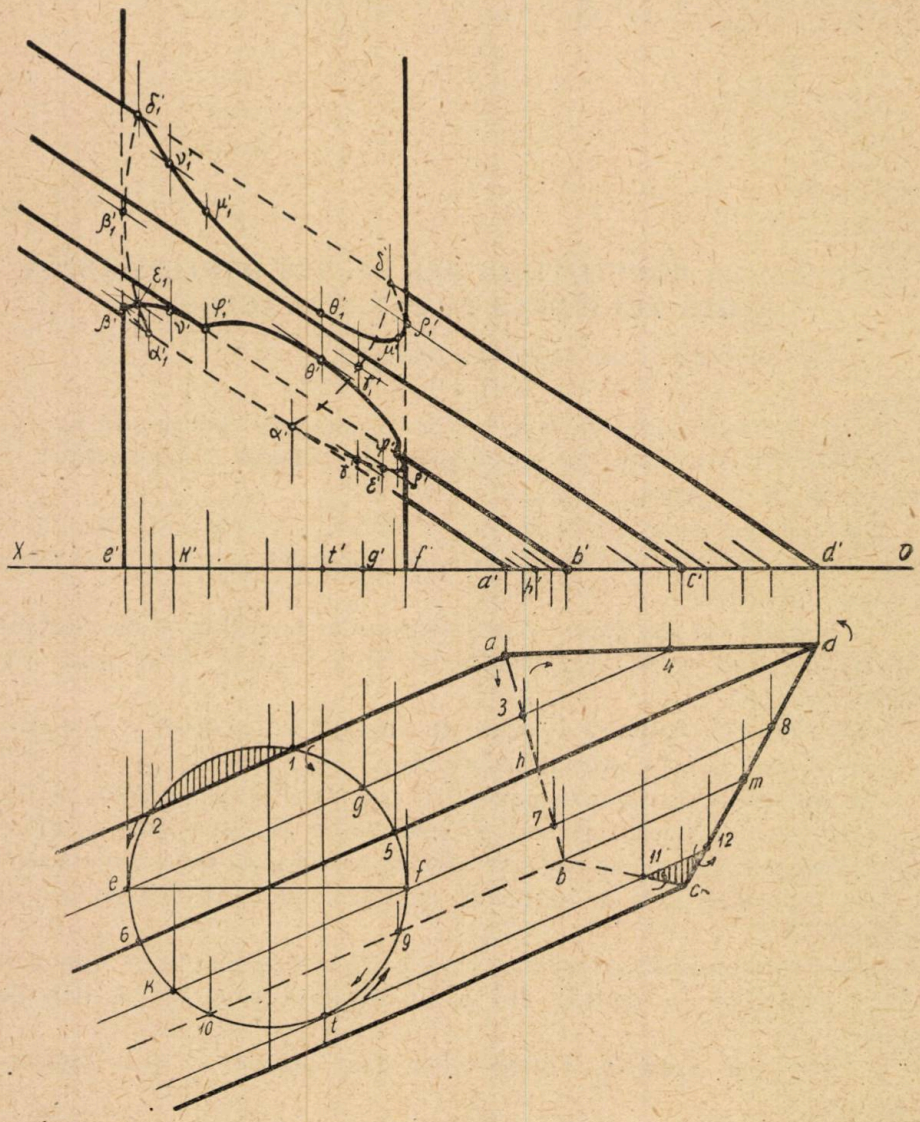
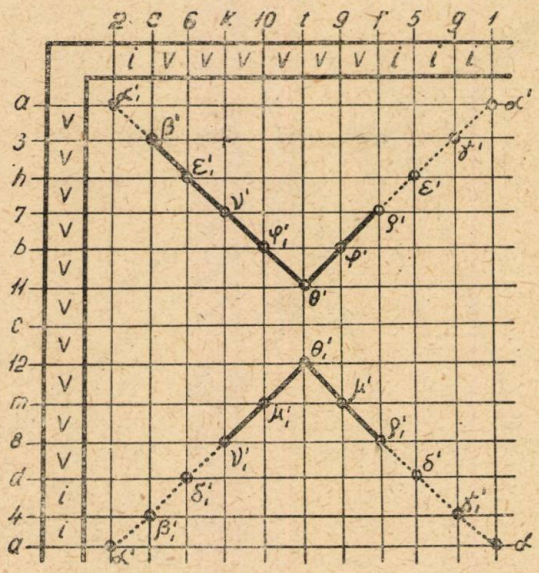


Fig. 1.

La règle du mobile donne le tableau suivant pour la jonction des points :

Cylindre	2	*e*	6	*k*	10	*t*	9	*f*	5	*g*	1	*g*	5	*f*	9	*t*	11	*k*	6	*e*	2
Prisme	*a*	3	*h*	7	*b*	11	*b*	7	*h*	3	*a*	4	*d*	8	*m*	12	*m*	8	*d*	4	*a*
Intersection	α'	β'	ε'	ν'	φ'	θ'	φ'	ϱ'	ε'	γ'	α'	γ'	δ'	ϱ'	μ'	θ'	μ'	ν'	δ'	β'	α'

Construisons aussi la diagrame de Д. Г. Анапов pour la jonction des points et pour la punctuation :



Nous remarquons la même succession des génératrices ou des parallèles aux arêtes comme dans le tableau du mobile, d'ou la diagrame qui suit :

CYLINDRE	2	e	6	k	10	t	9	f	5	g	1	g	5	f	9	t	10	k	6	e	2
PRISME	a	3	h	7	b	11	b	7	h	3	a	4	d	8	m	12	m	8	d	4	a
INTERSECTION	α'_1	β'_1	ε'_1	ν'	φ'_1	θ'	φ'	ϱ'	ε'	γ'	α'	γ'_1	δ'	ϱ'_1	μ'	θ'_1	μ'_1	ν'_1	δ'_1	β'_1	α'_1
PONCTUATION																					
CYLINDRE	o	o	—	—	—	—	—	o	—	—	—	—	—	o	—	—	—	—	—	o	o
PRISME	o	—	—	—	—	—	—	—	—	—	o	—	o	—	—	—	—	—	o	—	o
INTERSECTION	o	o	—	—	—	—	—	o	—	—	—	—	—	o	—	—	—	—	o	—	o

Nous avons déterminé d'abord dans chaque solide les faces (portions de surfaces) vues et cachées, indépendamment de l'autre solide (les traits pleins).

II. Soit l'intersection d'un prisme et d'une pyramide. (Fig. 2).

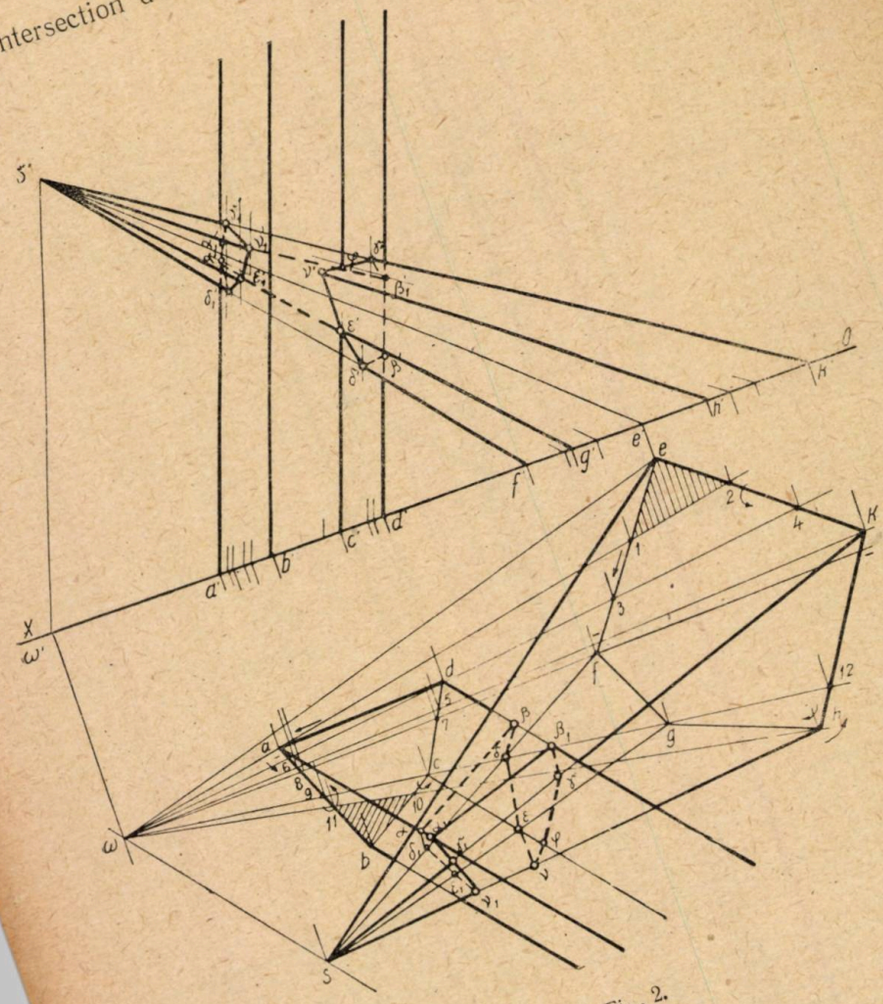


Fig. 2.

Les points de l'intersection sont:

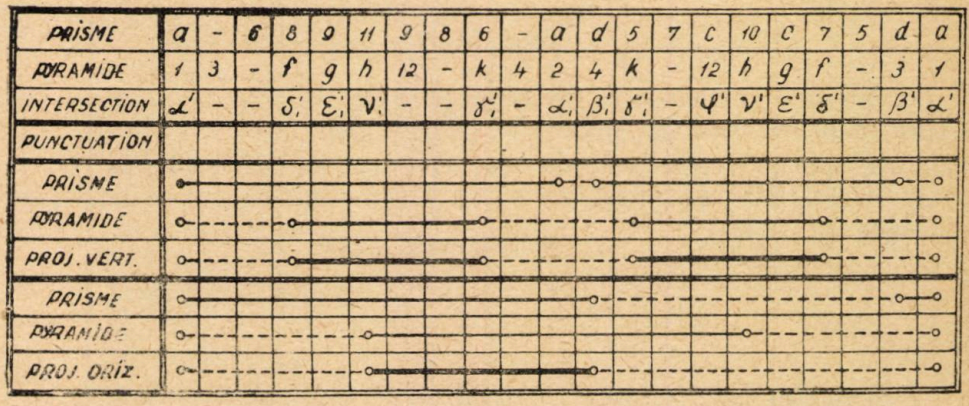
a	1	2
	α′	α′₁
d	3	4
	β′	β′₁

k	5	6
	γ′	γ′₁
f	7	8
	δ′	δ′₁

g	c	9
	ε′	ε′₁
h	10	11
	ν′	ν′₁

c	12	/
	φ′	/

L'étude pour la ponctuation est :



La Chaire de Géométrie descriptive
L'Institut Polytechnique de Bucarest

О ВИДИМОСТИ ЧЕРТЕЖЕЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ С ПОВЕРХНОСТЯМИ

(Краткое содержание)

Это сообщение содержит общий метод для изучения видимости чертежей пересечения многогранников с поверхностями.

Этот метод, в особенности предусмотренный для молодых исследователей, применяется в тех случаях, когда соединение точек производится с помошью правила подвижного тела (последовательности).

OVER THE PUNCTUATION OF THE INTERSECTION BETWEEN POLYEDRES AND SURFACES

(Summary)

The work includs a general method for the study of the punctuation of the intersections between polyedres and surfaces.

This method — with addresses special to the young researchers — is used in the situations in with the junction of the points is made by the mean of the rule of the movable.

SUR LA PONCTUATION DES ÉPURES D'INTERSECTION DES POLYÈDRES ET DES SURFACES

(Résumé)

L'ouvrage contient une méthode générale pour la ponctuation des épures d'intersections de surfaces et de polyèdres.

On applique cette méthode, qui s'adresse specialement aux jeunes rechercheurs, dans les situations ou la jonction des points est faite avec la règle du mobile.

ÜBER DIE SICHTBARKEIT DER AUFRISSE DER SCHNITTE VON VIELFLACHEN UND FLÄCHEN

(Zusammenfassung)

Die Mitteilung enthält eine allgemeine Methode für das Studium des Sichbarkeit der Aufrisse der Schnitte von Vielflachen und Flächen.

Diese Methode — wendet sich besonders an die jungen Wissenschaftler — und findet in jenen Fällen Anwendung, in welchen die Vereinigung der Punkte mit Hilfe der Regel des beweglichen Punktes erreicht wird.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 2

HIDRAULICA

532

REMARQUES SUR LES RELATIONS ENTRE LES TENSIONS ET LES VITESSES DE DEFORMATIONS UNITAIRES DANS LE MOUVEMENT LAMINAIRE DES FLUIDES REELS INCOMPRESSIBLES *)

par DAN TASCA

1. Dans un travail antérieur [1], nous avons appliqué une méthode vectorielle pour l'établissement de l'équation de NAVIER-STOKES :

$$\frac{d\bar{v}}{dt}+\frac{\nabla p}{\varrho}=\bar{f}+\nu\nabla^2\bar{v} \tag{1}$$

pour les fluides incompressibles, où nous avons adopté pour la loi de NEWTON la forme :

$$\bar{\tau}=\eta\frac{d\bar{v}}{dn}. \tag{2}$$

Vu que cette derniere relation n'est pas valable pour les fluides compressibles et que sa valabilité n'est pas évidente même pour les fluides incompressibles, il nous semble utile de lui donner une justification tout en comparant les méthodes analytique et vectorielle, utilisées indépendamment à l'-établissement des équations de NAVIER-STOKES. Ces équations s'obtiennent en précisant les relations entre les tensions et les vitesses de déformations unitaires dans les équations de mouvement des fluides réels [2] :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}&=f_x+\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)\\
\frac{dv_y}{dt}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}&=f_y+\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)\\
\frac{dv_z}{dt}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}&=f_y+\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

2. Dans la méthode analytique, les vecteurs $\bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y, \bar{\tau}_z$ représentent les tensions développées sur les projections normales aux axes Ox, Oy,

*) Communication presentée à la IV-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest (le 18—19 Oct. 1958).

Oz de la surface oblique où regne la tension $\bar{\tau}$ (fig. 1) et leurs composantes cartésiennes en sont [3] :

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\eta\frac{\partial v_x}{\partial x},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right),\quad \tau_{xz}=\tau_{zx}=\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\\ \tau_{yy} &= 2\eta\frac{\partial v_y}{\partial y},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy}=\eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right),\quad \tau_{zz}=2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

En vue d'introduire ces expressions dans les équations (3), l-on observe que par dérivation, les termes

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\bar{v}),\quad \frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot\bar{v}),\quad \frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot\bar{v}) \qquad \text{s'annullent, car } \nabla\cdot\bar{v}=0 \qquad (5)$$

n'est autre que la condition de continuité pour les fluides incompressibles, en sorte que seuls les termes restants composent l'équation (1) écrite analytiquement.

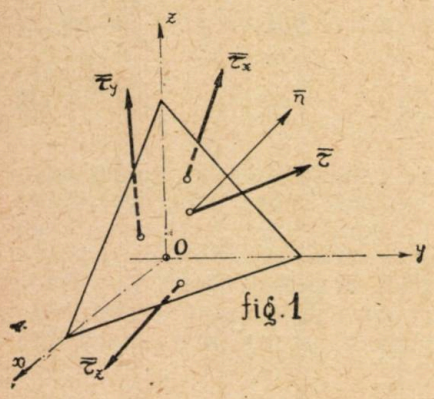


fig. 1

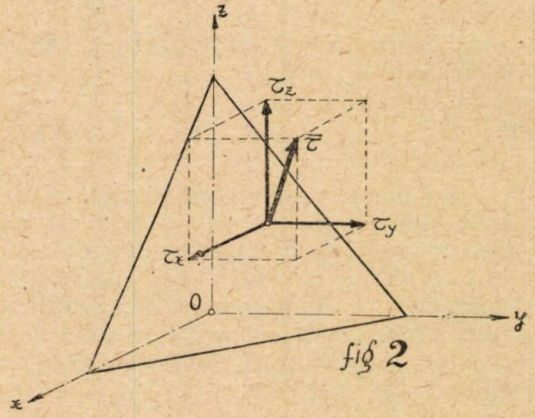


fig 2

3. Dans la méthode vectorielle, les tensions τ_x, τ_y, τ_z représentent les projections cartésiennes du vecteur $\bar{\tau}$ (fig. 2) et, eu égard à la relation (2), elles ont les expressions :

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= \eta\frac{dv_x}{dn}=\eta(\nabla v_x\cdot\bar{n})=\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial n}n_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}n_y+\frac{\partial v_x}{\partial z}n_z\right)\\ \tau_y &= \eta\frac{dv_y}{dn}=\eta(\nabla v_y\cdot\bar{n})=\eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}n_x+\frac{\partial v_y}{\partial y}n_y+\frac{\partial v_y}{\partial z}n_z\right)\\ \tau_z &= \eta\frac{dv_z}{dn}=\eta(\nabla v_z\cdot\bar{n})=\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}n_x+\frac{\partial v_z}{\partial y}n_y+\frac{\partial v_z}{\partial z}n_z\right) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

D'autre part, de la condition d'équilibre entre les forces de surface appliquées à un tétraèdre élémentaire, l-on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= \tau_{xx}\, n_x + \tau_{xy}\, n_y + \tau_{xz}\, n_z \\ \tau_y &= \tau_{yx}\, n_x + \tau_{yy}\, n_y + \tau_{yz}\, n_z \\ \tau_z &= \tau_{zx}\, n_x + \tau_{zy}\, n_y + \tau_{zz}\, n_z \,. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Il suffit d'identifier les termes correspondants des équations (6) et (7), pour en trouver :

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xx} &= \eta \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \tau_{yx} &= \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \tau_{zx} &= \eta \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \tau_{zy} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \tau_{zz} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

qui — dérivés et introduits dans les équations (3) — conduisent également à l'équation (1) écrite sous forme analytique.

4. En conclusion, la relation (2) attribuée à la loi de NEWTON est rigoureusement éxacte quant aux fluides incompressibles, tandis que les expressions (4) engendrent des complications inutiles, car les termes supplémentaires s'annullent conformément à la condition de continuité (5).

Le fait d'attribuer aux tensions τ_x, τ_y, τ_z des significations différentes dans les deux méthodes, s'avère avantageux en vue d'établir l'équation (1) par la méthode vectorielle, qui est de beaucoup plus expéditive, sans nuire toutefois à la rigueur du raisonnement.

Le Laboratoire d'Hydraulique
L'Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. D. TAȘCĂ — Stabilirea pe cale vectorială a ecuațiilor de mișcare a fluidelor reale și a ecuațiilor lui NAVIER-STOKES pentru fluide incompresibile — Bull. Inst. Polyt. Buc. t. XIX (1957) fasc. 1—2. p. 283-285.
2. S. M. TARG — Osnovaé zadatch teorii laminarnah tetchenii — Edit. pour la littérature technico-théorique, Moscou (1951) Léningrade p. 33 rel. (1.28).
3. Ibidem, p. 41, rel. (1.42).

ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОТНОШЕНИЙ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНЯМИ И СКОРОСТЯМИ ЕДИНОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ РЕАЛЬНЫХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

(Краткое содержание)

Автор показывает правильность отношения (2) приланново закону вязкости Нютона, использованному в его предшествующей работе [1] сопоставлением аналитического метода с векториальным, причем

каждый в отдельности даёт возможность самостоятельно уравнение Навье-Стокса (1) для несжимаемых жидкостей.

При этои, он доказывает, что отношения (4) приданные тому же самому закону производят излишние усложнения, так как дополнительные члены исчезают согласно условию непрерывности.

REMARKS ON THE RELATIONSHIP BETWEEN STRESSES AND VELOCITIES OF UNIT DEFORMATION IN THE LAMINAR FLOW OF REAL UNCOMPRESSIBLE FLUIDS

(Summary)

The author justifies the validity of the relation (2) given to the NEWTON's viscosity law, utilized in his previous work [1], comparing the analytical method with the vector one, by which it can establish independently the NAVIER-STOKES'equation (1) for uncompressible fluids.

He demonstrates that the relations (4) given to the same law acusse useless complications, since the supplementary terms vanish in compliance with the equation of continuity.

REMARQUES SUR LES RELATIONS ENTRE LES TENSIONS ET LES VITESSES DE DEFORMATIONS UNITAIRES DANS LE MOUVEMENT LAMINAIRE DES FLUIDES REELS INCOMPRESSIBLES

(Résumé)

L'auteur justifie la valabilité de la relation (2) attribuée à la loi de NEWTON sur la viscosité, utilisée dans son travail antérieur [1] par la comparaison des méthodes analytique et vectorielle, dont on peut établir indépendamment l'équation de NAVIER-STOKES (1) pour les fluides incompressibles.

Il en montre que les relations (4) attribuées à la même loi engendrent des complications inutiles, parce que les termes supplémentaires s'annullent conformément à la condition de continuité.

BEMERKUNGEN ÜBER DEN BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN SPANNUNGEN UND DIE SPEZIFISCHE DEFORMATIONSGESCHWINDIGKEITEN BEI DER LAMINAR STRÖMUNG DER ZÄHEN FLÜSSIGKEITEN

(Zusammenfassung)

Der Verfasser beweist die Gültigkeit der Beziehung (2) beigelegt zu dem NEWTON-sche Zähigkeitsgesetzen, die in seinem früheren Werken [1] benützt war, bei der Vergleichung zwischen den analytischen und vektoriellen Verfahren, die zur Festsetzung der NAVIER-STOKES-sche Gleichung (1) für unelastische Flüssigkeiten unabhänglich benützen werden.

Er beweist gleichzeitig dass die beigelegte jeden Gesetz Beziehungen (4) herbeiziehen nutzlose Verwicklungen, als die nachträgliche Glieder verschwinden aus Gründen der Kontinuitätsgleichung.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 2

LE MOUVEMENT HÉLICOÏDAL GROMECA-BELTRAMI D'UN FLUIDE PARFAIT DANS UNE CONDUITE CYLINDRIQUE CIRCULAIRE

par STEFAN ZAREA

1. Parmi les classes particulières des mouvements hélicoïdaux des fluides, il existe une, qui satisfait la condition

$$\operatorname{rot} \overline{V} = \alpha \overline{V} \tag{1.1}$$

où $\alpha = \alpha\ (x, y, z)$ est une fonction arbitraire, continue, avec ses dérivées de premier ordre.

Les mouvements hélicoïdaux qui satisfont la condition (1.1) nous allons les nommer mouvements hélicoïdaux de type Gromeca-Beltrami, car I. S. Gromeca (1) et E. Beltrami (2) ont été les premiers qui ont étudié cette classe de mouvements.

L'équation du mouvement permanent d'un fluide parfait écrit sous la forme vectorielle est

$$-\operatorname{grad} E = \overline{V} \times \operatorname{rot} \overline{V} \tag{1.2}$$

où

$$E = \frac{p}{\varrho} + \frac{V^2}{2} + U$$

U — le potentiel des forces extérieures.

En supposant que le fluide est incompressible, l'équation de continuité est identiquement satisfaite.

L'étude du mouvement hélicoïdal de type Gromeca-Beltrami est réduite donc à l'intégration des trois équations différentielles scalaires, qui se déduisent de l'équation vectorielle (1.1).

2. Le mouvement hélicoïdal d'un fluide parfait dans une conduite cylindrique circulaire a été étudié par I. S. Gromeca (1), L. A. Milovitch (3), B. Pichkine (4), R. Lüst et A. Schlüter (5) dans l'hypothèse $\alpha = \text{const.}$ Seulement S. Popov (6) et O. F. Vassiliev (7) ont étudié le cas ou α est une fonction donnée du rayon de la conduite. L'expression de la fonction α utilisée par S. Popov n'est pas bien choisie. La fonction α utilisée par O. F. Vassiliev est un cas particulier de celle considérée par nous.

Ainsi nous supposerons que la fonction α a l'expression :

$$\alpha = \frac{(1+n)\, A\, r^{n-1}}{\sqrt{B^2 - \dfrac{1+n}{n} A^2 r^{2n}}} \tag{2.1}$$

où — A, B, n sont des constantes.

Nous utiliserons un système de coordonnées cylindriques r, θ, z. Les composants de la vitesse et du tourbillon sur les axes des coordonnées sont notés avec V_r, V_θ, V_z et Ω_r, Ω_θ, Ω_z.

Etant donné que dans le mouvement d'un fluide dans une conduite cylindrique circulaire $V_r = \Omega_r = 0$, il résulte que l'équation vectorielle (1.1) est équivalente aux équations suivantes :

$$\frac{\Omega_\theta}{V_\theta} = \frac{\Omega_z}{V_z} = \frac{\alpha}{2}. \tag{2.}$$

Le mouvement étant uniforme et à symétrie axiale il y résulte que $\overline{V}$, rot $\overline{V}$, α et E sont des fonctions seulement de la variable r.

Les expressions des composants Ω_θ et Ω_z du tourbillon sont :

$$\Omega_\theta = -\frac{1}{2}\frac{dV_z}{dr}$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{dV_\theta}{dr} + \frac{V_\theta}{r}\right). \tag{2.3}$$

Ainsi les équations (2.2) deviennent :

$$\frac{-\frac{dV_z}{dr}}{V_\theta} = \frac{\frac{dV_\theta}{dr} + \frac{V_\theta}{r}}{V_z} = \alpha. \tag{2.4}$$

En éliminant V_z et en tenant compte de (2.1), il en résulte la suivante équation différentielle pour V_θ

$$\frac{d^2V_\theta}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{dV_\theta}{dr} - \left(\alpha^2 - \frac{\alpha'}{r\alpha} - \frac{1}{r^2}\right)V_\theta = 0. \tag{2.5}$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$V_\theta = Ar^n. \tag{2.6}$$

De (2.4) il résulte que

$$V_z = \sqrt{B^2 - \frac{1+n}{n}A^2 r^{2n}}. \tag{2.7}$$

Pour déterminer les constantes, nous utilisons les conditions aux limites :

$$r = R\,; \quad V_z = V_{z\,min}$$

$$r = 0\,; \quad V_z = V_{z\,max}$$

où : R est le rayon de la conduite.

Ainsi on déduit :

$$B = V_{z\,max}$$

$$A^2 = \frac{n}{(1+n)R^n}(V^2_{z\,max} - V^2_{z\,min}).$$

Les expressions des composants des vitesses seront donc :

$$\frac{V_z}{V_{z\,max}} = \sqrt{1-(1-\beta^2)\,\varrho^{2n}}$$

$$\frac{V_\theta}{V_{z\,max}} = \varrho^n \sqrt{\frac{n}{1+n}(1-\beta^2)} \qquad (2.8)$$

où

$$\beta = \frac{V_{z\,min}}{V_{z\,max}} \; ; \quad \varrho = \frac{r}{R}$$

La représentation graphique des rapports $\frac{V_z}{V_{z\,max}}$, $\frac{V_\theta}{V_{z\,max}}$ en fonction de ϱ pour $n = 1$; 1,5 ; 2 et pour $\beta = 0{,}26$; 0,56 est donnée dans les fig. 1 ... 4.

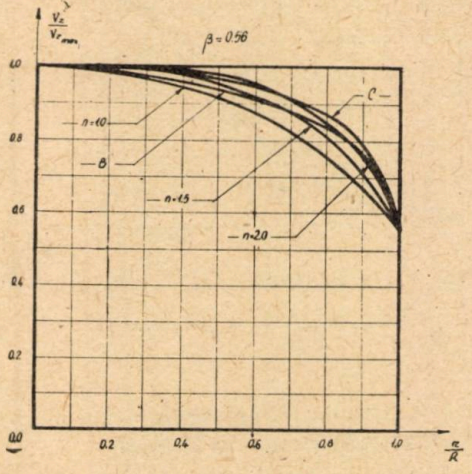


Fig. 1. La répartition de la vitesse $\frac{V_z}{V_{z\,max}} = f\left(\frac{r}{R}\right)$, pour $\beta = 0{,}56$:
La courbe B représente la répartition de la vitesse dans un mouvement turbulent, pour $R_e = 723.10^3$,
La courbe C représente la répartition de la vitesse dans un mouvement turbulent, pour $R_e = 2780.10^3$.

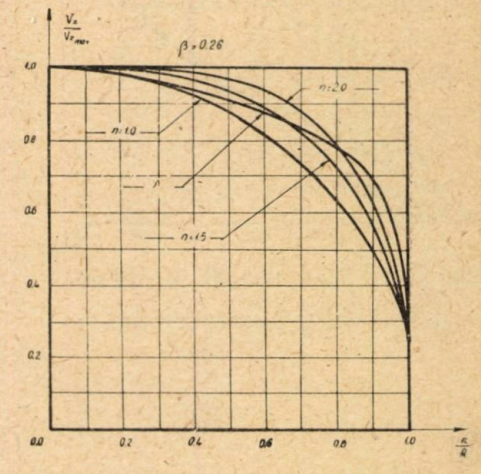


Fig. 2. La répartition de la vitesse $\frac{V_z}{V_{z\,max}} = f\left(\frac{r}{R}\right)$, pour $\beta = 0{,}26$:
La courbe A représente la répartition de la vitesse dans un mouvement turbulent, pour $R_e = 5{,}7.10^3$,

Si $n = 1$, on obtient le cas étudié par O. F. Vassiliev (7).

On peut observer que les courbes de répartition de la vitesse axiale, correspondantes aux différentes valeurs de n et β sont suffisamment semblables a celles du mouvement turbulent d'un fluide réel [8].

L'équation différentielle des lignes de courant est

$$\frac{r\,d\theta}{\left(\frac{r}{R}\right)^n \sqrt{\frac{n}{1+n}(1-\beta^2)}} = \frac{dz}{\sqrt{1-(1-\beta^2)\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}}}.$$

Par intégration on obtient les hélices cylindriques

$$z = \frac{\sqrt{1-(1-\beta^2)\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}}}{\left(\frac{r}{R}\right)^n \sqrt{\frac{n}{1+n}(1-\beta^2)}} = r\theta + C. \qquad (2.9)$$

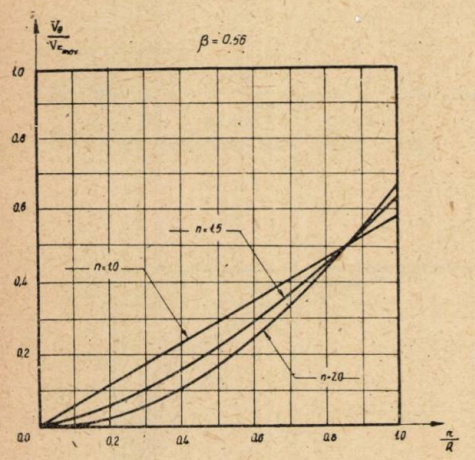


Fig. 3. La répartition de la vitesse $\frac{V_\theta}{V_{z\,max}} = f\left(\frac{r}{R}\right)$, pour $\beta = 0{,}56$.

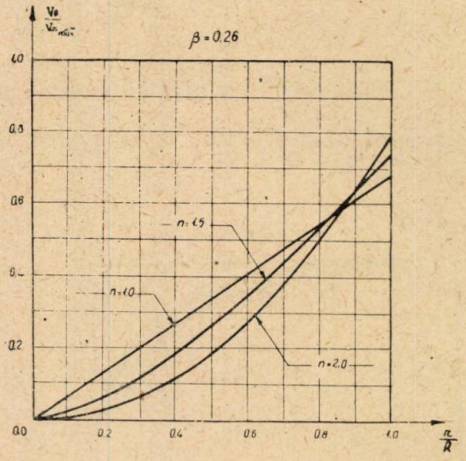


Fig. 4. La répartition de la vitesse $\frac{V_\theta}{V_{z\,max}} = f\left(\frac{r}{R}\right)$, pour $\beta = 0{,}26$.

La Chaire d'Hydraulique
L'Institut Politechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Gromeca*, I. S. Necotorie slutchaï dvij. nesj. jidcosti, Kazan, 1881.
2. *Beltrami, E.* — Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere, t. XXII, Milano, 1889.
3. *Milovitch, A. I.* Osnovi dinamiki jidcosti, Energoïzdat, M-L, 1933.
4. *Pichkine, B. A.* — Izvestia Acad. Nauk S.S.S.R., OTN, Nr. 1, 1947.
5. *Lüst, R. Schlüter, A.* — Zeitschrift für angew. Math. u. Mech., 1955, Nr. 1—2.
6. *Popov, S.* Vestnic Moscov. Univ. 1948, Nr. 8.
7. *Vassiliev, O. F.* — Sbornic Trudov MISI, Nr. 8, Moscva, 1955.
8. *Frenkel, B. L.* Ghidravlica, Gosenergoïzdat, Moscva, 1956.

ВИНТОВОЕ ДВИЖДНИЕ ГРОМЕКА-БЕЛТРАМИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГОВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТРУБОПРОВОДЕ

(Краткое содержание)

Изучается равномерное винтовое движение, у овлетворяющее условие (1,1), в круговом цилиндрическом трубопроводе.

Предполагается, что функция α дана (2.1) переменной r. Кривая распределения осевой скорости, полученная таким образом, аналогична кривой скорости в турбулентном движении.

THE HELICOIDAL MOVEMENT GROMECA — BELTRAMI OF AN IDEAL FLUID IN A CYLINDRICAL CIRCULAR PIPE

(Summary)

The helicoidal uniform flow wich satisfies the condition (1.1) in a circular cylindrical pipe is studied.

It is supposed that the α function is a function (2.1) given by the variable r. The repartition curve of the axial velocity thus obtained, is analogous with the velocity curve in a turbulent movement.

LE MOUVEMENT HÉLICOÏDAL GROMECA-BELTRAMI D'UN FLUIDE PARFAIT DANS UNE CONDUITE CYLINDRIQUE CIRCULAIRE

(Résumé)

On étudie l'écoulement hélicoïdal uniforme, qui satisfait la condition (1.1), dans une conduite cylindrique circulaire. On suppose que la fonction α est une fonction donnée (2.1) de la variable r. La courbe de la vitesse axiale ainsi obtenue est analogue à la courbe de la vitesse d'un mouvement turbulent, dans une conduite lisse, fig. 1, 2.

SPIRALBEWEGUNG GROMECA — BELTRAMI EINER IDEALEN FLÜSSIGKEIT IN EINEM ZYLINDRISCHEN KREISROHR

(Zusammenfassung)

Es wurde eine glechförmige spirale Strömung, in einem zylindrischen Kreisrohr studiert, die die Bedingung (1.1) genügt.

Es wird angenommen dass die Funktion eine gegebene Funktion (2.1) der Veränderlichen r ist.

Die Kurve der so erhaltenen Axialgeschwindigkeit ist der Geschwindigkeitskurve einer turbulenten Bewegung ähnlich.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

TEHNOLOGIA COMPUȘILOR MACROMOLECULARI

544

SUSPENSIONSAGENTEN FÜR DIE PERLPOLYMERISATION

OZIAS SOLOMON und EUGEN NUȚESCU

1. Suspensionspolymerisation des Vinylchlorids

Die gegenwärtige Arbeit hat als Zweck ein Vergleich der Tätigkeit einiger Suspensionsagenten, die in der Perlpolymerisation der Vinylmonomeren Verwendug finden. Die Versuche wurden mit den üblichen Suspensionsagenten, wie: Gelatine, Polyvinylalkohol, sowie mit einigen bis jetzt weniger üblichen, wie zum Beispiel die Mischpolymeren Styrol-Maleinsäureanhydrid und Vinylazetat-Maleinsäureanhydrid durchgefürt.

Der erste Teil der Versuche, deren Ergebnisse wir veröffentlichen, wurden mit Vinylchlorid durchgefürt. Die spätere Veröffentlichung der Ergebnisse, die bei der Polymerisation mit Styrol, Vinylazetat, Methylmethacrilat, usw. erhalten wurden, folgt.

1. Angaben über die Suspensionpolymerisation.

Die Suspensionspolymerisation ist eine der Formen der Polymerisation im heterogenen Medium. Sie wird dadurch charakterisiert, dass der Monomer in einem unlösbarem Mittel gewöhnlich Wasser durch Schütteln zerstreut wird. Das unlösbare Medium enthält einen kleinen Prozentsatz einer Substantz, die geeignet ist, die Vereinigung der Partikeln und die Bildung von Konglomeraten zu verhidern. Diese Substanz wird Suspensionsagent genannt. Der verwendete Veranlasser der Polymerisation ist im Monomer löslich.

a) *Die Bildung der Polymerpartikeln. Die Wirkung der Suspensionsagenten*

Wie vorhin gesagt, wird der Monomer durch mechanisches Schütteln in Wasser zerstreut. Es bilden sich kugelformige Teilchen des Monomers, in denen die Polymerisation beginnt. Sobald in jedem Teilchen die Mischung Polymer-Monomer 30—70% Polymer enthält, werden die Kugeln klebrig, vereinigen sich unter sich und bilden Konglomerate. Sobald man zu einer Konversion von 70—80% gelangt, werden die Perlen genug hart und kleben nicht mehr aneinander. Der kritische Punkt der Perlpolymerisation ist der Übergang von der 30%-igen zur 80%-igen Konversion. Um diesen Punkt in guten Bedingungen zu überschreiten, ist es nötig. Suspensionsagenten zu benützen. Sie schützen die Partikeln vor Zusammenballungen.

Als Suspensionsagenten verwendet man zwei Arten von Stoffen:

1. Sehr feine Pulver einiger anorganischen Verbindungen wie: Talk. $BaSO_4$, $MgCO_3$, Al_2O_3.

2. In Wasser lösliche makromolekulare Verbindungen wie: Polyvinylalkohol, die Mischpolymere Styrol-Maleinsäureanhydrid, Vinylazetat-Maleinsäureanhydrid; Gelatine; Stärkemehl; Methylzellulose; Dextrin, Keratin [3] Natriumpolymethacrilat, Natriumalginat, Tylose.

Die Wirkung beider Arten Stoffe ist ähnlich. TROMMSDORF [1] zeigt die Wirkunksart der Agenten aus der ersten Gruppe, wie folgt; wenn man

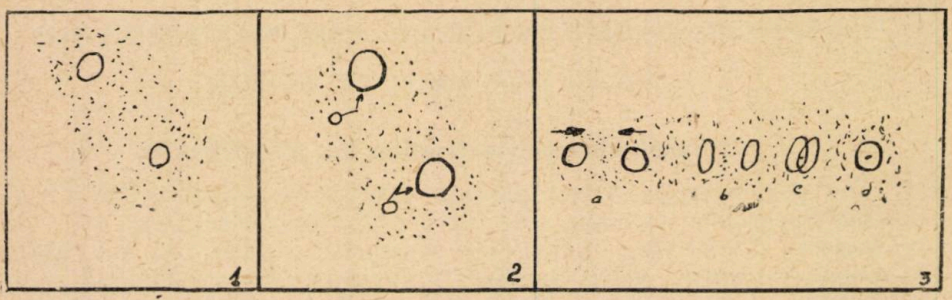


Fig. 1, 2, 3. Die Wirkung der anorganischen Pulver als Suspensionsagenten:

einen farbigen Monomer in einer Suspension von Magnesiumkarbonat zersteut, bemerkt man, dass die grösseren Teile, z. B. mit einem 05 mm Durchmesser, einander nahekommen, jedoch sich nicht vereinigen, da sie von den Karbonatteilchen davor gehinder werden (Fig. 1).

Die kleineren Tropfen, z. B. mit einem 0,05 mm Durchmesser, schlüpfen zwischen den Pulverteilchen durch und vereinigen sich unternander oder mit anderen grösseren Teilchen (Fig. 2).

Das vom Suspensionsagent gebildete Netz ist um so feiner (die erzeugten Perlen um so kleiner), je feiner der anorganische Stoff verpulvert wird.

Wenn die Oberflächenspannung der beiden Phasen klein ist, streben die Monomerteilchen eine platte Form zu erlangen, und, die Pulvertropfen in den neu geformten Tropfen einschliessend, können sie sich so untereinander vereinigen (Fig. 3).

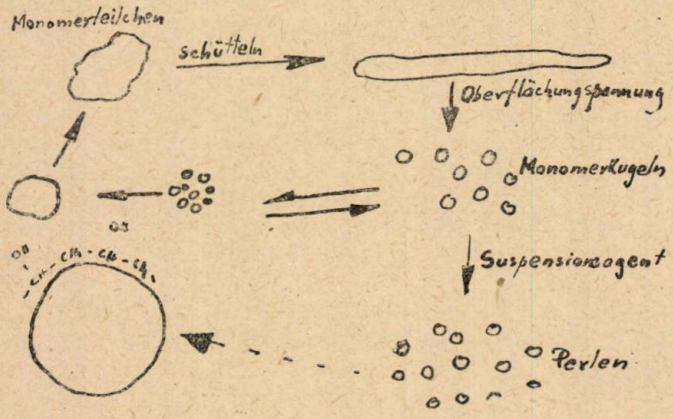


Fig. 4. Die Wirkung des Polyvinylalkohols als Suspensionsagent.

Die in Wasser aufgelösten makromolekularen Stoffe haben einen ähnlichen Zweck. Sie vergrössern die Viskosität des Reaktionsmediums, und verhidern dadurch die Bewegung und Vereinigung der Partikeln. Diese Stoffe umgeben die Teilchen des Monomers mit einer Schutzhülle.

Um die makromolekularen Stoffe als Suspensionsagenten zu verwenden, müssen sie folgenden Bedingungen nachkommen:

— Sie dürfen die Oberflächenspannung zwischen den beiden Phasen nicht verringern.

— Sie müssen im Monomer vollkommen unlöslich sein.

Eine Vergrösserung der Konzentration des Suspensionsagenten, also auch der Viskosität des Reaktionsmediums, bringt eine Verringerung der Perlendimensionen mit sich. Die Wirkungsart der Suspensionsagenten ist in der Figur 4 schematisch dargestellt.

b) *Hypothesen, den Mechanismus und die Reaktionskinetik betreffend.*

Eine ganze Reihe von Daten versuchen die Feststellung, dass der Mechanismus der Suspensionspolymerisation dem Mechanismus der Blockpolymerisation identisch sei, zu bekräftigen [2—6]. Diese Daten sind folgende:

— Beide Polymerisationsmethoden gebrauchen im Monomer lösliche Veranlasser.

— Indem man die Kinetik der Blockpolymerisation bei dem Vinylmonomer studierte [7—8], machte man die Feststellung, dass die Polymerisatiosgeschwindigkeit mit der Wurzel der Veranlasserkonzentration proportionell ist. Die gleiche Proportionalität bemerkt man auch bei der Suspensionspolymerisation [7—8].

— Die Werte der Aktivierungsenergie der beiden Reaktionen sind im allgemeinen miteinander vergleichbar.

Diesen Tatsachen zum Trotz, ist, nach einigen Versuchsfeststellungen, die Identität der beiden Prozesse (Block und Suspension) nicht perfekt.

So beobachtete man, dass die Perlpolymerisation auch bei Gebrauch der in Wasser löslichen Veranlasser stattfindet, wenngleich mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit. Ebenso ist die Reaktion der Suspensionspolymerisation von einigen in Wasser löslichen Aktivatoren stark beeinflusst [9—10].

c) *Die die Eigenschaften des Polymers beeinflussenden Faktoren.*

Eine Reihe Eigenschaften der durch Suspensionspolymersation erzeugten Stoffe sind von den Reaktionsbedingungen abhängig. Wenn man die verschiedenen von den Reaktionsbedingungen abhängigen Polymereigenschaften kennt, kan man eine Anzahl verschiedenartige Polymeren erzeugen.

Die von den Reaktionsbedingungen beeinflussbaren Eigenschaften sind:

— Das Molekulargewicht,

— Die thermische Festigkeit,

— Die Perlendimensionen,

— Der Konversionsgrad.

Die Bedingungen, die diese Eigenschaften beeinflussen sind:
— Temperatur,
— Art und Konzentration des Veranlassers,
— Art und Konzentration des Suspensionsagenten,
— Art des Monomers,
— Das Phasenverhältnis (Wasser: Monomer),
— Das Schütteln,
— Die Reaktionsdauer.

Die Art in der die Arbeitsbedingungen die Eigenschaften der Polymerisation beeinflussen, wurde in einer ganzen Anzahl von veröffentlichen Versuchen hervorgehoben. Ebenso geben einige Patente in dieser Beziehung Aufklärungen. Ein Teil dieser Daten wurde in den von uns angestellten Versuchen erwiesen.

Die Variation des Molekulargewichts.

Nach Bankhoff [4] ist das Molekulargewicht nicht von der Veranlasserkonzentration abhängig (unter 3—4% Veranlasserkonz.). Sie ist von der Art und Konzentration des Suspensionsagenten, sowie vom Konversionsgrad nicht abhängig. Bankhoff ist fernerhin der Meinung, dass die Polymerisationstemperatur das Molekulargewicht stark beeinflusst. Bei einem Wechsel von 10°C bei der Polymerisation des Vinylchlorids findet ein Wechsel von 10—20 000 im Molekulargewicht statt.

Die thermische Festigkeit.

Die thermische Festigkeit der durch Perlpolymerisation erzeugten Polymeren ist von folgenden Faktoren abhängig:

1. Die Temperatur. Bei niederen Temperaturen (40—50°C) werden Polymeren mit einer guten thermischen Festigkeit erzeugt.
2. Die Art und Konzentration des Veranlassers. Die grössten Festigkeiten erlangt man bei kleinen Konzentrationen der Verlanlasser. Der geeignete Veranlasser ist diesem Falle das Lauroilperoxyd.
3. Die Konzentration des Suspensionsagenten. Der Einfluss des Suspensionsagenten ist indirekt. Bei grösseren Konzentrationen erfolgt eine feinere Zerstreuung des Monomers im Wasser. Die Wärmeübertragung findet besser statt, und die thermische Festigkeit des so erzeugten Polymeren ist grösser.
4. Das Schütteln. Das Schütteln hat eine dem Suspensionsagenten ähnliche Wirkung.

Die Variation der Partikeldimensionen.

Die Partikeldimensionen sind von folgenden Faktoren abhängig:

1. Die Art und Konzentration des Suspensionsagenten. Bei grosser Konzentrationen werden kleine Partikeln erlangt.
2. Das Phasenverhältnis. Je grösser das Phasenverhältnis (Wasser: Monomer), um so kleiner sind die Perlendimensionen. Dieses Verhältnis kann mit der Bedingung verringert werden, dass man wirksamere Suspensionsagenten gebraucht.
3. Das Schütteln. Je kräftiger das Schütteln, um so kleiner sind die Perlen.

Die Variation des Konversionsgrads.

Bei einer konstanten Polymerisationsdauer wächst der Konversionsgrad mit der Temperatur und der Veranlasserkonzentration.

Die in den Figuren 5 und 6 angegebenen Diagrammen verbildlichen die Abhängigkeit des Konversionsgrades von der Veranlasserkonzentration (bei Gebrauch von Lauroilperoxyd in der von Vinylchlorid Perlpolymerisation) und der Reaktionsdauer.

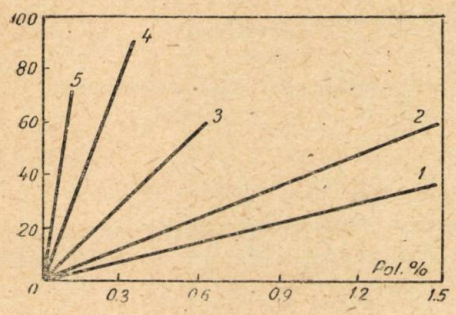


Fig. 5.

	1	2	3	4	5
Temp. °C	50	50	60	50	60
Zeit-St.	5	5	3	14,8	8,7

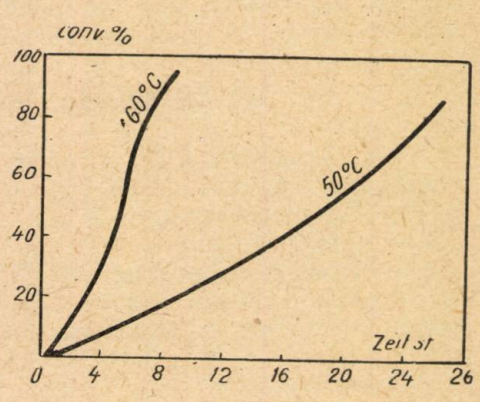


Fig. 6. Veranlasser: Lauroilperoxid 0,15%
Polyvinylalkohol 0,23%

Hervorzuheben ist die Tatsache, dass das in Fig. 6 angegebene Diagramm den Konversionsdiagrammen bei der Blockpolymerisation sehr ähnlich ist.

2. Die Ergebnisse der experimentellen Versuche

a) *Die Feststellung der Vergleichungsmethoden von verschiedenen Wirkungsgraden der Suspensionsagenten*

Wie vorher gezeigt wurde, hat die Art und Konzentration des Suspensionsagenten einen direkten Einfluss auf die Perlendimensionen. Um jetzt den Wirkungsgrad der verschiedenen Agenten vergleichen zu können, wähler wir als Grundlage des Vergleiches, die Variation der Perlendimensionen, abhängig von der Art und Konzentration der Suspensionsagenten.

In der Hypothese zweier in identischen Reaktionsbedingungen ausgeführten Polymerisationen gebraucht man zwei verschiedene Suspensionsagenten. Die Agenten werden in gleichen Konzentration (in Vergleich zur wässerigen Phase) angewendet.

Der wirksamere Suspensionsagent ist der, der eine feinere Suspension ergibt. In den vorgenommenen Versuchen gebrauchten wir zum Vergleich der Dimensionen verschiedenen Suspensionen, erhalten in verschiedenen Arbeitsbedingungen, granulometrische Diagramme. Diese zeigen die Verteilung der Suspensionsdimensionen und die vorherschende Dimension in einer gegebenen Suspension. Die granulometrischen Kurven ermöglichten es, die verschiedenen Suspensionsagenten zu vergleichen.

Die relative Aktivität eines Agenten im Vergleich zu einem anderen, kann auch errechnet werden. Diese Methode wird in folgenden Bedingungen angewendet:

1. Man vergleicht zwei Versuche, die Partikeln ähnlicher Dimensionen ergeben haben.
2. Man nimmt an, dass die beiden Polymerisationen, deren Ergebnisse vergleichen wurden, in fast identischen Bedingungen durchgeführt wurden. Verschieden sind nur die Art und Konzentration des Suspensionsagenten, sowie der Schüttlungsgrad.

b) Die Ausrüstung und die Arbeitsmethode.

Die Versuche wurden in einer Stahlautoklave (aus säurefestem V_2A Stahl) mit folgenden Merkmalen ausgeführt:

— Fassungsvermögen 5 L,
— Ankerrührwerk
— Drehgeschwindigkeit des Rührmekes 100 D/Min.
— Das Erhitzen wird mittels einem Wasserbad und einem elektrischen Widerstand durchgeführt. Die Temperaturkontrolle ist automatisch.

Arbeitsmethode.

Man bereitet zuerst die wässerige Phase vor, einen Suspensionsagenten und einen Buffer (Na_2HPO_4) in destilliertem Wasser lösend. (Der Buffer wird bei den Polymerisationen gebraucht, die mit dem Mischpolymer Vinylazetat — Maleinsäureanhydrid gemacht werden, weil sie Lösungen mit einem geringen pH-Wert (3—4) ergeben.) Die wässerige Phase wird in die Autoklave eingeführt und das nötige Benzoilperoxyd hinzugefügt. Man dichtet die Autoklave ab und rührt 10—15 Minuten, um die wässerige Phase homogen zu machen. Man kühlt dann die Autoklave mit Wasser.

In einer Bombe mit einem Inhalt von 2,5 l (druckwiderstandsfähig) führt man das zur Polymerisation benötigte Vinylchlorid ein, der Anweisung nach.

Wenn man dann die Autoklave mit der stark im Wasserbade erhitzten Bombe in Verbindgung bringt, dringt das Vinylchlorid in die Autoklave ein. Man erwärmt die Autoklave bis zur nötigen Temperatur. Man hält diese Temperatur bis der Druck sich zu verringern beginnt, was darauf hinweist, dass die ganze Menge Monomer reagiert hat.

Die erhaltene Suspension wird dann gewaschen und bei 70—80°C getrocknet.

c) Ergebnisse.

Im Rahmen der vorgenommenen Versuche nahmen wir uns vor, qualitative Daten festzustellen, die sich auf folgendes beziehen:

— die Wirksamkeit der Gelatine, des Polyvinylalkohols und des Mischpolymers AVAM*), als Suspensionsagenten;

*) Dieser Mischpolymer wurde von Ing. Assist. E. Danciu und Ing. I. Ciută in unseren Laboratorien erzeugt. Wir danken ihnen auf diesem Wege. Die Erzeugungsart der Suspensionsagenten wird späterhin von den obengenannten Ingenieuren veröffentlicht

— Die Möglichkeit, das Phasenverhältnis (Wasser : Monomer) zu verringern, im Falle man mit Mischpolymeren arbeitet. Die Literatur ergibt ein minimales Phasenverhältnis von 2 : 1.

Bei den Versuchen wechselten wir :

— die Art des Suspensionsagenten

— die Konzentration des Suspensionsagenten

— das Phasenverhältnis.

Die befolgten Anweisungen und ein Teil der Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt :

Tabelle 1

		S 1	S 2	S 3	S 4	S 5
Monomer	Gr.	680	650	670	600	780
Wasser	Gr.	1300	1350	1300	780	1006
Suspensionsagent . .	Gr.	19	4,75	9,8	6	7,5
Natur des Suspensionsagents	—	Gelatine	AVAM	AVAM	AVAM	Polyvinylalkohol
Suspensionsagent . .	%	2,8	0,7	1,4	1,4	1,4
Veranlasser	%	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
Na_2HPO_4	Gr.	—	13	13	10	—
Phasenverhältnis . . .	—	1.9	1,9	1,9	1,3	1,3
Temperatur	°C	50	50	50	50	50
Druck	kg/cm²	7	7	7	7	7
Konversionsgrad . . .	%	80,4	60	75	65	85
Reaktionszeit	St.	32	19	30	20	25
Asche	%	1,2	1,17	0,92	1,2	1,1
Thermische Festigkeit .	Min.	40	20	20	65	50

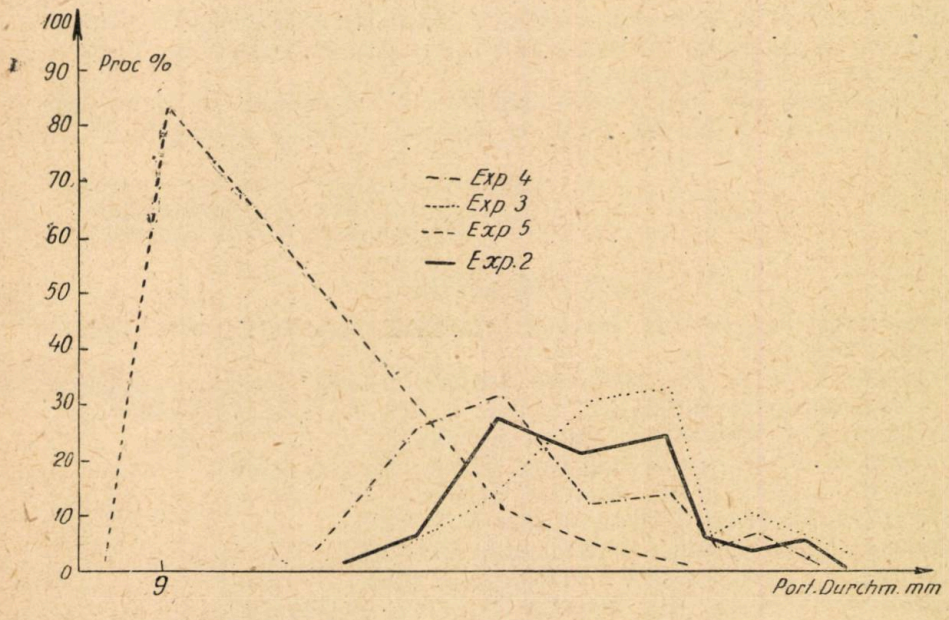


Fig. 7. Die granulometrischen Kurven die bei den Suspensionen S_2, S_3, S_4, S_5 erhalten werden.

Das Diagramm in der Fig. 7 stellt die granulometrischen Kurven dar, die bei den Suspensionen S2, S3, S4, S5 erhalten werden (s. Tab. 1).

Beim Vergleich der Kurven S4 und S5 geht hervor, dass der Polyvinylalkohol veniger wirksam als der Mischpolymer AVAM ist. Diese Tatsache wurde auch auf Grund einer mathematischen Berechnung bestätigt.

Gelatine ist viel weniger aktiv. Trotzdem wir einen doppelten Prozentsatz gegenüber dem höchsten Prozentsatz des APV und AVAM benützten, ist die erhaltene Suspension aus Partikeln von 1,5 mm und Konglomeraten von 2—4 mm Durchmesser, zusammengefügt.

Dieselben Versuche zeigten, dass man im Falle des Mischpolymers AVAM, unter vorteilhaften Bedingungen auch dann arbeiten kann, wenn das Phasenverhältnis 1 : 3 beträgt.

SCHLUSSFOLGERUNGEN

Den ausgeführten Versuchen kann man folgendes entnehmen :

1. Der Mischpolymer AVAM mit 43% Maleinsäureanhydrid kann erfolgreich als Suspensionsagent in dem Polymerisationsprozess des Vinylchlorids benützt werden.

2. Im Vergleich zu den anderen häufig gebrauchten Agenten (Gelatine und Polyvinylalkohol), gab der Mischpolymer folgende Ergebnisse :

— Gegenüber Gelatine ist der Michpolymer viel wirksamer. Um ähnliche Ergebnisse mit beiden Agenten zu erzielen, ist eine 5—7 mal grössere Gelatinemenge nötig. Die mit Gelatine erzeugten Polymeren haben eine gelbliche Färbung ;

— Im Vergleich zum APV ist die Wirksamkeit des Mischpolymers 1,5—1,8 mal grösser.

3. Mit dem Mischpolymer AVAM, in ziemlich schwachen Rührbedingungen, ist es gelungen Polymerisation bei einem Verhältnis Wasser-Monomer von 1,3 durchzuführen.

4. Die Farbe der mit AVAM erhaltenen Polymeren ist weiss, im Gegensatz zu der gelblichen Färbung der mit Gelatine erzeugten Polymeren.

Laboratorium für Chemie und Technologie der makromolekularen Verbindungen
Polytechnisches Institut Bukarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Trommsdorf E.* — Uber Perlpolymerisation. Makromol. Chem. 13, 76, 89, 1954.
2. *Korschak V. V.* — Die Methoden der organischen Chemie der makromolekularen Verbindungen. Vol. 1, s. 419, A. N.SSSR, 1953,
3. *Berlin A. A.* u. Mit. Measn. Prom. 6, 1956.
4. *Bankoff S. G., R. Norris,* Ind. Eng. Chem., 45, 270, 1953.
5. *Mark H.*, u. Mit., J. Pol. Sci., 1.127, 1946.
6. *Bowey R.*, Emulsion Polymerisation N-Y. 1955.
7. *Danusso F.*, La Chemica e l'Industria, Dez. 1955.
8. *Danusso F.*, La Chemica e l'Industria, 3, 1955.
9. *Razuvaiev G. A.*, u. Mit., Uspehii Himii, 21, 4, 379, 1952.
10. *Berlin A. A.* u. Mit., Pat. SSSR, 79807, 1948.
11. *Berlin A. A.* u. Mit., Him. Prom., 8, 449, 1957.

СУСПЕНЗИОНЫЕ АГЕНТЫ ДЛЯ БИСЕРНОЙ ПОЛИМЕРИЗАЦИЙ

(Краткое содержание)

Данная работа имеет цель сопоставить активность некоторых суспенсионых агентов которых употрлебляется в бисерной полимеризаций виниловых мономеров.

Первая паств который захватываяет полимеризация хлористого винила, опубликуется в етот работе.

SUSPENSION AGENTS FOR SUSPENSION POLYMERISATION

(Summary)

The scope of the present article is to compare the activity of various suspension agents employed in the suspension polymerisation of vinylic monomers. The first part of our work has been effected with vinyl chloride.

AGENTS DE SUSPENSION POUR LA POLYMERISATION EN PERLES

(Résumé)

L'article contient une étude comparative sur l'activité de quelques agents de suspension qu'on utilise dans la polymerisation en perles des monomères vinyliques.

La première partie de ce travail, dont les dates nous presentons ici a ete efectuée avec le chlorure de vinyle.

SUSPENSIONAGENTEN FUR DIE PERLENPOLYMERISATION

(Zusammenfassung)

Die gegenwartige Arbeit hat als Zweck ein Vergleich der Tätigkeit einiger Suspensionsagenten, die in der Perlpolymerisation der Vinylmonomeren Verwendung finden.

Der erste Teil der Versuche deren Ergebnisse wir veröffentlichen, wurden mit Vinylchlorid durchgeführt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

CHIMIE ANALITICĂ

544.192

UNE NOUVELLE METHODE SENSIBLE POUR DECELER LE NICKEL *)

par VIRGIL ARMEANU, DIMITRIE CAMBOLI, CORNELIA IANCU

La méthode que nous avons élaborée pour déceler le nickel est analogue à celle utilisée pour le cuivre (1) et pour le cobalt (2). Les ions Ni^{2+} donnent avec la β — furoïne-oxime un précipité beige.

La sensibilité de la réaction est déterminée par l'ordre dans lequel sont ajoutés les réactifs, comme on peut le constater sur le tableau ci-joint.

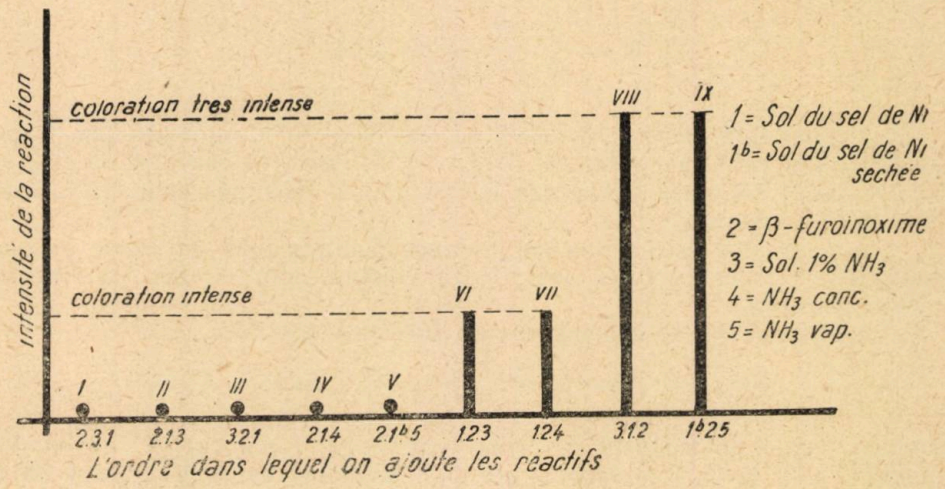


Fig. 1.

Pour le nickel, de même que pour le cuivre et pour le cobalt, on constate que la réaction est la plus sensible, lorsqu'on l'exécute sur du papier-filtre, de la manière suivante :

On met sur le papier une goutte de la solution dans laquelle on recherche les ions Ni^{2+}, on fait sécher au-dessus d'une flamme, on ajoute une goutte de β — furoïne-oxime (solution alcoolique 1 %) ensuite on expose à l'ammoniaque gazeux, au-dessus d'un flacon contenant une solution concentrée de hydroxide d'ammonium ($d \approx 0{,}9$). Une tache beige apparaît.

*) Communication presentée à la III-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Politechnique de Bucarest (le 27—28 juin 1957).

On constate la même sensibilité pour la réaction effectuée comme suit :

Sur du papier-filtre on met une goutte d'une solution de hydroxyde d'ammonium 1%, puis une goutte de la solution contenant les ions Ni^{2+}, finalement on ajoute une goutte de réactif.

LA DETERMINATION DE LA LIMITE DE LA SENSIBILITÉ

On a effectué la réaction dans les conditions mentionnées ci-dessus en première alternative. La pipette avec laquelle on a mesuré la solution de nickel, contenant 1 mg. nickel par millilitre, a donné 61 gouttes sur 1 ml. ; donc, une goutte contient 16 γ Ni.

Après chaque preuve au résultat positif (répétée 20—30 fois), on a dilué la solution et on a essayé la réaction, en la répétant toujours 20—30 fois. Ainsi, on a atteint la limite de perception de la réaction, quand la goutte contient 0,32 γ Ni, c'est-à-dire pour une dilution 1 : 50 de la solution initiale.

La limite de perception étant donc $P = 0{,}32\ \gamma$ Ni et le volume d'une goutte $V = 0{,}016$ ml., la limite de dilution D est :

$$D = \frac{P}{V\ \text{ml} \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-5}.$$

La sensibilité des autres réactifs pour l'ion Ni^{2+}, indiqués par Nieuwenburg (3) est de l'ordre de $10^{-5} - 10^{-6}$; donc, la réaction de la β — furoïne-oxime est aussi bonne que les meilleures réactions pour Ni^{2+}, connues à ce moment.

On a effectué la réaction en présence d'autres ions du même groupe analytique ou des groupes analytiques voisins, pour étudier les interférences possibles.

La réaction ne se produit pas en présence des ions

$$Al^{3+},\ Cr^{3+},\ Sn^{2+},\ Sn^{4+},\ Sb^{3+},\ Sb^{5+},\ AsO_3^{3-},\ AsO_4^{3-}$$

lorsque ceux-ci se trouvent en proportion de 10 : 1 par rapport au Ni (en poids) ; pour le Bi^{3+} le rapport est plus favorable de 30 Bi pour 1 Ni et le mercure Hg^{2+} empêche la réaction seulement lorsqu'il se trouve dans une proportion de 250 Hg pour 1 Ni.

Avec les ions Mn^{++} le réactif donne, en opérant dans les mêmes conditions que pour le nickel, une tache brune ; avec les ions Cd^{2+} et Zn^{2+} — une tache jaune et en présence des ions Fe^{3+} apparaît une coloration rouge intense, utilisée pour identifier cet ion, dans une méthode, également publiée dans cette revue [4].

Nous étudions des méthodes quantitatives pour le cobalt et pour le nickel, basées sur la réaction de la β — furoïne-oxime ; on étudie aussi les réactions pour le manganèse, le zinc et le cadmium.

Le Laboratoire de Chimie Générale
L'Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *V. Armeanu* și *C. Iancu* — O nouă metodă foarte sensibilă pentru decelarea cuprului. Studii și cercetări de chimie, Acad. RPR, No. 3, An. V (1957), pag. 423—430 și 431—435.
2. *V. Armeanu, D. Camboli* și *C. Iancu* — O nouă metodă sensibilă pentru decelarea cobaltului. Revista de Chimie ASIT — Nr. 4, 1958, pag. 218—219.
3. *Nieuwenburg, Gillis* — Qualitative Inorganic Analysis.
4. *V. Armeanu, D. Camboli, C. Iancu* — une nouvelle méthode sensible pour déceler le fer trivalent, Bul. Inst. Polit. Buc, Tomul XX, 1958, Fascicola 2, pag. 85—87.

НОВЫЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ОТКРЫТИЯ НИКЕЛЯ

(Краткое содержание)

Ионы никеля дают с β — фуроин-оксимом светло коричневый осадок. Была изучена реакция и найден предел определения, равный 0,32 γ Ni Чувствительность реакции 2.10^{-5}.

Была изучена реакция в присутствии посторонних ионов.

A NEW SENSIBLE METHOD FOR DISCOVERING THE NICKEL

(Summary)

The ions of nickel give with β — furoyne-oxime a light brown precipitation.

The reaction was studied and there was found the limit of determination equal to 0,32 γ Ni. The sensibility of the reaction is 2.10^{-5}.

The reaction was studied in presence of other ions.

UNE NOUVELLE MÉTHODE SENSIBLE POUR DÉCELER LE NICKEL

(Résumé)

Les ions de nickel donnent avec la β — furoïne-oxime un précipité beige.

On a étudié la réaction et on a trouvé la limite de perception de 0,32 γ Ni. La sensibilité de la réaction est de 2.10^{-5}. On a étudié la réaction en présence d'autres ions.

EINE NEUE EMPFINDLICHE QUALITATIVE BESTIMMUNGSMETHODE FÜR NICKEL

(Zusammennfassung)

Die Nickel-Ionen gaben mit β — Furoinoxim einen hellbraunen Niederschlag.

Es wurde die Reaktion studiert und man hat die Grenze der Wahrnehmung gleich 0,32 γ Ni gefunden. Die Empfindlickeit der Reaktion ist 2.10^{-5}.

Die Reaktion wurde auch in Gegenwart anderer Ionen verfolgt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 2

544.192

UNE NOUVELLE METHODE SENSIBLE POUR DECELER LE FER TRIVALENT *)

par VIRGIL ARMEANU, DIMITRIE CAMBOLI, CORNELIA IANCU

On a constaté que la β — furoïne-oxime donne également une réaction avec les ions Fe^{+++}; toutefois dans ce cas on n'obtient pas un précipité comme avec les ions Cu^{2+} (1), Co^{2+} (2), Ni^{2+} (3), mais une coloration rouge intense.

Nous avons utilisé cette réaction pour élaborer une nouvelle méthode pour déceler les ions Fe^{+++}. On a effectué les expériences en microéprouvette, sur une plaque de porcelaine à soucoupes, sur une lamelle de microscopie et sur du papier-filtre, par analogie avec nos méthodes indiquées plus haut (1), (2), (3).

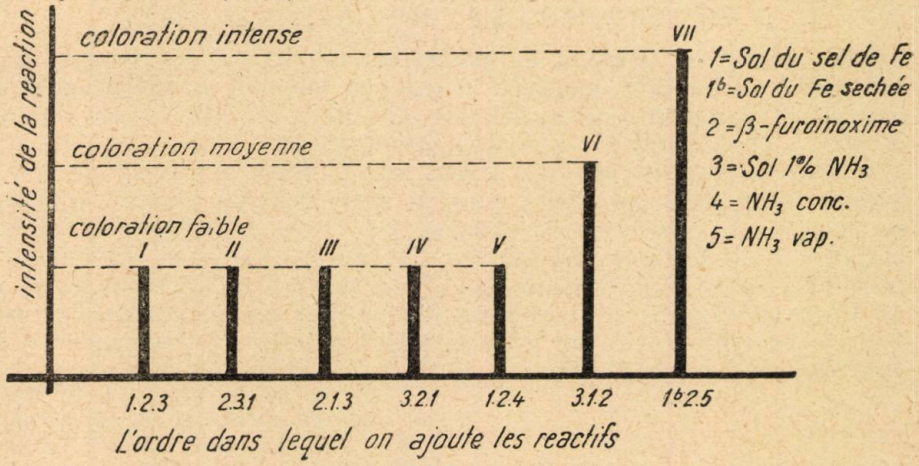


Fig. 1.

De même qu'on a constaté pour le cuivre, le cobalt et le nickel, l'ordre dans lequel on ajoute les réactifs est déterminant pour la sensibilité de la réaction, (voir le tableau). La plus sensible est la réaction sur du papier-filtre.

Les meilleures conditions pour effectuer la réaction sont :

Sur du papier-filtre (bande bleue) on met une goutte de la solution dans laquelle on recherche les ions Fe^{+++}, on la fait sécher au-dessus

*) Communication presentée à la III-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Politechnique de Bucarest (le 27—28 juin 1957).

d'une flamme, on ajoute une goutte de β furoïne-oxime (solution alcoolique 1%), ensuite on expose à l'ammoniaque gazeux, au-dessus d'un flacon contenant une solution concentrée de hydroxyde d'ammonium ($d \approx 0{,}9$). Une tache rouge apparaît.

DÉTERMINATION DE LA LIMITE DE LA SENSIBILITE

En diluant successivement la solution des ions Fe^{+++}, on a atteint la limite de perception de la réaction, qui correspond à 0,32 γ Fe. On a répété la réaction jusqu'à 40 fois pour éviter le domaine des réactions incertaines.

La limite de dilution D est calculée comme d'habitude:

$$D = \frac{P}{V \text{ ml} \cdot 10^6} = 2.10^{-5}.$$

Pour le ion Fe^{+++}, la sensibilité des réactions indiquées par Nieuwenburg (4) est de l'ordre 10^{-4}—10^{-6}; donc la réaction proposée se range parmi les réactions sensibles.

Nous étudions, basés sur cette réaction, une méthode quantitative pour déterminer colorimétriquement les ions Fe^{+++}.

On a effectué la réaction en présence d'autres ions du même groupe analytique ou des groupes voisins, pour étudier les interférences possibles.

La réaction ne se produit pas en présence des ions

$$Bi^{3+},\ Sn^{2+},\ Sn^{4+},\ Sb^{3+},\ Sb^{5+},\ AsO_3^{3-} \text{ et } AsO_4^{3-}$$

lorsque ceux-ci se trouvent en proportion de 20 : 1 par rapport au Fe (en poids) ; l'ion Cr^{3+} empêche la réaction lorsqu'il se trouve en proportion de 50 : 1 par rapport au Fe, les ions Al^{3+} et Pb^{2+} — en proportion de 100 : 1 et l'ion Hg^{2+} — en proportion de 400 : 1.

Nous avons entrepris des études sur l'influence exercée par les différents substituents introduits dans le molécules des réactifs organiques, en ce qui concerne leurs principales propriétés analytiques et la détermination des constantes respectives. Ces études que nous continuons, ont pour but, après avoir effectué un grand nombre de déterminations avec de différents réactifs, de nous permettre de tirer des conclusions générales, afin de pouvoir prévoir les plus sensibles et les plus spécifiques réactifs pour chaque cas particulier.

Le Laboratoire de Chimie Générale
L'Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *V. Armeanu* și *C. Iancu* — O nouă metodă foarte sensibilă pentru decelarea cuprului. Studii și cercetări de Chimie, Acad. RPR, No. 3, An. V (1957), 423—430 și 431—435.
2. *V. Armeanu, D. Camboli și C. Iancu* — O nouă metodă sensibilă pentru decelarea cobaltului. Revista de Chimie ASIT — Nr. 4, 1958, pag. 218—219.
3. *V. Armeanu, D. Camboli* și *C. Iancu* — Une nouvelle méthode sensible pour déceler le nickel, Bul. Inst. Polit. Buc., Tomul XX, Fasc. 2, pag. 81—83.
4. *Nienwenburg. Gillis* — Qualitative Inorganic Analysis.

НОВЫЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ОТКРЫТИЯ ЖЕЛЕЗА

(Краткое содержание)

β фуроин — оксим дает также с ионами трехвалентного железа ярко-красную окраску.

Чувствительность реакции 2.10^{-5}, предел определения равен 0,32 γ Fe. Была изучена реакция в присутствии посторонних ионов.

A NEW SENSIBLE METHOD FOR DISCOVERING THE IRON

(Summary)

The β — furoïne-oxime gives also with the trivalent ions of iron a vivid red coloration.

The sensibility of the reaction was found to be 2.10^{-5}, the limit of determination is 0,32 γ Fe.

The reaction was studied in presence of other ions.

UNE NOUVELLE METHODE SENSIBLE POUR DECELER LE FER TRIVALENT

(Résumé)

La β — furoïne-oxime donne aussi avec les ions de fer trivalent une coloration rouge intense.

La sensibilité de la réaction est de 2.10^{-5}, la limite de perception 0,32 γ Fe.

On a étudié la réaction en présence d'autres ions.

EINE NEUE EMPFINDLICHE QUALITATIVE BESTIMMUNGSMETHODE FÜR EISEN

(Zusammenfassung)

Das β — Furoinoxim gibt auch mit den dreiwertigen Eisen-Ionen eine intensive rote Färbung.

Es wurde die Reaktion studiert und man hat die Grenze der Wahrnehmung gleich 0,32 γ Fe gefunden.

Die Empfindlichkeit der Reaktion ist 2.10^{-5}.

Die Reaktion wurde auch in Gegenwart anderer Ionen verfolgt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 2

544.192

I. UNE NOUVELLE MÉTHODE SEMI-MICRO-ANALYTIQUE POUR LE DOSAGE GRAVIMÉTRIQUE DE CUIVRE EN PRÉSENCE DE MERCURE *)

par VIRGIL ARMEANU, NICULAE CĂPLESCU et GEORGETA MIHAIL

Les phénilènediamines ont été utilisées pour déceler et pour le dosage d'un petit nombre d'éléments, sous forme des combinaisons complexes.

F. Feigl et ses collaborateurs [1] ont obtenu quelques combinaisons de l'o-phénilènediamine, W. Hieber et ses collaborateurs [2] ont préparé et étudié les proprietés des combinaison complexes du cobalt, du nickel, du zinc et du cadmium avec l'o-phénilènediamine, en comparaison avec les combinaison de ces métaux avec l'éthylènediamine, lepirocatechine et le glycol, arrivant à la conclusion que les diamines aromatiques forment des complexes plus stables que les diamines aliphatiques.

G. Spacu et ses colaborateurs [3] en 1929 ont precipité à l'aide de l'anion complexe tétraiodomercurique les cations complexes du cuivre avec l'éthylènediamine et le propilènediamine, en observant qu'ils forment des combinaison d'une grande stabilité et si peu solubles qu'ils ont pu établir des méthodes analytiques pour le dosage du cuivre et du mercure.

En 1948 Tarasievici [4] obtient une ammine soluble de l'o-phénilènediamine (o-phen) avec le sulfate de cuivre, de composition correspondant à la formule $CuSO_4$ 2-o-phen H_2O.

Une année plus tard le même auteur précipite le cation complexe de cette combinaison avec l'ion tétraiodomercurique, en obtenant la combinaison insoluble de constitution (Cu o-phen$_2$) (HgJ_4). Il l'utilise pour établir deux méthode macro et microgravimétriques pour le dosage du cuivre oû du mercure, quand un de ces éléments se trouve en solution sous forme d'ions.

Depuis plusieurs années nous étudions l'action des substituant dans les réactifs organiques sur les propriétés analytiques des combinaisons complexes qui resultent avec différents ions métalliques. C'est ainsi nous avons obtenu la même combinaison, que Tarasievici, sans avoir connaissance des ses travaux mentionnées plus haut.

Nous désirons connaître la variation des propriétés physiques et chimiques des combinaisons complexes obtenues avec les métaux par les trois phénilènediamines (orto, meta, para), en comparaison avec les propriétés des combinaison analoques de l'étilènediamine et de la propilènediamine. Nous étudions l'influence du noyau aromatique et de la posi-

*) Communication presentée à la III-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Politechnique de Bucarest (le 27—28 juin 1957).

tion des groupes amino dans ce noyau, en comparaison avec les propriétés des combinaisons analogues avec les diamines aliphatiques.

Dans la note présente nous établissons une méthode semi-micro-gravimétrique pour le dosage du cuivre en présence de mercure, méthode basée sur la formation de la combinaison complexe insoluble (Cu o-phen$_2$) (HgJ_4).

Le principe de cette méthode est le suivant: on ajoute à la solution neutre qui contient les ions de cuivre et de mercure, une solution alcoolique d'o-phénilènediamine, jusq'à la complète formation de l'ammine complexe, puis on précipite avec le tétraiodo-mercuriate de potasium:

(1) $$CuSO_4 + 2\ \text{o-phen} = (\text{Cu o-phen}_2)\ SO_4$$

(2) $$(\text{Cu o-phen}_2)\ SO_4 + K_2\ (HgJ_4) = (\text{Cu o-phen}_2)\ (HgJ_4) + KS_2O_4$$

LA MÉTHODE DE TRAVAIL

On ajoute aux 50 ml d'une solution neutre ou légérement acide, qui peut contenir 10 à 40 mg de cuivre et une quantité de mercure du même ordre de grandeur, sous forme de clorures ou de sulfats, une solution alcoolique le orto-phénilènedianime 2%, fraîchement préparée et filtrée, jusqu'à ce que la couleur vire au bleu-viollet.

En même temps commence a précipiter une combinaison cristaline de couleur violacées, possedant la composition donée par Tarasievici (Cu o-phen$_2$) SO_4 H_2O.

On ajoute goutte à goutte de l'acide sulfurique dilué (2—3%), jusqu'à ce que la couleur vire au jaune-verdâtre et le précipité se dissout.

Alors on ajoute goutte à goutte le réactif K_2 (HgJ_4) contenant un léger excès d'iodure de potassium (qui doit correspondre à la quantité de mercure existant dans la solution analysée), determinée aproximativement en préalable.

On agite continuellement jusqu'à la précipitation totale.

La précipité cristalin a la couleur rouge-violacées. On laisse reposer la solution 10—15 minutes jusqu-à la clarification, puis on filtre sur un creuset filtrant en verre d'Jenn G_3. On lave 3 à 4 fois avec 3 à 4 ml d'une solution qui contient 0,2% d'o-phénilènediamine fraîchement préparée et 2 à 3 fois avec un peu d'eau froide. On fait sécher à la temperature de 105°C et on pèse à poids constant.

Le réactif tétraiodomercurique est préparé avant l'utilisation en ajoutant goutte à goutte, à 5—10 ml d'une solution de clorure mércurique 1% (en agitant continuellement) une solution d'iodure de potassium 10%, jusqu'à ce que le précipité de HgJ_2 se dissout, puis l'excès necessaire pour le mercure existent dans l'épreuve.

Dans nos analyses nous avons pris des quantités différents de $CuSO_4$ et de $HgCl_2$, sans que la somme de leur poids dépasse 0,5 g.

Le poids moléculaire de la combinaison (Cu o-phen$_2$) (HgJ_4) est 988,14; on calcule le facteur pour le cuivre F = 0,06433 et son logarithme 2,80841.

Nous donnons le tableau des résultats obtenus d'aprés cette méthode.

Le dosage de cuivre en présence de mercure

No.	$CuSO_4 5H_2O$ prise en analyse	Mercure pris en analyse	Cuivre calculé mg	Precipité taré mg	Cuivre trouvé mg	Différence entre Cu calculé et Cu trouvé	Erreur absolue $E_A = \frac{100}{S}\%$	Erreur rélative $E_R = \frac{100}{Cu}\%$
1	0,0254	10	10	0,1559	10,03	+0,030	+0,118	+0,229
2	0,0254	10	10	0,1550	9,98	−0,020	−0,141	−0,200
3	0,1478	40	37,60	0,5694	37,63	+0,040	+0,078	+0,079
4	0,0534	30	13,58	0,2114	13,60	+0,020	+0,037	+0,150
5	0,1046	20	26,62	0,4146	26,67	+0,042	+0,040	+0,150
6	0,1562	30	39,76	,6180	39,76	0,000	0,000	0,0'0
7	0,1346	40	34,26	0,5327	34,27	+0,010	+0,007	+0,029

On prend comme erreur individuelle f de chaque détermination, l'erreur rélative procentuelle E_R, parce que chaque analyse a été effectuée avec des pesées de substance variables. Il est necessaire de rapporter toutes les erreure à la même quantité initiale, par exemple a 1 g le cuivre, ou à 100 g de cuivre mis en analyse. La dernière nous sembla la plus simple car, elle représente l'erreur E_R deja calculé.

L'erreur moyenne de chaque détermination :

$$e_m = \sqrt{\frac{\Sigma (f)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,8226}{6}} = \pm 0.37 \text{ g Cu.}$$

L'ereur probable de chaque détermination :

$$e_p = \pm 0,6745 \times 0,37 = \pm 0,24 \text{ g Cu.}$$

L'erreur moyenne aritmétique :

$$E_m = \sqrt{\frac{\Sigma (f)^2}{n\,(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0,8226}{42}} = \pm 0,14 \text{ g Cu}$$

L'erreur moyenne artitmétique probable :

$$E_p = \pm 0.6745 \times E_m = \pm 0,6745 \times 0,14 = \pm 0,09 \text{ g Cu.}$$

Cette semi-micro-méthode de dosage du cuivre en présence du mercure est affectée d'une erreur probable de $\pm$ 0,09%.

On la récommande donc parce qu'elle est rapide, exacte et parce-qu'elle utilise un réactif se trouvant dans le commerce a un prix convenable, de même qu'on le peut préparer facilement dans le laboratoire.

Le Laboratoire de Chimie Générale
L'Institut Polytechnique de Bucarest.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Feigl F. et Fürth M.* — Monatsh. 48 (1927) pag. 445.
Wagner R. — Disertation, Würtzburg 1924.
Nasser B. — Disertation, Würtzburg 1925.
Feigl F. — Liebigs Ann 444 (1925) pag. 249.
2. *Hieber W., Schliessmann C. et Ries K.* — Ztschf. f, anorg, chem. 180 (1929) pag. 89—104.
3. *G. Spacu, Suciu G.* — Bull. Soc. Sc. Cluj I. IV (1929) 403—408 et 512—514.
Spacu G., Spacu P. — Ibidem I. IV (1932) 471—476.
4. *Tarasievici N. T.* — Analit. Himii nr. 4 (1948) 108.

НОБЫЙ ПОЛУМИКРОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ ДОЗИРОВКИ МЕДИ В ПРИСУТСТВИИ РТУТИ

(Краткое содержание)

Метод основан на получении комплексного нерастворимого соединениия [Cu—o—phen$_2$] [HgJ$_4$], при добавлении о-фенилен-диамина к раствору, содержащему ионы меди и ртути; затем прибавляют раствор тетраиодмеркурата камия.

A NEW SEMI-MICRO-ANALYTHICAL METHOD FOR THE GRAVIMETRIC ESTIMATION OF COPPER IN THE PRESENCE OF MERCURY

(Summary)

The method described is based on the formation of an insoluble complex combination (Cu *o*-phen$_2$) (HgJ$_4$), when to a solution that contains copper and mercury ions is added o-phenylendiammine, and then a solution of potassium tetraiodmercury.

UNE NOUVELLE MÉTHODE SEMI-MICRO-ANALYTIQUE POUR LE DOSAGE GRAVIMÉTRIQUE DU CUIVRE EN PRÉSENCE DE MERCURE

(Résumé)

La méthode est basée sur la formation de la combinaison complexe insoluble (Cu *o*-phen$_2$) (HgJ$_4$) quand on ajoute à la solution qui contient les ions cuivre et mercure de l'o-phénilènediamine, puis une solution de tétraiodo-mercuriat de potassium.

EINE NEUE SEMI-MIKRO-ANALYTISCHE METHODE FÜR DIE GRAVIMETRISCHEN BESTIMMUNG DES KUPFERS NEBEN DES QUECKSILBERS

(Zusammenfassung)

Die methode begründet sich auf die Enstehung der unlösselichen komplexverbindung (Cu *o*-phen$_2$) (HgJ$_4$), wenn man zu einer Lösung welche Kupfer-und Quechsilberione enthält, zuerst o-Phenylendiamin und nachher eine Lösung von Kaliumtetraiodomerkuriat hinzugiebt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

544.192

II. MÉTHODE RAPIDE ET PRÉCISE SÉMI-MICRO-GRAVIMÉTRIQUE POUR LE DOSAGE DU MERCURE EN PRÉSENCE DU CUIVRE *)

par VIRGIL ARMEANU, NICULAE CAPLESCU et GEORGETA MIHAIL

Le méthode est basée sur la formation d'un précipité cristallin (Cu *o*-phen$_2$) (HgJ_4) rouge violacée [1] quand a une solution qui contient le mercure sous forme des ions complexes $(HgI_4)^{--}$ on ajoute une solution de l'ammine formée par le cuivre avec l'*o*-phénilènediamine. Nous avons déjà utilisée cette combinaison complexe insoluble pour le dosage du cuivre en présence du mercure [2].

PRINCIPE DE LA MÉTHODE

A la solution qui contient les ions de cuivre et de mercure on ajoute de l'iodure de potassium. La réaction suivante se produit:

$$CuSO_4 + HgCl_2 + 8KJ \rightarrow CuJ + K_2(HgJ_4) + K_2SO_4 + 2KCl + 3/2\ J_2.$$

Ainsi le cuivre est précipité quantitativement sous forme de iodure cuivreuse, tandis que le mercure reste en solution sous forme de tétraiodomercuriate de potassium. On filtre pour éliminer l'iodure de cuivre et on ajoute au filtrat quelques gouttes de thiosulfate de sodium jusqu'à ce que la solution ne continet plus de l'iode élémentaire.

On ajoute maintenant une solution de (Cu *o*-phen$_2$) SO_4 jusqu'à la précipitation totale. Le précipité qui se forme immédiatement, ayant la composition (2) (Cu *o*-phen^2) (HgJ_4) est filtré, lavé, séché et puis il est pesé.

LA MÉTHODE DE TRAVAIL

A la solution neutre ou neutralisée qui contient les sels du cuivre et du mercure, solution qui a un volume de 50 à 100 ml, on ajoute goutte à goutte une solution d'iodure de potassium 10%. Le précipité rouge d'iodure mercurique se dissout dans l'excès de l'iodure de potassium et la couleur vire au jaune.

Dans la solution il y a du tétraiodomercuriat de potassium et de l'iode élémentaire et comme produit insoluble en suspension rest l'iodure cuivreuse. On filtre sur un filtre à pores serrés Schott-Jena bande bleu.

*) Communication presentée à la III-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Politechnique de Bucarest (le 27—28 juin 1957).

On lave le précipité d'iodure cuivreuse, resté sur le filtre, 2 à 3 fois avec de l'eau. La solution filtrée a une couleur jaune à cause de l'iode mis en liberté. Pour l'éliminer on ajoute goutte à goutte une solution 10% de thiosulfate de sodium, jusqu'à ce que la solution devient incolore. Puis en agitant toujours, on ajoute une solution du réactif cuivre phénilènediamine, jusqu'à ce que la formation du précipité de couleur rouge violacé cesse.

On laisse quelques minutes en repos pour se déposer le précipité. On filtre sur un creuset filtrant en verre d'Jena G_3 ou en porcelaine poreuse de König A_2, B_2, C_2. On lave de précipité sur le creuset, à l'aide d'une pipète, plusieurs fois avec 3 à 4 ml de la solution de phénilènediamine diluée dix fois avec de l'eau, puis finalement on lave 3 à 4 fois avec 3 à 4 ml d'eau.

On séche à 105°C jusqu'à poids constant.

Le réactif cuivre phénilènediamine se prépare de la manière suivante : à 5—10 ml d'une solution de sulfate de cuivre 2%, on ajoute une solution alcolique 2% de orthophénilènediamine jusqu'à ce que la couleur ne varie plus. On acidule avec de l'acide sulphurique 3% jusqu'à ce que le précipité initialement formé se dissout et la couleur vire au jaune.

Le poids moléculaire de la combinaison complexe (Cu o-phen$_2$) (HgJ_4) étant 988,14 le facteur gravimétrique pour le mercure est $F = 0{,}20302$ et son logarithme 1,30754.

Les résultats des analyses effectuées avec cette méthode sont donnés dans le tableau qui suit.

Le dosage du mercure en présence du cuivre

No.	Clorure mercurique prise en analyse g	Cuivre pris en analyse mg	Mercure calculé mg	Précipité taré g	Mercure trouvé mg	Difference entre Hg calculé et Hg trouvé mg	Erreur absolue $E_A = \frac{100}{S}\%$	Erreur rélative $E_R = \frac{100}{Hg}\%$
1	0, 0 4	10	65,75	0,32 3	65,64	—0,11	—0,107	—0,167
2	0,1410	40	104,17	0,5133	104,22	+0,05	+0,040	+0,048
3	0,0810	70	59,84	0,2943	59,76	—0.08	—0,090	—0,130
4	0,1130	70	83, 8	0,41 9	83,42	—0,06	—0,053	—0,071
5	0,2118	100	157,22	0,7740	157,13	—0,09	—0,042	—0,057
6	0,0622	100	45,95	0,2259	45,87	—0,09	—0,140	—0,190

L'erreur moyenne de chaque determination :

$$e_m = \sqrt{\frac{\Sigma (f)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}4349}{5}} = \pm 0{,}29 \text{ g Hg.}$$

L'erreur probable de chaque determination :

$$e_p = \pm 0{,}6745 \times 0{,}29 = \pm 0{,}195 \text{ g Hg.}$$

L'erreur moyenne arithmetique determination :

$$E_m = \pm \sqrt{\frac{\Sigma (f)^2}{n\ (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0{,}4369}{30}} = \pm 0{,}12 \text{ g Hg.}$$

L'erreur moyenne aritmetique probable :

$$E_p = \pm 0'6745 \times E_m = \pm 0{,}6745 \times 0{,}12 = \pm 0{,}08 \text{ g Hg.}$$

Comme erreur individuelle f de chaque détermination, on prend l'erreur rélative procentuelle, afin de se rapporter toujours a la même quantité de mercure prise en analyse, c'est à dire a 100 g (E_R).

La méthode proposée dans cette note permet le dosage semi-micro-gravimétrique du mercure, quand il est en présence du cuivre (en éliminant en préalable le cuivre sous forme de CuJ_4) avec une erreur probable de $\pm$ 0,06 g pour 100 g de mercure dosé, ce qui montre que cette méthode rapide est une des plus exactes.

Le Laboratoire de Chimie Générale
L'Institut Polytehnique de Bucarest,

BIBLIOGRAPHIE

1. *Tarasievici N. T.* — Analit. Himii nr. 4 (1948), 108.
2. *V. Armeanu, N. Căplescu, G. Mihail* — Voir la note précédente.

СКОРЫЙ И ТОЧНЫЙ ПОЛУМИКРОГРАВИМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ДОЗИРОВКИ РТУТИ В ПРИСУТСТВИИ МЕДИ

(Краткое содержание)

Метод основан на образовании нерастворимого комплексного соединения [Cu—o—phen$_2$] [HgJ$_4$], при добавлении к раствору, в котором ртуть была переведена в комплексные ионы $[HgJ_4]^{--}$, раствора аммина меди с о-фенилен-диамином.

QUICK AND ACCURATE SEMI-MICRO-GRAVIMETRIC METHOD FOR ESTIMATION OF MERCURY IN THE PRESENCE OF COPPER

(Summary)

The method is based on the formation of an insoluble complex combination (Cu *o*-phen$_2$) (HgJ_4) when to the solution that contains mercury, in form of complex ions $(HgJ_4)^{--}$ is added a solution containing copper-ammine with *o*-phenylendiamine.

MÉTHODE RAPIDE ET PRÉCISE SÉMI-MICROGRAVIMÉTRIQUE POUR LE DOSAGE DU MERCURE EN PRÉSENCE DU CUIVRE

(Résumé)

La méthode est basée sur la formation de la combinaison complexe insoluble (Cu *o*-phen$_2$) (HgJ_4) quand à la solution qui contient le mercure sous forme d'ions complexes $(HgJ_4)^{--}$ on ajoute l'ammine du cuivre avec l'o-phénilènediamine.

EINE SCHNELLE UND GENAUE SEMI-MIKRO-ANALYTISCHE GRAVIMETRISCHE METHODE FÜR DIE BESTIMMUNG DES QUECKSILBERS NEBEN DES KUPFERS

(Zusammenfassung)

Die Methode begründet sich auf die Enstehung des unlösslichen Komplexverbindung (Cu *o*-phen$_2$) (HgJ_4), wenn man zu einer Lösung, in der das Quecksilber in die Komplexionen $(HgJ_4)^{2-}$ überführt worden ist, eine Lösung von dem Kupferammin in mit *o*-Phenylendiamin hinzugiebt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

CHIMIE FIZICĂ

541.138

GEFRIERSPUNKTMESSUNGEN IN NICHTWASSERIGEN LOSUNGEN

I. MITTEILUNG. DIE TRICHLORIDE DER ELEMENTE DER V. GRUPPE DES PERIODISCHEN SYSTEMS (PCl_3, $AsCl_3$ UND $SbCl_3$) IN BENZOLLÖSUNG *)

VICTOR PĂRĂUȘANU und ORTANSA LANDAUER

In vielen Fällen kann die kryoskopische Methode zum Studium der Wechselwirkungen in Lösungen angewendet werden.

Da die Gefrierpunktmessungen mit grosser Genauigkeit durchgeführt werden können, bieten die erhaltenen Ergebnisse hinweisende Werte für die Untersuchung ionischer Wechselwirkungen in Lösungen. Gleichzeitig kann man durch sehr genaue Bestimmungen der Gefrierpunkte auch die Dipol-Wechselwirkungen welche zwischen polaren Molekülen in Lösungsmitteln kleiner Dielektrizitätskonstanten auftreten, verfolgen. Auch das Auftreten von Molekülverbindungen, sowohl die Assoziation gleicher Moleküle der gelösten Substanz, als auch die Agregation zwischen verschiedenen, in der Lösung anfallenden Moleküle, kann durch die kryoskopische Methode hervorgehoben werden.

In vorliegender Arbeit wird versucht eine Übersicht über das Verhalten anorganischer Verbindungen in nichtwässerigen Lösungsmitteln darzustellen, wobei in dieser ersten Mitteilung auf das kryoskopische Verhalten von PCl_3, $AsCl_3$, und $SbCl_3$ in verdünnter Benzollösung (unter 0,5 Mol/1000 g Lösungsmittel) eingegangen wird.

Was das kryoskopische Verhalten der benzolischen Lösungen dieser Chloride betrifft, gibt es Literaturangaben, die aber in verschiedenen Fällen widersprechend sind.

Es wurde versucht einige weniger genaue Ergebnisse nachzuprüfen und die anzutreffenden Lücken zu ergänzen.

Der molekulare Zustand des PCl_3 und $AsCl_3$ in verdünnten Benzollösungen ist von A. R. Morgan und S. T. Bowden [2]) untersucht worden. Obengenannte Forscher fanden für das Molekulargewicht des $AsCl_3$ normale Werte (182 statt 181,3) dagegen für PCl_3 erhielten sie 150 statt 137,4 wass sie zur Annahmne einer partiellen Molekülassoziation führte. Antimontrichlorid wurde sowohl nach optischen [3]), als auch nach thermi-

*) Die vorliegende Arbeit wurde bei der IV wissenschaftlichen Tagung der didaktischen Kader des Polytechnischen Institutes Bukarest, Oktober 1958.

scher [4]) Methode in verschiedenen Kohlenwasserstofflösungen untersucht, wobei das Bestehen einiger Molekülverbindungen der Form:

$$C_6H_5CH_3 \cdot SbCl_3,\ C_6H_6 \cdot Sb_2Cl_6,\ CH_3C_6H_5 \cdot Sb_2Cl_6 \text{ usw.}$$

hervorgehoben wurde. Trotzdem findet man keine genauere Literaturangaben über den molekularen Zustand des $SbCl_3$ in verdünnten Benzollösungen, in welchen es oft als Friedel-Crafts-Katalysator verwendet wird [5]). Noch 1954 heben R. A. Coleman, N. S. Newman, A. B. Garret [6]) hervor, das man das Molekulargewicht des $SbCl_3$ in diesen Lösungen nicht kennt und behaupten, ohne experimentell nachzuprüfen, dass es zu erwarten wäre, in Analogie zu $AlCl_3$ und $AlBr_3$ auch für $SbCl_3$ eine dimere Form in Benzollösung anzunehmen. Anderseits ist bekannt, dass $SbBr_3$ in demselben Lösungsmittel als Monomer vorhanden ist [7], trotzdem nach obiger Darlegung auch $SbBr_3$ dimer erscheinen müsste.

EXPERIMENTELLER TEIL

Als Lösungsmittel wurde Benzol p.a. (thiophenfrei) nach Trocknen über Na und Destillation verwendet ($n_D^{20} = 1{,}5011$). Die Reinheit des Benzols wurde auf kryoskopischem Wege geprüft. Die Gefrierpunktskurve (Abb. 1) zeigt bei einer Erstarrung von ung. 30% einen Fall von 0,03° C, welcher auf dem Vorhandensein von gelöster Wasser-und Gasspuren beruht.

PCl_3 und $AsCl_3$ (Merckerzeugnisse) wurden über eine Kolonne destilliert, wobei eine Fraktion die in den Grenzen von 0,1°C destilliert, vewendet wurde. (Sp = 75,5°C bzw. 130,2°C).

$SbCl_3$ (Merckerzeugnis, wasserfrei) wurde als solches verwendet. Frisch zubereitete Benzollösungen sind klar, durchsichtig (Abwesenheit von $SbOCl_3$).

Apparatur. Die Gefrierpunktmessungen wurden nach der klassischen Methode in einer Beckmann-Apparatur durchgeführt.

Die Lösungen wurden vor jedem Versuch, durch Abwiegen des Lösungsmittels und der untersuchten Verbindung frisch zubereitet. Der Gefrierpunkt des reinen Lösungsmittel wurde vor jeder Bestimmung am Beckmannthermometer abgelesen.

Zum Aufstellen der Gefrierpunktkurven wurde die Aussenbadtemperatur bei 5°C unter dem Gefrierpunkte der Lösung, und für die Schmelzkurven bei 5°C über dieser Temperatur festgelegt. Während den Versuchen wurden alle Wege für das Eindringen der Luftfeuchtigkeit ins System beseitigt. Die Reproduzierbarkeit, die für die experimentellen Ergebnisse erreicht wurde, beweist, dass kein derartiger ausserer Einfluss gewirkt hat.

In Abhängigkeit der Unterkühlung und der Konzentration der Lösungen sind die Gefrierpunktkurven bis auf 0,005°C reproduzierbar.

Verdünnte $AsCl_3$-Lösungen zeigen eine beträchtliche Unterkühlung. Unter diesen Umständen wurden die Werte der Gefrierpunkte für eine abwesende Unterkühlung extrapoliert.

Es wird hervorgehoben, dass die Genauigkeit der mit 0,005°C durchgeführten Gefrierspunktbestimmungen für die verfolgten Zwecke ausreicht, da sie zu einem Höchstfehler von 3% für die verdünntesten Lösungen führt, welcher mit Zunehmen der Konzentration kleiner wird.

VERSUCHSERGEBNISSE

In Tabellen 1, 2 und 3 werden für PCl_3, $AsCl_3$ und $SbCl_3$ die in Benzollösungen erhaltenen Ergebnisse wiedergegeben, wo die Konzentration (m) der Substanz in Mol/1000 g Lösungsmittel ausgedrückt ist. Für die Berechnung von ΔT_{ber} wurde die kyroskopische Konstante des Benzols $k_{kryo} = 5{,}07$ verwendet.

Tabelle 1

	PCl_3			
	m	ΔT_{ber}	ΔT_{exp}	$\frac{\Delta T_{ber}}{\Delta T_{exp}}$
1	0,0729	0,368	0,366	1,00
2	0,174	0,884	0,880	1,00
3	0,256	1,329	1,328	1,00
4	0,362	1,836	1,818	1,01
5	0,559	2,838	2,832	1,00

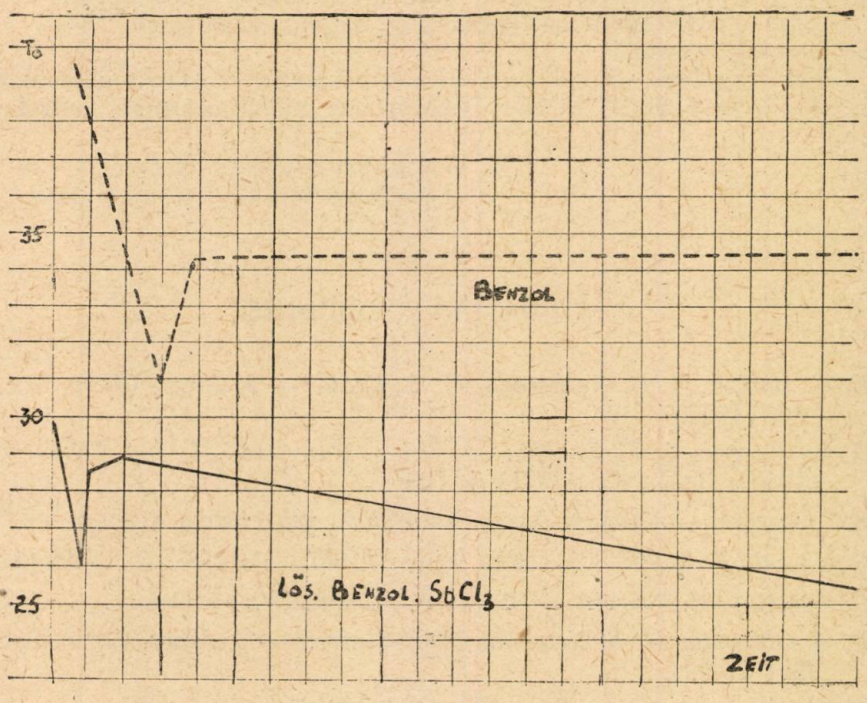
Tabelle 2

	$AsCl_3$			
	m	ΔT_{ber}	ΔT_{exp}	$\frac{\Delta T_{ber}}{\Delta T_{exp}}$
1	0,236	1,197	1,192	1,00
2	0,294	1,494	1,490	1,00
3	0,349	1,769	1,748	1,01
4	0,482	2,443	2,418	1,01
5	0,522	2,649	2,615	1,01

Tabelle 3

	$SbCl_3$			
	m	ΔT_{ber}	ΔT_{exp}	$\frac{\Delta T_{ber}}{\Delta T_{exp}}$
1	0,0351	0,177	0,172	1,00
2	0,0458	0,232	0,232	1,00
3	0,113	0,570	0,568	1,00
4	0,175	0,888	0,850	1,04
5	0,221	1,118	1,052	1,06
6	0,281	1,429	1,324	1,08
7	0,371	1,885	1,729	1,09

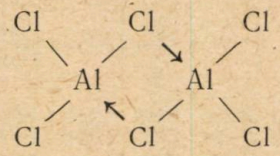
In allen Fällen wurden den in Abb. 1 wiedergegebenen, ähnliche Kurven erhalten, welche die in Tabelle 3 ($SbCl_3$) unter 3 dargestellten Ergebnisse ausdrücken.



Aus den in Tabelle 1, 2 und 3 wiedergegebenen Ergebnissen geht hervor, dass keine von den untersuchten Verbindungen in Benzollösung eine Assoziation eingeht, wobei sie ein fast ideales Verhalten zeigen. Die kleinen

Abweichungen die zu bemerken sind, sind bei $SbCl_3$ wenig grösser als bei PCl_3. Diese Abweichungen sind unserer Meinung nach Dipol-Wechselwirkungen zuzuschreiben, da das Dipolmoment für PCl_3, $AsCl_3$ und $SbCl_3$ von PCl_3 nach $SbCl_3$ ansteigt ($\mu_{PCl_3} = 1{,}1D$ $\mu_{AsCl_3} = 2{,}1D$ und $\mu_{SbCl_3} = 3{,}2D$).

Die Analogie zwischen den Trihalogeniden der Elemente der III. und V. Gruppe des periodischen Systems kann demnach nicht angenommen werden. Die Dimerisation des $AlCl_3$ wurde wie bekannt auf die Bildung kovalent-koordinativer Bindungen der Form:



zuruckgeführt worden, welche zum Auffüllen des Elektronen Oktetts beim Aluminiumatom führt.

Bei den Elementen der V. Gruppe ist dieses Bestreben nicht mehr so bedeutend. Man kennt nur Verbindungen des Typus PF_5, PCl_5 usw., welche sich durch das Hinzukommen der d-Schalen zur chemischen Bindung ausbilden. Die Beteiligung der d-Schalen die wenig stabil sind, um eine chemische Bindung auszubilden erfolgt nur in besonderen energetischen Bedingungen und auf keinen Fall unter gewönlichen Umständen.

Unsere Gefrierspunktbestimmungen zeigen, dass auch $SbCl_3$ keine Dimerbindung aufweist.

Dieses Ergebnis stimmt auch mit der bekannten Tatsache überein, dass PCl_3, $AsCl_3$ und $SbCl_3$ in der Dampfphase nicht assoziert auftreten [8]).

Physikalisch-chemisches Laboratorium
des Polytechnischen Instituts, Bukarest

LITERATURVERZEICHNIS

1. *B. C. Barton, A. C. Rotheroch, C. A. Kraus* — J. Amer. Chem. Soc. *74.* 786, (1952).
2. *A. R. Morgan, S. T. Bowden* — Trans. Far. Soc. *36,* 394 (1940) C. A. (1940), 3961; C. (1941) I 180.
3. *S. S. Raskin* — Dokladî Akad. Nauk *100,* 485 (1955).
4. *Raymond, H. Ewell* — J. Chem. Phys. *5,* 967, (1937). C. A. 11659 (1938).
5. *C. Cauquil, H. Barrera* — Bull. Soc. Chim. Fr. 84 (1951).
6. *R. A. Coleman, M. S. Newman, A. B. Garrett* — J. Amer. Chem. Soc. *76.* 4534 (1954).
7. *R. Wright* — J. Chem. Soc. *109,* 1134 (1916).
8. *G. Briegleb* — „Zwischenmolekulare Kräfte und Molekülstruktur" (F. Enke, Stuttgart 1937, S. 103).

КРИОСКОПИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ В НЕВОДНЫХ РАСТВОРАХ ПРИМЕЧАНИЕ I

ТРЕХХЛОРИСТЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ 5-ой ГРУППЫ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ (PCl_3, $AsCl_3$, $SbCl_3$) В БЕНЗОЛОВЫХ РАСТВОРАХ

(Краткое содержание)

В этой работе криоскопическим путем изучается молекулярное состояние PCl_3, $AsCl_3$, $SbCl_3$ в бензеновых растворах.

Все изученные галоиды представляют в растворе почти нормвльный молекулярный вес. Легкое отклонение от идеального состояния обьясняется некоторыми взаимными действиями двухполюсного типа. Предположение некоторых авторов (6), не основанное на опытных данных, что по аналогни с $AlCl_3$ и $SbCl_3$ мог бы быт димеризован в бензеновом растворе, таким образом не подтверждается.

Следует краткое обсуждение значения этих результатов.

CRIOSCOPICAL MEASUREMENTS IN NO-WATERY SOLUTIONS TRICHLORIDES OF THE ELEMENTS OF THE V-th GROUP OF THE PERIODICAL SISTEM (PCl_3, $ASCl_3$, $SbCl_3$) IN BENZEN SOLUTIONS

(Summary)

The molecular state of PCl_3, $AsCl_3$ and $SbCl_3$ in diluted benzene solutions has been investigated by the crioscopicy method. All the halogens investigated show in solution an almost normal molecular weight. The small deviation from the ideal state is due to some interactions of dipole type.

Some authors hypothesis (6), not based on experimental data, that by analogy with $AlCl_3$, $SbCl_3$ might be dimmerised into benzene solution, is therefore not confirmed.

There is given a short discussion as regards to these results.

MESURES CRYOSCOPIQUES DANS LES SOLUTIONS NON AQUEUSES. I-er NOTE

LES TRICLORURES DES ELEMENTS DE LA V-ème GROUPE DU SYSTÈME PERIODIQUE (PCl_3, $AsCl_3$, $SbCl_3$) DANS LES SOLUTIONS BENZENIQUES

(Résumé)

On a étudié par voie cryoscopique l'état moléculaire de PCl_3, $AsCl_3$ et $SbCl_3$ dans des solutions de benzène dilué.

Tous les halogénures examinés présentent dans la solution un poids moléculaire presque normal. La legère déviation de l'état idéal se doit à

certaines interactions de type dipôle. L'hypothèse de certains auteurs (6), non basée sur des données expérimentales, que par analogie avec la $AlCl_3$, la $SbCl_3$ pourrait être également dimerisée dans la solution benzénique, n'est donc pas confirmée.

L'on discute brièvement la signification de ces résultats.

GEFRIERSPUNKTMESSUNGEN IN NICHTWASSERINGEN LOSUNGEN

I. MITTEILUNG. DIE TRICHLORIDE DER ELEMENTE DER V. GRUPPE DES PERIODISCHEN SYSTEMS (PCl_3, $AsCl_3$ UND $SbCl_3$) IN BENZOLLÖSUNG)

(Zusammenfassung)

Der Molekülzustand des PCl_3, $AsCl_3$ und $SbCl_3$ in verdünnter Benzollösungen wurde auf kryoskopischem Wege untersucht. Alle untersuchten Halogenide zeigen in der Lösung ein fast normales Molekulargewicht. Die geringen Abweichungen vom idealen Verhalten ist einer Dipolwechselwirkung zuzuschreiben. Die von einigen Forschern (6) aufgestellte Hypothese, die nicht auf experimentallen Ergebnissen beruht, und zwar dass in Anlehnung an $AlCl_3$ auch $SbCl_3$ in Benzollösung dimerisiert sein könnte, ist somit nicht bestätigt worden. Es wird ganz kurz die Bedeutung der Ergebnisse besprochen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 2

ELECTROCHIMIE

541.1338

LA RÉDUCTION ÉLECTROLYTIQUE DU P-NITROPHÉNÉTOLE EN P-PHÉNÉTIDINE, À L'AIDE D'UNE ÉLECTRODE ROTATIVE

par ION ATANASIU, LYA BLUM et MARIA POPA

Dans une note antérieure (1) nous avons traité l'action du p-nitrophénétole en tant que dépolarisant cathodique, ainsi que l'étude du rendement de courant en fonction de divers paramètres physico-chimiques (densité de courant, température, concentration du *p*-nitrophénétole, durée, nature des électrodes) en employant une cathode immobile et un agitateur.

A l'encontre des indications trouvées dans la littérature (2, 3, 4), au cours de cet exposé on étudie l'intensification du procès et l'amélioration du rendement de la réduction en utilisant une cathode rotative. Il serait possible de cette manière, de réaliser un contact plus intime entre l'emulsion et la cathode, en obtenant une dépolarisation plus intense et permettant d'appliquer une plus grande densité de courant et une plus forte concentration du dépolarisant, rapportées au même volume d'électrolyte.

L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

On emploie une cellule d'électrolyse formée d'une cuve en verre ayant à l'intérieur un diaphragme cylindrique ($H = 140$ mm ; $\varnothing = 65$ mm) qui constitue l'éspace cathodique. Le diaphragme est clos à l'aide d'un bouchon pourvu de 3 orifices, qui permettent d'introduire un réfrigérent ascendant, un thermomètre et la cathode. La cathode rotative est formée d'une barre en cuivre ($\varnothing = 10$ mm), ayant en même temps le rôle d'agitateur et laquelle, actionné par un moteur électrique, tourne à une vitesse de 800 rotations par minute. Dans l'éspace anodique qui se trouve à l'extérieur du diaphragme on introduit l'anode, formée d'une bande cylindrique en plomb. Le catholyte de l'intérieur du diaphragme est formé par du H_2SO_4 ($d = 1{,}25$) et le *p*-nitrophénétole emulsioné qui doit être réduit. L'anolyte est formé par du H_2SO_4 ayant la même concentration. La cellule d'électrolyse toute entière est introduite dans un thérmostate, pour pouvoir maintenir une température de travail constante. Le schéma de l'installation est un montage classique d'électrolyse et la connexion de la cathode à la barre conductrice de courant est réalisée à l'aide d'un contact métallique mobile.

Le *p*-nitrophénéthole utilisé a été premièrement purifié par des récristalisations répetées d'alcool, en obtenant ainsi un *p*-nitrophénétole pur ayant le point de fusion 58°C. De cette réduction il résulte le sulphate de phénetidine. Après la réduction, le contenu du diaphragme est refroidi, les

cristaux de sulphate de phénetidine filtrées et le *p*-nitrophénétole qui n'a pas été réduit est éliminé par dissolution en benzène.

On a étudié, en utilisant une cathode rotative ayant une vitesse de 800 rot/min, la variation du rendement de courant en fonction du rapport *p*-nitrophénétole/acide sulphurique, de la densité du courant, de la température et de la durée de l'électrolyse.

1. LA VARIATION DU RENDEMENT EN FONCTION DE LA CONCENTRATION DU P-NITROPHÉNÉTOLE

L'augmentation de la concentration du *p*-nitrophénétole rapportée au même volume d'électrolyte (250 cc H_2SO_4), respectivement l'accroissement du rapport *p*-nitrophénétole/acide sulphurique, a comme conséquence une amélioration du rendement de courant, ainsi qu'il résulte du tableau 1.

Tableau 1

La variation du rendement en fonction de la concentration du p-nitrophénétole

Diaphragme			Cathode-Cuivre 800 rot/min.					Anode-Plomb
No.	p-nitro-phénétole g	H_2SO_4 $d = 1,25$ cc	Temp.°C	I_A	Dc_{A/dm^2}	Temps	Q_{Ah}	ηc %
1	10	250	80	2,2	10	4h25′	9,7	71,2
2	20	250	80	2,2	10	8h50′	19,4	78,7
3	25	250	80	2,2	10	11h	24,2	84,1
4	30	250	80	2,2	10	13h	28,8	85,0

Le rendement augmente jusqu'à des valeurs rapprochées entre elles, 84,1% respectivement 85%, pour des concentrations de 25 g respectivement 30 g p-nitrophénétole emulsioné en 250 cc H_2SO_4 $d = 1,25$. Bien que lors d'une concentration plus forte de dépolarisant, l'électrolyte devient plus visqueux, à l'aide de la cathode rotative, l'émulsion est tout de même fine, la réduction se fait plus intimément et l'on obtient des valeurs élevées du rendement.

2. LA VARIATION DU RENDEMENT EN FONCTION DE LA DENSITÉ DE COURANT

Des résultas obtenus (tableau 2), on peut constater une amélioration du rendement lors de l'augmentation de la densité de courant cathodique, en obtenant un maximum à la valeur de 12 A/dm² lorsqu'on arrive à un rendement de 87,6%.

Pour des valeurs supérieures de la densité de courant le rendement diminue, puisque le hydrogène dégagé à la cathode n'est pas entièrement utilisé au cours du procès de réduction. L'emploi de la cathode rotative permet d'atteindre des valeurs plus importantes du rendement pour des densités de courant plus élevées.

Tableau 2

La variation du rendement en fonction de la densité de courant

Diaphragme		Cathode-Cuivre 800 rot/min.					Anode-Plomb	
No.	Dc A/dm²	I_A	p-nitro-phénétole g	H_2SO_4 $d = 1,25$ cc	Temp. °C	Temps	Q_{Ah}	ηc %
1	8	1,8	30	250	80	16h	28,8	83,2
2	10	2,2	30	250	80	13h	28,8	85,0
3	12	2,7	30	250	80	10h40′	28,8	87,6
4	15	3,3	30	250	80	8h45′	28,8	80,2

3. LA VARIATION DU RENDEMENT EN FONCTION DE LA TEMPÉRATURE

Ainsi qu'il résulte du tableau 3 ,le rendement atteint un maximum à la température de 80°C, lorsqu'on obtient la valeur de 87,6%. L'élevation de la température a pour effet d'augmenter la vitesse de réaction ; lors des temperatures supérieures le rendement diminue parceque le sulphate de phénétidine se décompose.

Tableau 3

La variation du rendement en fonction de la température

Diaphragme		Cathode-Cuivre 800 rot/min.					Anode-Plomb	
No.	Temp. °C	p-nitro-phénétole g	H_2SO_4 $d = 1,25$ cc	Dc A/dm²	I_A	Temps	Q_{Ah}	ηc %
1	70	30	250	12	2,7	10h40′	28,8	84,3
2	80	30	250	12	2,7	10h40′	28,8	87,6
3	90	30	250	12	2,7	10h40′	28,8	83,1

4. LA VARIATION DU RENDEMENT EN FONCTION DU TEMPS

On peut observer une diminution du rendement de courant à partir de la valeur de 92% pour 4 h 40' jusqu'à la valeur de 87,6% pour 10 h 40' (le temps théorique nécessaire).

Tableau 4

La variation du rendement en fonction du temps

Diaphragme		Cathode-Cuivre 800 rot/min.					Anode-Plomb	
No.	Temps	p-nitro-phénétole g	H_2SO_4 $d = 1,25$ cc	Temp. °C	Dc A/dm²	I_A	Q_{Ah}	ηc %
1	4h40′	30	250	80	12	2,7	12,6	92,2
2	7h40′	30	250	80	12	2,7	20,7	90,1
3	10h40′	30	250	80	12	2,7	28,8	87,6
4	11h40′	30	250	80	12	2,7	31,5	50,0

Si la durée de l'électrolyse dépasse celle théoriquement calculée, le rendement baisse très rapidement, ce qui indique la décomposition du produit et une réduction plus avancée. Bien qu'on obtient un rendement élevé de courant, il n'est point économique de maintenir une courte durée de l'électrolyse parcequ'on ne réduit qu'une petite quantité de produit.

La manière dont on établit les conditions optima de réduction du *p*-nitrophénétole à l'aide d'une cathode rotative, est synthétisée dans le tableau no. 5.

Tableau 5

Les conditions optima de réduction du p-nitrophénétole à l'aide d'une électrode rotative

Diaphragme		Cathode-Cuivre 800 rot/min.				Anode-Plomb	
p-nitro-phénétole g	H_2SO_4 $d = 1,25$ cc	p-nitro-phénétole / H_2SO_4	Dc A/dm²	Temp. °C	Temps	Q_{Ah}	ηc %
30	250	1 g/8,3 cc	12	80	10h40′	28,8	88

On constate un comportement analogue du *p*-nitrophénétole en tant que dépolarisant cathodique, en utilisant une cathode rotative — à celui qui existe dans les conditions d'une cathode immobile et un agitateur.

Les résultats expérimentaux confirment les hypothèses regardant la possibilité d'améliorer le rendement de courant et d'intensifier le procédé par l'emploi d'une densité plus élevée de courant et d'une plus forte concentration du dépolarisant. En utilisant une quantité de courant correspondante à celle théoriquement calculée, on obtient un rendement de courant rapproché de la valeur de 88%, supérieur à celui obtenu à l'aide d'une cathode immobile (75%).

Pour trouver un procédé de réduction aussi économique que possible, on a étudié la variation du rendement de courant en utilisant un électrolyte récirculé. On constate que le rendement se maintient à des valeurs très rapprochées, mais la purité du produit diminue, ce qui fait que l'électrolyte ne peut être récirculé qu'approximativement 3—4 fois.

CONCLUSIONS

1. Les résultats experimentaux montrent la possibilité d'améliorer le rendement de courant et l'intensification du procès de réduction, à l'aide d'une cathode rotative.

On obtient des rendements de courant de 88%, supérieurs donc approximativement de 13% à ceux obtenus à l'aide d'une cathode immobile; la densité de courant et la concentration du dépolarisant sont aussi plus élevées.

2. On a étudié la variation du rendement de courant lors de l'électrolyse à cathode rotative, en fonction des paramètres physico-chimiques les plus importants:

a) avec l'augmentation de la densité de courant le rendement atteint un maximum à 12 A/dm²;

b) lors de l'accroissement du rapport *p*-nitrophénétole / acide sulphurique, on constate une amélioration du rendement jusqu'à un rapport de 1 g *p*-nitrophénétole/8,3 cc acide sulphurique;

c) en élevant la température, le rendement atteint un maximu à 80°C;

d) en prolongeant la durée de l'électrolyse au-delà des conditions théoriques d'électrolyse, le rendement baisse.

3. Les conditions optima d'électrolyse pour obtenir un bon rendement de courant sont:

cathode en barre de cuivre, tournant à une vitese de 800 rot/min et ayant en même temps le rôle d'agitateur; anode en plomb, température de 80°C, densité de courant 12 A/dm², rapport *p*-nitrophénétole/acide sulphurique 1 g *p*-nitrophénétole/8,3 cc H_2SO_4 d = 1,25.

4. On peut utiliser un électrolyte récirculé 3—4 fois; la récirculation répétée de l'électrolyte conduit à un produit impur.

Le Laboratoire l'Electrochimie
L'Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Atanasiu, L. Blum* şi *M. Popescu* — Bul. Inst. Politehnic, Buc. Tome XIX, fasc. 3—4; 1957, pag. 189.
2. *G. A. Kirchhof* — Chem. Pharm. Ind. (russe) 326—32, 1933.
3. *W. A. Kirchhof, M. O. Spektor, S. M. Butjugin* — Russ. P. 39111/24.I.1933.
4. *W. E. Bradt* şi *A. W. Erikson* — Trans. electrochem, soc. 75 (13), 1939.

ВОССТАНОВЛЕНИЯ Р-НИТРОФЕНЕТОЛА В Р-ФЕНЕТИДИН ПРИ ПОМОШИ ВРАШАЮШЕГОСЯ КАТОДА

(Краткое содержание)

В данной работе изучается увеличение интенсивности процесса и выхода при восстановлении р-нитрофенетола в р-фенетидин при помощи вращающегося катода. Из изучения физико-химических параметров, установлены оптимальные условия электролиза, которые дают лучшие выходы по току чем те которые получаются при неподвижном катоде с мешалкой; плотность тока и концентрация деполяризатора, также повышены.

THE ELECTROCHEMICAL REDUCTION OF P-NITROPHENETOL TO P-PHENETIDIN BY USING A ROTATING CATHODE

(Summary)

In this article the intensification of the process of the reduction of *p*-nitrophenetol to *p*-phenetidin and the increasing of the yield by using a rotating cathode were examined. The study of the physical-chemical parameters established the best conditions of electrolysis that would lead to obtaining a higher current efficiency than that obtained by using a moveless cathode and a stirrer; the current density and the concentration of the depolarizer are also higher.

LA RÉDUCTION ÉLECTROLYTIQUE DU P-NITROPHÉNÉTOLE EN P-PHÉNÉTIDINE À L'AIDE D'UNE ÉLECTRODE ROTATIVE

(Résumé)

Au cours de cet exposé on étudie l'intensification du procès et l'amélioration du rendement de la réduction du *p*-nitrophénétole en *p*-phénétidine, à l'aide d'une cathode rotative. En étudiant les paramètres physico-chimiques, on établit les conditions optima d'électrolyse, qui conduisent à des rendements de courant supérieurs à ceux obtenus à l'aide d'une cathode immobile et un agitateur ; la densité de courant et la concentration du dépolarisant sont aussi plus élevées.

DIE ELEKTROLYTISCHE REDUKTION DES P-NITROPHENETOLS ZU P-PHENETIDIN MIT HILFE EINER ROTIERENDEN KATHODE

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wird die Verstärkung des Prozesses und die Steigerung der Ausbeute bei der Reduktion des *p*-Nitrophenetols zu *p*-Phenetidin durch Verwendung einer rotierenden Kathode verfolgt. Durch die Untersuchung der physikalishchemischen Parameter werden die optimalen Elektrolysebedingungen festgelegt, welche zu höheren Stromausbeuten als diejenigen mit unbeweglicher Kathode und Rührer führen ; die Stromdichte sowie die Konzentration des Depolarizators sind ebenfalls grösser.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 2

621.357

DIE ELEKTROCHEMISCHE CHLORIERUNG VON PARAFFINWACHS

LYA BLUM LAZAR

Bis nun hat man Chlorparaffinwachs auf chemischem Wege durch Behandlung des Paraffinwachses mit Chlorgas erzielt. Die hierbei angewandten Verfahren beruhten im allgemeinen auf zwei Arbeitsmethoden :

a) Chlorieren des Paraffinwachses in geschmolzenem Zustand [1—11] oder

b) Chlorieren des in einem entsprechenden Lösungsmittel, beispielsweise in Tetrachlorkohlenstoff, aufgelösten Paraffinwachses [12—15] unter verschiedenen Arbeitsbedingungen und in Anwesenheit verschiedener Katalysatoren.

Unsere Versuche hatten den Zweck, das Chlorieren des Paraffinwachses auf elektrochemischem Wege unmittelbar dadurch herbeizuführen, dass die organische Substanz mit dem Elektrolyt emulgiert wird, das das elektrolytische Chlor liefert.

Es wurde mit einem weissen Paraffinwachs von 54°C Schmelzpunkt gearbeitet. Als Elektrolyt wurde eine Salzsäurelösung vom spez. Gew. 1,06 verwendet, und als Anode diente eine Netzelektrode aus glänzendem Platindraht. Als elektrolytische Zelle wurde ein Glasgefäss benutzt, in das ein Diaphragma eingeführt wurde. Der durch einen Stopfen abgeschlossene Anodenraum wurde mit einem Thermometer, einem Rückflusskühler, einem Rührer und der Platinanode ausgerüstet. Die ganze, so ausgestattete Zelle wurde in einem Thermostat eingebracht, in dem eine andauernde Temperatur von 90°C beibehalten wurde. Durch kräftiges Rühren wurde eine feine Emulsion des geschmolzenen Paraffins im Elektrolyt erreicht.

Bei Beginn der Elektrolyse haben sich flüssige Produkte von hellgelber Farbe und geringem Chlorgehalt ergeben ; mit zunehmender Dauer der Elektrolyse wird ein ganzer Bereich von Produkten erzielt, deren Viskosität mit wachsendem Chlorgehalt ansteigt. Die Elektrolyse wurde hierauf so weit geführt, bis ein Harz von bernsteingelber Farbe gewonnen wurde, dessen Chlorgehalt 50% betrug. Nach Massgabe der zunehmenden Viskosität des Produktes wird der Chlorzutritt erschwert. Man könnte diese Schwierigkeit durch Zugabe von Tetrachlorkohlenstoff zu dem im Elektrolyt emulgierten Paraffinwachs beseitigen. Die sich aus der Reaktion ergebende Salzsäure kann wieder in Umlauf gebracht werden.

Die Wirkung des Paraffinwachses — ebenso wie die des Gasöls, der leichten und schweren Mineralöle usw. — als Depolarisatoren gegenüber Chlor und die bei den verschiedenen physikalisch-chemischen Parametern erzielten genauen Versuchsergebnisse sowie der Einfluss der Katalysatoren werden zu einem späteren Zeitpunkt mitgeteilt werden.

Elektochemisches Laboratorium
Polytehnisches Institut Bukarest

LITERATUR

1. *Bolley,* Ann. 106, 230 (1858).
2. *A. Schaarschmidt u. M. Thiele,* Ber. 53, 2131 (1920).
3. *Y. Tanaka, R. Kobayashi u. H. Furumoto,* J. Soc. chem. Ind., Japan 36, 228 B — 30 B (1933).
4. *F. T. Gardner,* Ind. Enging. Chem. 25, 1211—12 (1933).
5. *Y. Tanaka, R. Kobayanshi u. J. Nishi,* J. Soc. chem. Ind. Japan 37, 208 B — 209 B (1934).
6. *R. Strauss,* Oel Kohle Erdöl Teer 11; 83—85 (1935).
7. *J. K. Wirth,* D.R.P. 673521 12/8 (1934) ausg. 23/3 (1939).
8. *P. Bosko,* U.S. 2433419 Dec. 30 (1947).
9. *M. Yokoyama,* Japan 172141 Jan. 9 (1946).
10. *A. Girelli u. C. Siniramed,* Riv. Combustibili 3, 311—19 (1949).
11. *S. Shimada,* Japan 3818 Aug. 10 (1953).
12. *C. F. Boehringer & Söhne,* D.R.P. 256856 19/11 (1910) ; D.R.P. 258156 28/12 (1911) ; D.R.P. 275165 17/3 (1912) ; D.R.P. 275166 17/3 (1912).
13. *H. B. Hass u. E. T. McBee,* A. P. 2105733 8/6 (1935).
14. *A. Gilson, J. Quiquercz,* Comp. Franc. de Raff, D.B.P. 816694 (1948).
15. *H. Müller, E. Müller u. A. Müller,* Austrian 182707 July 25 (1955).

ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЕ ХЛОРИРОВАНИЕ ПАРАФИНА

(Краткое содержание)

В этой статье описан новый метод непосредственного клорирования парафина электрохимическим путём с помощью эмульсирования органического вещества электролитом, отдающего електролитический хлор. Электролиз вели до получения продукт, содержащего 50% хлора.

THE ELECTROCHEMICAL CHLORINATION OF PARAFFIN WAX.

(Summary)

In this article it is presented a new method for the chlorination of paraffin wax directly, by electrochemical way, mixing an emulsion of the organic substance with the electrolyte that produces the electrolytical chlor- The electrolysis was led till the obtention of a product with a chlor content of 50%.

LA CHLORURATION ÉLECTROCHIMIQUE DE LA PARAFFINE

(Résumé)

Dans cet article on présente une nouvelle méthode de chloruration de la paraffine directement, par voie électrochimique, en émulsionnant la substance organique avec l'électrolyte qui produit le chlor électrolytique. On avait conduit l'électrolyse jusqu'à l'obtention d'un produit avec un contenu en chlor de 50%.

DIE ELEKTROCHEMISCHE CHLORIERUNG VON PARAFFINWACHS.

(Zusammenfassung)

Der Verfasser beschreibt eine neue Methode für das Chlorieren des Paraffinwachses auf elektrochemischem Wege unmittelbar, dass die organische Substanz mit dem Elektrolyt emulgiert wird, das das elektrolytische Chlor liefert. Die Elektrolyse wurde hierauf so weit geführt, bis ein Produkt gewonnen wurde, dessen Chlorgehalt 50% betrug.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 2

CHIMIE TEHNOLOGICĂ

662.741.3

LE FRACTIONNEMENT GRAVIMETRIQUE UTILISÉ COMME MÉTHODE DE CARACTÉRISATION PHYSICO-CHIMIQUE DES CHARBONS JEUNES

I. L'ÉTUDE DES LIGNITES DE ROVINARI ET SCHITU-GOLEȘTI

par ISAC BLUM, FRIDERICH BOLCHI, BENJAMIN BERCOVICI et E. POPESCU

L'importance croissante des lignites pour notre économie nationale est due premièrement aux réserves considerables dont nous disponsons et en même tenps à la nécessité de remplacer le bois et les combustibles supérieurs — produits pétrolifères, gaz naturel et charbons de Valea Jiului — dans le bilan energétique du pays.

L'utilisation des lignites à des effets energétiques pour l'industrie et l'économie domestique, implique la nécessité de résoudre de nombreux problèmes concernant les conditions d'exploitation, la composition physico-chimique et leurs propriétés (valorification des charbonnailles, teneur très élevée en cendres et contenu d'humidité, tendance d'auto-inflammation en stoc, etc.).

Les études concernant la réduction du contenu de stérile des lignites et l'application — pour la première fois dans la R.P.R. — de l'épuration des lignites par le lavage à l'aide de milieux denses, ont démontré la possibilité de séparer les lignites en classes densimetriques, en partant des différences de poids spécifique entre le stérile et le charbon (1).

Dans les études concernant la genèse de quelques types de charbons bruns de terre, lors de l'analyse chimique de leurs cendres, la quantité importante de sable et d'argile du charbon crue, masquait la quantité réelle de calcium qui s'y trouve organiquement combiné et lequel, par sa valeur détermine une série de particularités des charbons respectifs, comme suite des conditions spécifiques de leur formation, représentant à la fois leurs paramètres génétiques de classification. En employant la séparation par centrifuge à la densité de 1,4 des échantillons ayant beaucoup de cendres, on a obtenu deux franctions (l'une lourde, enrichie en substances minérales — sable et argile — et l'autre légère, riche en substance organique, cette dernière permettant facilement de trouver dans ses cendres de grandes quantités d'oxide de calcium, comme suite de la concentration dans cette fraction, des sels de calcium des acides humiques (2).

En étudiant le briquettage sans liant des lignites, on a remarqué que si l'on enlève de l'échantillon de charbon lavé à la densité de 1,25 pour avoir une teneur réduite en cendres, la qualité $<1{,}20$ qui représente un aspect plus accentué xiloïde, les caractéristiques de briquettage sont amé-

liorées. Il fallait établir plus loin, en partant de cette observation, si le classes densimetriques résultées de la séparation des lignites dans des liquides lourds, diffèrent seulement par leur teneur en cendres ou bien également par la structure chimique du charbon et eventuellement par l'analyse chimique des cendres. Si lors de la détermination du contenu des matières volatiles et lors de l'analyse élementaire on n'a pas constaté d'importantes variations, on a remarqué par contre, que le pourcentage d'acides humiques rapportés à la masse combustible croît vers les classes de densité élevée ; et de même de pourcentage de SiO_2 et d'Al_2O_3 croît dans les cendres, tandis que le pourcentage de CaO, MgO et de SO_3 diminue. Il se produit donc une séparation de la masse organique du charbon en de diverses structures chimiques qui retiennent une certaine quantité de cendres caractéristique à la classe de densité respective, et de même une differentiation de la composition chimique de leurs cendres (3).

Vu qu'au cours des études mentionnées plus haut, on a travaillé avec des granulations relativement grandes des charbons (5—30 mm), le caractère complexe de la masse organique se manifestant aussi par le maintien rapproché dans les morceaux de charbons, des componentes à propriétés physico-chimiques différentes, et d'autre part le contenu en substances minerales des charbons représentant un paramètre variable et peu significatif même pour les morceaux de charbon d'un même bloc, — leur influence sur la séparation densimetrique sera très différente ; par exemple, au cas d'une teneur élevée en cendres (situation caractéristique pour nos lignites), les effets imprimés par les propriétés des componentes de la masse organique deviennent insignifiants, en obtenant seulement un lavage du charbon de stérile.

Pour que la séparation densimétrique devienne représentative pour la masse organique du charbon, il est nécessaire de réduire autant que possible la teneur en cendres du charbon et pour les charbons étudiés comparativement, d'étudier des charbons ayant des valeurs rapprochées.

Pour l'étude des charbons plus fortement métamorphosés et spécialement pour les houilles, la littérature recommande la méthode du fractionnement gravimetrique dans les liquides lourds, le charbon étant séparé à une granulation très fine ($< 250\ \mu$) ou l'on obtient un fractionnement qui dépend surtout des différences structurales de la masse organique (4, 5).

Le fractionnement gravimetrique conduisant, dans le cas des houilles, à des concentrés pétrographiques, il résulte qu'il se produit une séparation du charbon, d'après les poids spécifique des groupes de componentes à propriétés physico-chimiques différentes, ayant les poids spécifiques plus grands ou plus petits que le poids spécifique moyen du charbon en ensemble, ce qui reflète les différentiations du matériel génétique végétal auquel s'ajoute l'action des divers facteurs de métarmophose au cours du temps (4).

Les résultats du fractionnement gravimétrique dans les liquides lourds, de plusieurs types de houilles — les rendements de séparation a des densités différentes, ainsi que les limites de l'intervalle densimétrique de séparation — sont caracteristiques au stade d'incarbonisation et aux propriétés physico-chimiques, servant ainsi à la caractérisation et la classification des charbons (4, 5, 6).

Au cours de cet exposé ont s'est proposé d'étudier la possibilité d'appliquer le fractionnement gravimetrique aux charbons jeunes — notamment les lignites — comme méthode moderne d'étude de la masse organique des charbons, dans la but d'obtenir une image plus exacte du point de vue scientifique en ce qui concerne la répartition et les propriétés, physico-chimiques des componentes structurales de la masse organique d'ou il résulte de nouveaux criteriums d'appréciation et d'individualisation des charbons étudiés.

II. CONDITIONS EXPÉRIMENTALES

A. MATIÈRE PREMIÈRE

Les études ont porté sur les lignites de Rovinari et de Schitu-Golești, un choix justifié par l'importance économique des gisements respectifs, ainsi que pour les possibilités qu'offrent ces charbons — ayant la même appartenance géologique et une analyse chimique rapprochée — pouvant ainsi, par la comparaison des résultats de leur fractionnement gravimetrique, faire mieux ressortir les ressemblances et les différences de leur structure qu'en utilisant d'autres méthodes d'analyse.

Vu que les échantillons représentatifs pour la mine, contenaient des pourcentages élevés de stérile, on a employé pour l'étude de la masse organique de ces lignites, des blocs de charbon triés à la main, broyés et criblés à une granulation de 5—30 mm, en prenant des échantillons moyens d'aproximativement 10 kg, à la suite des opérations d'homogéneisation et de réduction. Pour réduire encore le contenu de stérile (des cendres), les échantillons moyens obtenus one été épurés par le lavage dans des solutions de $CaCl_2$, à des densités correpondant à des teneurs réduites en cendres et ayant des valeurs rapprochées. Après être séchés à l'atmosphère du laboratoire, on a fait les analyses techniques et élementaires des charbons ainsi préparés pour les déterminations et les résultats sont montrés sur le tableau no. 1.

Tableau no. 1

Les caractéristiques chimiques et techniques des lignites de Rovinari et Schitu-Golești

Charbon de	Analyse technique %						Analyse élementaire %			
	W_a^a	A^a	$A^{a,h}$	V^a	V^{mc}	C_f^a	C^{mc}	H^{mc}	$(O+N)^{mc}$	S_c^{mc}
Rovinari	13,3	16,2	18,7	37,4	53,1	33,1	62,1	5,4	32,0	0,5
Schitu Golești	15,3	11,4	13,5	38,2	52,1	35,1	66,7	5,7	26,8	0,8

B. CHOIX DU MODE DE TRAVAIL

L'application de la méthode du fractionnement gravimetrique aux charbons jeunes, a nécessité d'établir l'influence des différents paramètres du mode de travail sur les résultats obtenus ; les conclusions de ces études sont données plus bas :

a) Granulosité du charbon.

L'importance de certaines especes granulometriques du charbon pour le fractionnement gravimetrique, est mise en évidence par les résultats donnés dans le tableau no. 2.

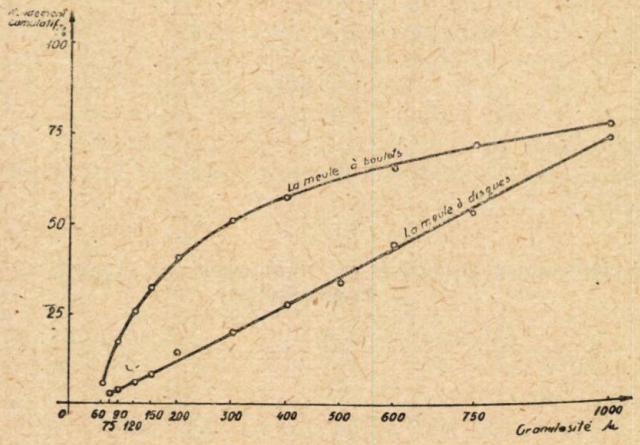
Tableau no. 2

L'influence de la granulosité du lignite de Rovinari sur le fractionnement gravimetrique de ce charbon

Les rendements du fractionement gravimetrique	Espèce granulometrique, mm					
	0—0,2	0,2—0,5	0,5—1,0	1,0—1,5	1,5—2	0—1,0
Flotté %	30—35	0	0	5	5	20—25
Déposé %	65—70	100	100	95	95	75—80

De la valeur des rendements on remarque que la granulosité optime est celle de 0—0,2 mm. Les résultats obtenus pour la granulosité 0—1,0 mm sont dus au fait que cette espèce granulometrique renferme la granulosité optime 0—0,2 mm.

A cause des différences de comportement constatées lors du fractionnement gravimetrique du charbon meullé par une meule à boulets ou par une meulle à disques, on a fait l'analyse granulometrique du charbon meullé par les deux genres de meule; les résultats obtenus sont présentés sur le diagramme no. 1.



DIAGRAME No. 1

Les courbes granulometriques du lignite de Rovinari, broyé par des meules à boulets et à disques

On remarque qu'en employant la meule à disques, on obtient une répartition plus uniforme des sortes granulometriques de l'échantillon de charbon meulé ce qui impose l'utilisation de ce type de meule.

b) Les liquides denses.

Les différentes densités du milieu dense de séparation ont été réalisés à l'aide de mélanges de C_6H_6 (d: 0,87) et $C\,Cl_4$ (d: 1,60). Au cas du

fractionnement gravimetrique — lorsque ces dissolvants sont utilisés de manière courante — ils ne modifient point les propriétés du charbon mais le rendent seulement soluble dans une proportion de 0.001—0,1% ; pour d'autres espèces de dissolvants, la littérature indique de très petites variations de comportement (2, 5, 6).

c) La durée de séparation de l'appareillage.

A l'encontre du fractionnement gravimetrique des houilles efectué dans les entonnoirs de séparation pendant approximativement 24 heures, pour assurer une durée minimum du contact entre le liquide dense et le charbon — on a utilisé au cours des déterminations faites la méthode de la centrifugation de la suspension, le temps de séparation se réduisant ainsi à seulement 10—15 minutes.

On a employé une ultra-centrifuge type „Cepa" ayant une vitesse du cylindre de séparation, de 20.000 rot/min.

d) La préparation des fractions pour l'analyse.

L'éloignement des dissolvants des fractions séparées a été fait en filtrant les échantillons sous vide et les séchant ensuite dans une étuve a une température de 55—60°C, pour éviter l'oxidation du charbon et implicitement pour assurer l'exactitude des données de leur analyse chimico-technique.

III. LES RÉSULTATS DU FRACTIONNEMENT GRAVIMETRIQUE

Après avoir établi — par la détermination orientative — l'intervalle densimetrique de séparation, lequel, au cas du charbon de Rovinari est compris entre 1,44 et 1,58, ainsi que la densité de 1,48 à laquelle, par centrifugation, on obtient des rendements approximativement égaux de la fraction lourde et légère, — on a ensuite effectué le fractionnement gravimetrique du charbon de Rovinari, par la centrifugation de la fraction légère à des densités plus petites que 1,48 et de la fraction lourde à des densités plus élevées, dans les limites de l'intervalle fixé. De cette manière il est possible d'éviter sensiblement les erreurs dues à l'impurité des fractions séparées, phénomène observé et cité dans la littérature (4, 6).

Les résultats du fractionnement gravimetrique du lignite de Rovinari, comprenant les caractéristiques chimico-techniques des fractions séparées, sont présentés dans le tableau no. 3.

De manière semblable, on a établi pour le charbon de Schitu-Goleşti, l'intervalle densimetrique de séparation lequel est compris entre 1,35—1,48, ainsi que la densité de 1,41 à partir de laquelle on a commencé la centrifugation de la fraction légère à des densités plus petites et de la fraction lourde à des densités plus élevés. Les résultats du fractionnement gravimetrique du lignite de Schitu-Goleşti sont données dans la tableau no. 4.

En partant des données ontenues — et présentées dans les tableaux no. 3 et 4, — on peut faire les observations suivantes :

a) Humidité.

Le pourcentage d'humidité varie dans les limites assez restreintes, 6,6—9,2% pour les fractions du charbon de Rovinari et 4,0—6,6% pour des fractions du charbons de Schitu-Goleşti, sans laisser voir une régularité concludente. L'humidité des fractions est plus petite que celle du

charbon initial, ce qui est du au séchage à 55—60°C, lorsqu'on obtient en même temps que l'éloignement des dissolvants, l'évaporation d'une partie de l'eau retenue dans les pores du charbon.

Tableau no. 3

Les caractéristiques chimico-techniques des fractions séparés du charbon de Rovinari

No. crt.	Densi é	Le rendement de la fraction rapporté a			Humi-dité W_a^a	Teneur en cendres		Matères volatiles		C^{mc}	H^{mc}
		à l'ech. d'anal.	au charb. anh.	à la masse comb.		A^a	A^{anh}	V^a	V^{mc}		
		%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
1	<1,44	9,55	9,68	10,66	6,8	9,7	10,4	42,3	50,6	63,5	5,4
2	1,44—1,46	8,52	8,54	9,01	7,7	13,2	14,3	42,7	54,0	62,4	5,3
3	1,46—1,47	14,45	14,67	15,63	6,6	12,5	13,4	43,5	53,8	61,5	5,9
4	1,47—1,48	16,00	15,78	16,54	9,2	13,5	14,9	40,3	52,1	58,6	5,4
5	1,48—1,49	9,55	9,50	9,76	8,5	15,1	16,5	40,1	52,5	62,5	5,7
6	1,49—1,50	7,73	7,71	7,76	8,4	16,5	18,0	40,6	54,1	61,7	5,5
7	1,50 - 1,54	18,46	18,35	17,72	8,5	19,7	21,5	38,0	52,9	61,8	5,5
8	1,54—1,58	5,42	5,41	4,94	8,4	23,4	25,5	37,8	55,4	62,8	5,4
9	>1,58	10,32	10,36	7,98	7,7	34,5	37,4	32,8	56,7	63,7	5,6
	Total %	100,00	100,00	100,00	—	—	—	—	—	—	—
Moy. pond. %		—	—	—	8,0	—	18,7	—	53,3	61,7	5,5
Charb. initial %		—	—	—	13,3	—	18,7	—	53,1	62,1	5,4

Tableau no. 4

Les caractéristique chimico-techniques des fractions séparées du charbon de Schitu-Goleşti

No. crt.	Densité	Le rendement de la fraction rapp.			Humi-dité	Teneur en cendres		Mat. volatiles	
		à l'éch. de l'anal.	au charb. anh.	a la masse comb.		A^a	A^{anh}	V^a	V^{mc}
		%	%	%	%	%	%	%	%
1	< 1,35	5,56	5,62	6,25	4,0	3,7	3,9	48,7	52,7
2	1,35—1,38	14,23	14,34	15,27	4,6	7,0	7,3	49,5	56,0
3	1,38—1,40	6,95	6,82	6,99	6,6	10,7	11,5	46,9	56,8
4	1,40—1,41	10,74	10,82	10,67	4,5	13,6	14,3	43,7	53,5
5	1,41—1,42	9,73	9,76	9,98	4,5	11,3	11,8	44,0	52,3
6	1,42—1,44	20,50	20,28	20,66	6,3	10,7	11,4	42,4	51,1
7	1,44—1,46	13,54	13,49	13,83	5,4	10,5	11,1	42,5	50,6
8	1,46—1,48	4,17	4,12	4,11	6,2	13,8	14,7	40,9	51,1
9	> 1,48	14,58	14,75	12,24	4,0	26,9	28,0	35,2	50,9
	Total %	100,00	100,00	100,00	—	—	—	—	—
Moyenne ponderée %		—	—	—	5,1	—	13,3	—	52,6
Charbon initial %		—	—	—	15,3	—	13,5	—	52,1

b) Les cendres.

La teneur en cendres croît généralement à partir des fractions séparées à de petites densités, vers celles séparées à des densités élevées, ce qui est dû à l'accumulation du stérile — lequel a un poids spécifique plus élevé que celui du charbon — dans les fractions lourdes.

Fair exception la fraction 1,44—1,46 du charbon de Rovinari, caracterisée par une teneur en cendres de 14,3%, comparée à la teneur en cendres de 13,4%, de la fraction 1,46—1,47 immediatement suivante. De même, les fractions du charbon de Schitu-Golești, séparées à des densités comprises entre 1,41—1,46, ont une teneur en cendres plus petite que les fractions séparées à des densités plus petites ou plus élevées. Ces exceptions — là peuvent être attribuées à la variation du poids spécifique de quelques componentes de la masse organique du charbon et de même au mode dont sont répandues les substances anorganiques dans le charbon. C'est ainsi qu'on a observé, en partant de la variation centinuelle de la couleur, une concentration des oxides de fer dans les cendres des fractions séparées à des densités de plus en plus élevées.

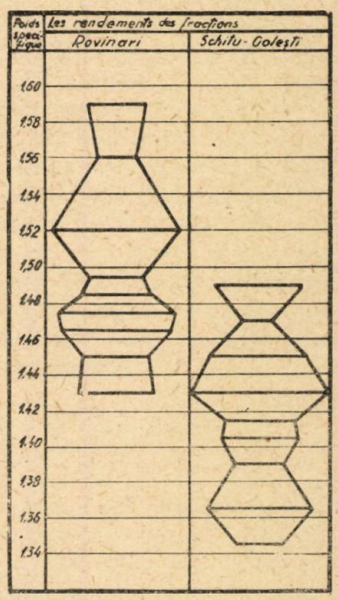


DIAGRAMME No. 2
La diagramme du fractionnement gravimétrique des lignites de Rovinari et de Schitu-Golești

c) Matières volatiles.

Le contenu des matières volatiles rapporté à la masse combustible, dépasse 50% pour toutes les fractions obtenues des charbons de Rovinari et de Schitu-Golești. La fraction la plus légère est caracterisée au cas des lignites étudiées, par un pourcentage de matières volatiles plus réduit qu'au cas des fractions immédiatement suivantes, ce qui dénote l'existence dans cette fraction, de componentes plus incarbonisées du charbon. Les analyses élementaire effectuées pour les fractions separées du charbon de Rovinari, montrent en effet, au cas de la fraction la plus légère — $< 1{,}44$— comme d'ailleurs aussi pour la plus lourde — $> 1{,}58$— le pourcentage le plus élevé de charbon. La contradiction apparente (que présente la fraction la plus lourde — $< 1{,}58$—séparée du lignite de Rovinari), entre l

contenu le plus élevé de charbon — 63,7 %— indiquant la fraction la plus incarbonisée, et le contenu le plus élevé de matières volatiles — 56,7 %— indiquant d'autre part sa formation de componentes les plus jeunes du charbon, — s'explique par l'augmentation du contenu réel de matières volatiles de la fraction $> 1{,}58$ avec les produits volatiles dues à la décomposition des substances anorganiques, cette fraction étant caractérisée par la plus élevée teneur en cendres —37,4 %.

d) Les rendements du fractionnement gravimétrique.

Les valeurs des rendements obtenues lors du fractionnement gravimétrique des charbons étudiés, constituent une caractéristique de ceux-ci, tel qui'il résulte de la diagrame du fractionnement gravimétrique no. 2. Pour cette diagramme on a utilisé les rendements rapportés à la masse combustible, étant plus réprésentatives pour la masse organique du charbon respectif.

En comparaison avec les résultats présentés dans la littérature pour les houilles (5, 6), les lignites étudiés sont fractionnés à des densités plus élevées, ce qui indiquerait un poids spécifique plus élevé des lignites en comparaison avec celui des houilles ; quelques données récentes de la littérature, montrent que le poids spécifique réel des charbons, diminue à partir de la tourbe jusqu'à la houille de 85—87 % C, représentant un minimum, et croît ensuite (7).

L'intervalle densimétrique de séparation des lignites étudiés est plus large que celui des houilles, ce qui reflète l'héterogénité constitutionelle plus accentuée des premiers.

De la diagramme du fractionnement gravimetrique des lignites des Rovinari et Schitu-Golești, on peut faciliment remarquer de même les différences de ces deux charbons étudiés. Le lignite de Rovinari qui se sépare à des densités plus élevées que celui de Schitu-Golești (1,44—1,58 par rapport à 1,35—1,48), il résulte que le poids spécifique du premier est supérieur à celui du second, et que du point de vue du stade d'incarbonisation, le charbon de Rovinari est plus jeune que celui de Schitu-Golești.

e) L'exactitude des déterminations.

Pour vérifier l'exactitude des déterminations, on a fait le bilan de l'humidité, de la teneur en cendres, des matières valotiles, du carbon et de l'hydrogène, en partant de la moyenne pondérée de ceux-ci, dans les fractions séparées. Ainsi qu'il résulte des données présentées, les moyennes pondérées calculées, concordent très bien avec les valeurs de l'analyse chimico-technique des charbons étudies, exception faite pour l'humidité, fait expliqué au cours de l'article au paragraphe respectif.

CONCLUSIONS

1. Parmi les propriétés physico-chimiques des lignites étudiés, leur poids spécifique diffère substantiellement, en indiquant deux stades différents d'incarbonisation. En faisant la comparaison avec les houilles, on peut obtenir une image de la classification de ces charbons.

2. Les fractions séparées ont une composition chimique plus homogène et assurément moins complexe que celle du charbon initial, ce qui facilite la caractérisation plus exacte des propriétés physico-chimique des charbons.

3. La classification des charbons étant fondée sur le contenu des acides humiques, indiquant pour les charbons de Rovinari des pourcentages plus élevés en comparaison à ceux de Schitu-Goleşti (58% par rapport à 29—33% avec du NaOH et respectivement 28,8 — 43,8% par rapport à 13—17% avec du Na_2CO_3) et indiquant le charbon de Rovinari comme étant nettement plus jeune, — est confirmé aussi à l'aide du fractionnement gravimetrique de ces charbons.

4. On arrive ainsi à une individualisation par les caractéristiques du fractionnement gravimétrique des charbons jeunes, ce qui, par d'autres méthodes ne fait voir que d'insignifiantes différentiations. Avec les résultats obtenus on peut faire une plus juste classification des charbons étudiés, ce qui permet à la fois leur utilisation plus judicieuse.

Le Laborateur de Chimie et Technologie
de Combustibles Solides
L'Institut Politechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *I. Blum, Al. Bădărău, I. Epure, B. Bercovici* — Studii şi Cercetări de Energetică (Etudes et Recherches d'Energetique) No. 3/1957 — Bucarest.
2. *N. G. Titov, A. V. Iarcova, L. A. Borozdina* — Analele Romîno-Sovietice, seria tehnică (Annales Roumaino-Sovietiques, serie technique), No. 14/1953 — Bucarest.
3. *I. Blum, Fr. Bolchi, G. Muscă* — Cercetarea posibilităţilor de brichetare fără liant a cărbunilor bruni-pămîntoşi (ligniţi). Lucrare comunicată la cel de al 3-lea Congres de Minerit din iunie 1957 la Freiberg R.D.G. (L'étude des possibilités de briquettage sans liant des charbons bruns — de terre (lignites).
4. *L. Horton* — Fuel, no. 3/1952, Londres.
5. *I. I. Ammosov* — Dokladî Akademii Nauk S.S.S.R. No. IV/1950, Moscou.
6. *I. Blum, I. Nistor* — Buletinul Inst. Politehnic Bucureşti. (Bulletin de l'Institut Politechnique de Bucarest), tome XVIII, 3—4/1956.
7. *D. W. van Krevelen, H. A. Chermin* — Fuel, no. 33/1954, Londres.
8. *I. Blum et collab.* — Studiul statistic al cărbunilor din R.P.R. Lucrare în curs de publicare, Bucureşti. (L'étude statistique des charbon de la R.P.R.) Étude en cours de publication, Bucarest.

ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЕ ФРАКЦИОНИРОВАНИЕ КАК МЕТОД ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОЛОДЫХ УГЛЕЙ

(Краткое содержание)

I. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИГНИТОВ МЕСТОРОЖДЕНИЙ РОВИНАРЬ И СКИТУ-ГОЛЕШТЬ

Исследуется возможность гравиметрического фракционирования молодых углей — в особенности лигнитов — в целях их охарактеризования.

Получается таким образом более тонкая картина по распределению и физико-химическим свойствам структурных компонентов углем, а также новые критерии для оценки индивидуального определения, в то время как по старому методу нельзя было определить лишь незнаэительные разницы.

THE GRAVIMETRIC FRACTIONATION AS A METHOD OF PHYSICOCHEMICAL CARACTERISATION OF YOUNG COALS

1. THE STUDY OF THE BROWN COALS OF ROVINARI AND SCHITU - GOLEȘTI

(Summary)

The possibility of application of the gravimetric fractionation on young coals — especially the brown coals — is studied, as a modern method of coal-caracterisation.

In this way we obtain a more exact image on the repartition and the physicochemical properties of coal-structural compounds, resulting in new criteria for appreciation and individualisation, wich by other methods show only insignifiant differentiations.

LE FRACTIONNEMENT GRAVIMETRIQUE UTILISÉ COMME MÉTHODE DE CARACTÉRISATION PHYSICO-CHIMIQUE DES CHARBONS JEUNES

1. L'ÉTUDE DES LIGNITES DE ROVINARI ET SCHITU-GOLEȘTI

(Résumé)

On étudie la posibilité d'appliquer le fractionnement gravimétrique des charbons jeunes — nottament les lignites — comme méthode moderne de caractérisation des charbons.

On obtient par cette voie une image plus exacte de la répartition et des propriétés physico-chimiques des componentes structurales des charbons, il en résulte des nouveaux criteriums d'appréciation et d'individualisation qui par d'autres méthodes ne se distinguent que par d'insignifiantes différentations.

GRAVIMETRISCHE FRAKTIONIERUNG ALS METHODE ZUR PHYSIKALISCH-CHEMISCHEN KENNZEICHNUNG DER JUNGEREN KOHLEN

1. UNTERSUCHUNG DER LIGNITE VON ROVINARI UND SCHITU-GOLEȘTI

(Zusammenfassung)

Es wird die Möglichkeit untersucht die gravimetrische Fraktionierung an jungeren Kohlenarten — insbesondere an Lignite — zum Zwecke ihrer Kennzeichnung, anzuwenden.

Man erhält auf diesem Wege ein genaures Bild über die Verteilung und physicalisch-chemischen Eigenschaften der Strukturkomponenten der Kohlen; es ergeben sich neue Kriterien für die Bewertung und Einzelerfassung, während bei Anwendung der früheren Methoden, sich nur geringfügige Unterschiede feststellen liessen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 2

662.81

DIE MÖGLICHKEIT DAS CHINESISCHE HOLZÖL UND LEINÖL DURCH RIZINUSÖL ZU ERSETZEN

IOSIF DRIMUȘ und EMIL SCHUSTER

Das entwässerte Rizinosöl (Ridesol), welches bei der Durchführung der im vorliegenden Studium beschriebenen Versuche verwendet worden ist, wurde nach einer von uns in einer früheren Arbeit (1) beschriebenen Methode hergestellt, sowohl hinsichtlich der Entwässerung als auch der Polymerisation.

Das verwendete Polyridesol hatte folgende Eigenschaften :

1. Jodzahl (nach Hanus)	110
2. Verseifungszahl	194
3. Viskosität mit Ford-Trichter (Methode nach Standardnormen für Gewebe) ($\varnothing$ = 4 mm, T = 20°C für 100 cm³ Oel)	39'50"
4. Viskosität mit NILK-Trichter (Methode nach Standardnormen für Gewebe) ($\varnothing$ = 7 mm, T = 20°C)	8'80"
5. Viskosität Hugo-Keyl	25 Hugo-Keyl Einheiten
6. Trockengeschwindgkeit mit Kobalt Oleat als Trockenmittel (Leinöl = 1)	0,44

Es wurden Versuche für die Herstellung von Elektroisolierlacken mit Polyridesol anstelle von Chinenischen Holzöl und Leinöl durchgeführt.

Als Zusatzstoffe zum Polyridesol wurden verwendet :

— Kolophonium
— Mittels Glyzerin esterifiziertes Kolophonium
— Albertol
— Leinöl.

Als Trockenmittel wurde Kobalt Oleat und als Verdünner White Spirit herangezogen.

Aus Tafel I ist die Zusammensetzung der Lacke ersichtlich.

Die Lacke wurden zum Imprägnieren von Kunstseidengewebe (Viskose) mit folgenden Eigenschaften verwendet :

1. Breite	900 mm
2. Stärke	0,15—0,16 mm
3. Dichte	(29×41)/cm²
4. Gewicht	80 g/m²
5. Zugfestigkeit (Durchschnittszahlen).	
I. Der Quere nach	5, 5 kg/1,5 cm
II. Der Länge nach	7, 7 kg/1,5 cm
III. Diagonal	8,55 kg/1,5 cm

Analytische Methoden

Die Stärke wurde mit den Schopper-Mikrometer gemessen.

Die Dichte wird folgendermassen gemessen:

Auf das Gewebe setzt man ein Pertinax-Rad mit einer Oeffnung von 1 cm^2.

Die begrenzte Oberfläche wird mit einer Lupe betrachtet und es werden die Fäden aus der Kette und aus dem Einschlag gezählt.

Die Zugfestigkeit wird mit den Schopper-Apparat nach der Methode für Standardgewebe bestimmt.

Durchgeführte Versuche

Die Gewebe wurden mit den Lacken I—IX in 3 Etappen imprägniert, wobei das Trocknen nach jeder Imprägnierung erfolgte.

1. Das Gewebe wird in einen Lackbad imprägniert und durch 3 enganliegende Glasstäbe durchgezogen um das Oel abzustreifen. Auf das Imprägnieren folgt das Trocknen.

2. Nach dem dritten Trocknen wurden die imprägnierten Gewebe mit Talkpuder bestreut, sowie dies auch im Betrieb bei der Herstellung von geölten Standardgeweben (Lackgewebe) geschieht.

Die imprägnierten Gewebe sind durchsichtig, gelbglänzend und elastisch.

Die imprägnierten Gewebe wurden Analysen unterzogen, deren Ergebnisse aus Tafel II ersichtlich sind.

Ausserdem wurden noch folgende Eigenschaften bestimmt:

1. Viskosität mit NILK-Trichter (nach der Methode für Standardgewebe)

($\varnothing$ = 7 mm, T = 20°C)

a) Lack für Standardgewebe (mit Chinesischen Holzöl und Leinöl) 30"

b) Lacke I—IX durchschnittlich 26"—31"

Die üblichen Normen sehen für mit Chinesischem Holzöl und Leinöl imprägnierte Gewebe folgende Höchsttrockendauergrenzen vor:

Nach der ersten Imprägnierung	24 Std.
Nach der zweiten Imprägnierung	36 Std.
Nach der dritten Imprägnierung	36 Std.

Im Falle des Lackes Nr. VI vermindern sich diese Zahlen auf 1/3 und betragen 9, 13 und 13 Stunden.

Analytische Methoden

1. Bestimmung der thermischen Beständigkeit an der Luft (in Transformatorenöl erfolgt die Bestimmung in gleicher Weise). Das imprägnierte Gewebe (das Fertigmaterial, nach dreifachem Imprägnieren und Trocknen) wird um einen Dorn gewickelt und während 2 Stunden bei einer Temperatur von 105°C gehalten. Daraufhin wird festgestellt, ob es sich vom Dorn leicht loslöst oder anklebt.

2. Bestimmung der Wasserabsorption. Ein ölimprägniertes rundes Stückchen Gewebe wird abgewogen un in einem mit destilliertem Wasser angefüllten Glas 24 Stunden lang stehengelassen.

Das feuchte Gewebe wird herausgenommen, abgewischt und gewogen. Man errechnet den Prozentsatz der aufgenommenen Wassermenge.

3. *Elektrische Versuche*

Die Durchbruchspannungen des elektrischen Feldes wurden laut GOST 1410—42 und den Normen für Standardgewebe bestimmt.

4. *Mechanische Versuche*

Die Zugfestigkeiten wurden mit den Schopper-Apparat laut den in den für Standardgewebe vorgesehenen Bedingungen bestimmt.

5. *Bestimmung der Verlängerung*

Un die Verängerung unter einen gewissen Gewicht zu bestimmen wird von jeder Fabrikationsserie je ein 10 mm breites und 100 mm langes Stück diagonal abgeschnitten, mit einem Winkel von 45° zur Richtung der Basis. Die Kontrolle der Verlängerung erfolgt indem an das untere Ende des Stückes ein Gewicht von 2 kg 30 Sekunden lang angebracht wird. Die Temperatur muss auf 20°C stehen.

6. *Lackauftrag*

Ein Stück Gewebe (Viskose-Seide) wird gewogen, mit Lack imprägniert und getrocknet. Nach jeder Imprägnierung wird gewogen. Man berechnet den Lackprozentsatz.

Ausserdem wurden Vergleichsversuche durchgeführt zwischen den mit Lack Nr. VI imprägnierten Geweben und solchen mit Chinesischem Holzöl und Leinöl imprägnierten (Standardgewebe).

Die Ergebnisse sind in Tafel III enthalten.

Tafel III

	Gewebe mit Chin. Holzöl und Leinöl	Gewebe mit Rizinusöl
1. Termische Beständigkeit in Transformatorenöl bei 105°C 18 Std.	Das Gewebe löst sich, klebt jedoch an. Elastische Eigenschaften verschwinden. Alterung.	Löst sich bei Wärme ohne anzukleben. Keine Alterung. Elastische Eigenschaften beibehalten.
2. Wirkung des ölimprägnierten Gewebes auf das Transformatorenöl nach 72-stündigen Sieden bei 105°C. Die Normen für Standardgewebe sehen höchstens 0,3 mg KOH/1 g Oel	0,58	0,48
3. Thermische Alterung an der Luft bei 105°C min. 72 Stunden	Löst sich bei der Wärme, klebt an. Verliert die elastischen Eigenschaften. Wird hart. Alterung.	Löst sich bei der Wärme ohne anzukleben. Verliert nicht die elastischen Eigenschaften. Keine Alternng.

4. Die mit Lack Nr. VI imprägnierten Gewebe sowie diejeningen mit Chinesischem Holzöl und Leinöl wurden verschiedenen Behandlungen unterzogen, un die Veränderung der Durchbruchsspannung des elektrischen Feldes zu beobachten (Tafel IV).

Art der Behandlung	Durchbruchs-spannung kV/mm	
	Lack VI	Chinesisches Holzöl und Leinöl
Unbehandelt	38,4	29,7
Biegen ohne Alterung	32,1	10
Alterung mit nachfolgendem Biegen . . .	32,1	14,2
Verlängerung nach der Diagonale . . .	17,4	17,4

Versuche auf dem Elektromotor

Mit einem mit Pliridesol imprägnierten Gewebe wurde ein Elektromotor gespult, der auf der Prüfbank auf dielektrische Festigkeit, sowohl zwischen den Phasen als auch an der Masse lt STAS 1893-50 geprüft wurde. Der Motor entsprach den gestellten Bedingungen.

Der Elektromotor wurde in einer Fabrik in Betrieb gesetzt und nach 3 Monaten (während welcher Zeit er dauernd gearbeitet hat) wurde er erneut auf Ueberbelastung geprüft im Vergleich zu einem anderen Motor gleicher Kraft, jedoch mit einem mit Chinesischem Holzöl und Leinöl imprägnierten Standardgewebe gespulten. Die Probe ergab, dass der erste Elektromotor besser ist, da er normal arbeitete, ohne Erhitzen der Spulen, obwohl er 4 Stunden überbelastet wurde.

Jeder der beiden obigen Motore wurde an eine Drehbank geschaltet.

Schlussfolgerungen

A. Es wird empfohlen, das Chinesische Holzöl und das Leinöl aus den elektroisolierenden Lacken für imprägnierte Gewebe durch Polirideso1 zu ersetzen, da es folgende Vorteile bietet:

1. Das chinesische Holzöl muss eingeführt werden und ist daher teuer, während das Rizinusöl ein einheimisches Produkt ist und verhältnismässig billig.

2. Die Poliridesolschicht ist elastischer als diejenige aus Chinesischem Holzöl und Leinöl und erleichtert daher das Spulen.

3. Die Poliridesolschicht hat eine höhere Durchbruschsspanung des elektrischen Feldes als diejenige mit Chinesischem Holzöl und Leinöl.

4. Die Feuchtigkeitsbeständigkeit der mit Rizinusöl imprägnierten Gewebe ist höher als derjenigen mit Chinesischem Holzöl und Leinöl.

5. Die Schicht mit Chinesischem Holzöl oder Leinöl altert sowohl an der Luft als auch im Transformatorenöl, während die Polridesolschicht eine nur ganz unbedeutende Alterung aufweist, wobei sie ihre Elastizität auch nach der Alterungsprobe beibehält.

6. Die mit Chinesischem Holzöl und Leinöl imprägnierten Gewebe erhöhen viel mehr den Säuregehalt des Transformatorenöles als mit Poliridesol.

Diese Tatsachen bieten — unseres Erachtens — die Mőglichkeit, Elektromotoren und statische Transformatoren mit längerer Lebensdauer herzustellen.

7. Der mit Poliridesok und Kobalt Oleat als Trockenmittel hergestellte Lack trochnet viel rascher als der mit Chinesischem Holzől und Leinöl, was eine Erhöhung der Arbeitsproduktivität und der Produktivität der Herstellungseinrichtungen für imprägnierte Gewebe gewährleistet.

B. Es konnte festgestellt werden, dass die Durchbruchsspannung des elektrischen Feldes gleichzeitig mit dem Anwachsen des Prozentsatzes an Pflanzenölen, in erster Reihe an Poliridesol und in zweiter Reihe an Leinől steigt und bei Zugabe von esterifiziertem Kolophonium, natürlichem Kolophonium oder Albertol sinkt.

Der chemische Teil dieser arbeit wurde im Laboratorium für Organische Technologie der Technischen Hochschule Bukarest durchgeführt.

Die elektrischen Messungen führten Prof. C. Popescu und Prof. Al. Popescu im Laboratorium für elektrische Messungen und Betriebsversuche der Technischen Hochschule Bukarest aus.

October 1955

Laboratorium für organische Tehnologie
Polytechnisches Institut Bukarest

LITERATUR

1 *Drimuș I., Ionescu I. und Stoica R.:* Das entwässerte Rizinusől. Studii și cercetări de chimie (al Acad. R.P.R.), Bd. III, Nr. 3—4, 1955.
2 *B. M. Tareev:* Elektrotechnische Materialien. Aus dem Russischen. Editura tehnică 1951 Bukarest.
3 *N. P. Bogorodțchi, V. V. Pasîncov, B. M. Tareev:* Materialien für den elektrotechnischen Betrieb. Aus dem Russischen. Editura tehnică 1952 Bukarest.

ВОЗМОЖНОСТЬ ЗАМЕНА ТУНГОВОГО МАСЛА И ЛЙНОВОГО МАСЛА КАСТОРОВОМ МАСЛОМ

(Краткое содержание)

Были экспериментиров ны девять рецептов и в закличение нашлись что наилу ишие резултать в связи с проницаемостю элехтрического поля и твердостю показали масла на осно е касторового масла.

THE POSSIBILITY OF REPLACING TUNG AND LIN OIL BY RICIN OIL

(Summary)

Nine recipes (prescription) have been tried, and the best resultes, concerning the piercing in (the) electrical field and durability have, been given by varniches with a ricin oil basis.

LA POSSIBILITÉ DU REMPLACEMENT DE L'HUILE DE TUNG ET DE LIN AVEC DE L'HUILE DE RICIN

(Résumé)

Neuf recettes ont été expérimentées et on a conclus que les meilleurs résultats, tel que parcement du champ électrique et la durabilité ont été présenté par le vernis ayant comme base l'huile de ricin.

DIE MÖGLICHKEIT DAS CHINESISCHE HOLZÖL UND LEINÖL DURCH DAS RIZINUSÖL ZU ERSETZEN

(Zusammenfassung)

Man versuchte neun Vorschriften, und folgerte daraus das die besten Ergebnisse-der Durchstich im elektrischen Feld und die Haltberkeit-mit dem mit Rizinusöl erzeugten Firniss, erzielt wurden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

662.81

DAS PROBLEM DER SEPARIERUNG EINIGER NEUTRALEN VERBINDUNGEN BEI DER FABRIKATION DER FETTSÄUREN DURCH DIE OXYDATION DER PARAFFINE

IOSIF DRIMUȘ, MARCEL KLANG und FANY SCHEUERMANN

Paraffin wird bei 113 + 3°C mit Luft, in Gegenwart von 0,2% $KMnO_4$, bis zu einer Säurezahl von 70 mg KOH oxydiert. Das oxydierte Produkt wird mit Wasser gewaschen und mit NaOH verseift. Es wird eine Emulsion erhalten, in welcher der fette Anteil aus Paraffin, welches nicht in Reaktion getreten ist, der wässerige Anteil aus einer Seifenlösung besteht, die ausser mycelar gelösten nicht reagiertem Paraffin auch gewisse neutrale Oxydationsprodukte enthält (hauptsächlich Alkohole).

Durch Trennung der Emulsion wird die fette Phase erhalten, technisch als „Unverseifbares I" (U.V.I.) genannt. Die wässerige Phase wird unter bestimmten Bedingungen einer Wasserdampfdestillation unterworfen. Dadurch wird die mycelare Lösung getrennt, und der restliche Teil des Unverseifbaren erhalten (Unverseifbares II — U.V. II).

Die chemische Zusammensetzung des U.V. I und U.V. II wurde in unseren vorherigen Mitteilungen behandelt (1,2).

In unserer jetzigen Mitteilung wird die Separierung des Unverseifbaren durch Trennung der während der Verseifung des oxydierten Paraffins entstandenen Emulsion behandelt.

Die Trennung einer Emulsion, die eine grosse Quantität Emulgator bester Qualität enthält, ist ein schwieriges technisches Problem, zu dessen Lösung verschiedene Methoden vorgeschlagen wurden.

Dr Prückner (D.D.R.) (3) erhält durch Verseifung des bei 95—100°C oxydierten Paraffins eine Emulsion, die, durch Stehenlasse etwa 1/3 des enthaltenen Paraffins spontan absondert. Der Rest der Emulsion wird in einen Druckkessel geleitet, in dem, unter 25 Atm Druck bei 180°C noch cca 1/3 des Unverseifbaren erhalten wird (das restliche Unverseifbare wird nachher durch Wasserdampfdestillation getrennt (6).

I. M. Tovbin 4() führt die Emulsion kontinuierlich in einen Kessel, bei 20 Atm Druck und entsprechender Temperatur ein.

Nach einem ungefähr 2 — stündigen Absetzen der Emulsion wird das U.V. I durch den oberen Teil des Gefässes entfernt. Dieses U.V. I beträgt 70% des nichtreagierten Paraffins.

B. S. Alaev (5) empfiehlt ebenfalls Trennung unter Druck.

Die von uns angestellten Versuche hatten als Ziel:

1. Vereinfachung der Apparatur durch Ausschaltung von Druck (T 100°).

2. Erhaltung einer möglichst grossen Quantität von U.V. I statt U.V. II, zwecks Vergrösserung der Produktivität des Ofens in dem die Wasserdampfdestillation des U.V. II durchgeführt, wird.

*
* *

Ueber die als Ergebnis der Verseifung gebildeten Emulsion ist folgendes zu bemerken:

Das Medium in dem die Emulsion entsteht, enthält: 1. Paraffin, 2. Wasser, 3. Seife und ihre Entstehung ist im grössten Masse der emulgierenden Wirkung der Seife zuzuschreiben.

Die Art dieser Emulsion wird von folgenden Umständen bestimmt:

Die Moleküle des emulgierenden Stoffes haben die Tendenz, sich genau auf der runden Oberfläche zwischen den Partikeln und dem dispergierenden Medium zu schmiegen, d.h. auf der Zwischenfläche Wasser/Oel, von denen das erste die externe, und das zweite die interne Phase bildet.

Die Natriumseifen bilden eine „Oel in Wasser" emulsion: die hydrophile Gruppe bindet ein gewisses Quantum Wasser an sich und wird dadurch einen grösseren Raum als die nichtpolare Gruppe einnehmen.

Die feste Anpassung der Emulgator-Moleküle an der Zwischenfläche Oel/Wasser wird nur dann möglich sein, wenn der grössere Teil der Moleküle (der hydrophile Teil) die externe Phase bilden wird (in unserem Falle das Wasser).

Auf diese Weise entsteht eine Emulsion von dem Typ Oel in Wasser, in der das Oel die interne, und das Wasser die externe Phase bildet.

Solche Art Emulsionen entstehen unter Mitwirkung von Alkali-Metallseifen, sowie Natrium, Kalium, Lithiumseifen u.s.w. und werden auch während der Verseifung des orydierten Paraffins mittels Alkalilauge gebildet.

Die Stabilität der Emulsionen kann unter gewissen Bedingungen verringert werden, die sich der emulgierenden Wirkung der Seife entgegensetzen.

Von grosster Bedeutung ist, zum selben Zweck die Temperatur zu erhohen, um die Bewegungsgeschwindigkeit der Moleküle und deren Translationsenergie zu vergrössern. Dadurch wird auch die Viskosität der Lösung vermindert: die Tropfen fallen schneller unter dem Einfluss der Schwerkraft und die Möglichkeit des Zusammentreffens mehrerer Tropfen derselben Art wird vergrössert. Im Zusammenhang mit einer Erhöhung der Temperatur kann auch die Verwendung eines höheren Druckes in Betracht gezogen werden, welche die Möglichkeit gibt, die Lösung weit über den Kochpunkt der Bestandteile zu erwärmen.

Uebrigens ist die Viskosität der Flüssigkeit auch von der Konzentration abhängig und dies ergibt noch eine Möglichkeit, die Trennung der Emulsion zu bewirken.

Die obgenannten Betrachtungen sind auch für die Emulsion gültig, welche sich während der Verseifung des oxydierten Paraffins bildet. Nach Beendung der Verseifung wird die Reaktionsmasse stehengelassen.

Mit der Zeit und unter dem Einfluss der verschiedenen Dichte der Bestandteile (Seife mit D = 1 und U.V. mit D = 0,7—0,8) entsteht die

Tendenz zur Trennung der Emulsion, unter Bildung von zwei verschiedenen Flüssigkeitsschichten, die obere aus Unverseifbarem und die untere aus Seifenlösung bestehend.

Ein Teil des unverseifbaren Stoffes bleibt aber mycellartig in der wässerigen Seifenlösung eingeschlossen (U.V. II).

Es ist also zu ersehen, dass die Verseifung nicht eine vollständige Trennung des Unverseifbaren zur Folge haben kann. Es wird aber ein Glechgewicht erreicht, das in zwei verschiedenen Richtungen verschoben werden kann, wenn man gewisse Bedingungen verändert: Temperatur, Druck, Konzentration u.s.w.

Unsere im Laboratorium, Versuchsstation und halbindustrieller Anlage ausgeführten Versuche haben sich als Ziel gesetzt, diese bestimmten Bedingungen zur Trennung der bei der Verseifung des oxydierten Paraffins gebildeten Emulsion zu ermitteln.

Zu diesem Zweck wurde der Einfluss folgender Faktoren studiert.

1. Einfluss der Konzentration und des pH Wertes,
2. Einfluss des pH Wertes,
3. Einfluss des Verseifungsgrades,
4. Einfluss der Temperatur,
5. Einfluss des Druckes,
6. Einfluss der Reaktionsdauer,
7. Einfluss der in Suspension Körperteilchen,
8. Einfluss der Vorwaschung des oxydierten Paraffins.

1. Einfluss der Konzentration und des pH Wertes

Es wurden Versuche gemacht auf Seifenlösungen von verschiedenen Konzentrationen, bestehend aus von 10—70% oxydiertem verseiften Paraffin und 90—30% Wasser. Im Gegensatz zu den bekannten Regeln

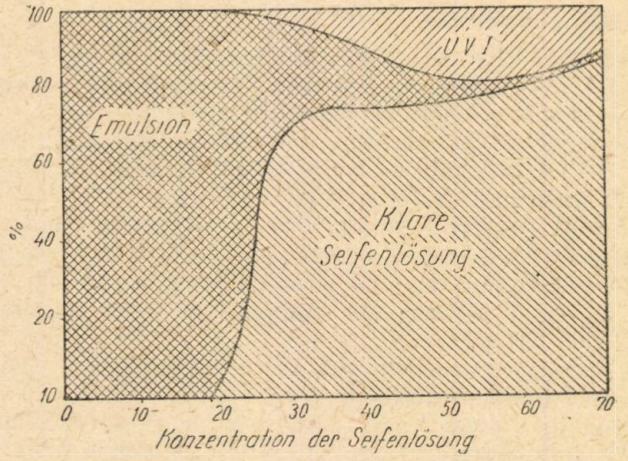


Abb. 1.

über die Trennung der Emulsionen, findet die beste Trennung nicht bei grossen Verdünnungen statt. Bei einer Konzentration von 10% O.P. erhält man eine überaus stabile Emulsion, die auch gegen höhere Temperatur

und Druck nach längerer Zeit widerstandsfähig ist. Mit zunehmender Konzentration der Seifenlösung wird die Trennung der Emulsion immer leichter, hingegen aber findet bei grösseren Konzentrationen eine Wiederauflösung des U.V. I in der Seifenlösung statt (Tafel 1 und Bild 1).

Die Versuche verwendeten ein nicht purifiziertes, oxydiertes Paraffin.

Konzentr. der Seifenlösung %	U. V. I g%	Emulsion g%	Klare Seifenlösung g%	g% U.V.I./ oxydiertes Paraffin
10	Emulsion			
20	Emulsion			
30	5	22	73	15,3
40	12	12	76	30
50	19,7	5	75	39,4
65	16	—	84	24,6

2. *Einfluss des Verseifungsgrades*

Das oxydierte Parafin enthält kleine Quantitäten Estere, die schwer verseifbar sind. Um die Rolle dieser Estere in der Stabilisierung der Emulsionen festzustellen, wurden Trennungsversuche angestellt mit Proben, die 2, 4 und 6 Studen verseift wurden. Alle Proben, die mit einer Seifenkonzentration von 50% vorgenommen wurden ergaben identische Resultate. Dies beweist, dass die Anwesenheit oder Abwesenheit der Estere keinen Einfluss auf die Stabilität der Emulsionen haben.

Die Verseifung muss also so lange fortgesetzt werden, das man eine möglichst kleine Quantität an Estern in dem U.V. zurücklässt, damit die Ausbeute an Fettsäuren verbessert wird.

4. *Einfluss der Temperatur*

Es wurd eine 1500 mm hohe Stahlkolonne verwendet, mit einer Kapazität von 30 l Flüssigkeit, in der mun Temperaturen bis zu 145°C erzielen konnte . Es wurden folgende Vensuche ausgeführt.

a) Aus einer Seifenlösung wurde durch einfaches Stehenlassen, bei 100°C, das U.V. I entfernt. Es bleibt eine durchsichtige Lösung zurück, die das mycellar gelöste U.V. II enthält.

Nach 5—10 Studen Erhitzen der Lösungen mit einer Konzentration von 30% und 50% auf 145°C wurde kein U.V. I mehr separiert.

Deshalb empfehlen wir als Arbeitstemperaturen die Temperatur von bis 100°C, da die Erhöhung der Temperatur keine weitere Trennung von U.V. I mit sich bringt.

b) Die Versuche wurden auf einer Seifenlösung vorgenommen, die das U.V. I in Emulsion enthält.

Es wurde in diesem Falle festgestellt, dass die Erhöhung der Temperatur die Trennungsgeschwindigkeit erheblich vergrössert, ohne aber das Quantum von separiertem U.V. I zu beeinflussen.

c) Es wurde ebenfalls der Einfluss des Abkühlens und Wiedererwärmens der Seifenlösung studiert.

Eine 50%-ige Seifenlösung wurde bei 90°C stehengelassen. Nach Entfernung des U.V. I bleibt eine transparente (durchsichtige) Seifen-

lösung zurück. Ein Teil dieser Lösung wurde weitere 72 Studen bei 90°C stehengelassen. Es wurde noch 1% U.V. I abgetrennt. Säurezahl der aus der Seife erhaltenen Fettsäuren = 124,1 mg KOH.

Ein anderer Teil der Lösung wurde in den darauffolgenden 72 Stuuden 15 mal wiederholt auf 90°C erwärmt und bis auf 20°C abgekühlt (ohne zu schütteln). Es wurden in dieser Weise weitere 4% U.V. I abgetrennt. Säurezahl der entsprechenden Fettsäuren = 132,4 mg KOH.

Daraus kann man folgende Schlussfolgerung ziehen: Durch Herabsetzung der Temperatur wird die mycellare Löslichkeit des Paraffins in der Seifenlösung vermindert, und die abgetrennten Paraffinteilchen die unterdessen an die Oberfläche der Lösung aufgestiegen sind, ergeben die weiteeren 4% U.V. I Zu bemerken ist, dass man die Lösung nicht schütteln darf.

5. *Einfluss des Druckes*

Die Versuche wurden in der obenbeschriebenen Kolonne (Punkt 4) durchgeführt. Es wurde ein verseiftes oxydiertes Paraffin (Konzentration der Seifenlösung = 40%) verwendet. Ein Druck von 25 Atm wurde mittels einer Kolbenpumpe erzielt.

Separierung des U.V. I in Abhängigkeit des Druckes Tafel 2

Lfd. Nr.	Temp. °C	Atü	Absetz'a-uer Std.	U. V. I. %	Bemerkungen
1	100	1	48	30,0	Der Rest befiedet sich in der Emulsion
2	145	4	6	41,2	Zu vernachlässigende Emulsion
3	145	25	6	41,1	Zu vernachlässigende Emulsion

Aus Tafel 2 ist ersichtlich, dass die Steigerung des Druckes über 20 Atm keine weitere Trennung des U.V. I hervorruft, hingegen ist die Trennungsgeschwindigkeit der Emulsion um vieles gestiegen, was aus Tafel 3 zu ersehen ist. Zum Beispiel, wenn mit einer 40%-igen Seifenlösung gearbeitet wird, die man

a) 10 Stunden bei 135°C und 4 Atü
b) 10 Stunden bei 135°C und 25 Atü

stehen lässt, so erhält man im zweiten Falle eine weit bessere Trennung der Emulsion.

Tafel 3

Er Einfluss des Druckes auf die Geschwindigkeit der Emulsionstrennung

	a	b
Konzentration	40	40
Temperafur	145	145
Atü	4	25
Absetzdauer in Stunden	10	10
Abgetrenntes U. V. I. %	29,6	39,1
Abgetrennte Emulsion %	15,0	7,5
Säurczahl der Säuren der Seifen	129,9	129,0
Konzentration der Emulsion (Fettsäauren und Paraffine) %	74	67
Säurezahl der Emulsionssäuren	14,7	6,0

Es wurden weitere Versuche zur Bestätigung der obgenannten Arbeitsbedingungen durchgeführt, und zwar:

Eine Emulsion bestehend aus verseiften oxydiertem Paraffin wurde in mehrere Portionen geteilt und jede Portion unter verschiedenen Bedingungen behandelt. Man erhielt:

a) Bei 90°C und Atmosphärendruck eine Trennung von 26,2% U.V. I (der Rest bleibt in der Emulsion).

b) Bei 145°C und entsprechendem Druck von 4 atü wurden 34,3% U.V. I getrennt (der Rest bleibt in der Emulsion).

c) Bei 145°C und 25 atü wurden 43,8% U.V. I getrennt (der Rest bleibt in der Emulsion).

Bei den vielen Versuchen, die man zur Trennung der Emulsionen in verschiedenen Konditionen durchgeführt hat (Konzentration, pH Wert, Temperatur, Druck ...) konnte man feststellen, dass zwischen der Schicht Unverseifbares und der Schicht Seifenlösung immer eine kleine Schicht Emulsion von aussergewöhnlicher Stabilität vorzufinden ist.

Im Nachfolgenden wurden die Versuche zur Trennung dieser Emulsian angegeben, deren Zweck einer womöglich gänzlichen Separierung des Unverseifbaren I dient.

6. *Einfluss der Reaktionsdauer*

Nach längerem Stehenlassen bei 80—90°C weist die Emulsion eine gewisse Tendenz zur Trennung auf. Dies geschieht aber mit solch kleiner Geschwindigkeit, dass diese Art Trennung keinen praktischtechnischen Wert hat.

Die Tnalyse einer äusserst beständigen Emulsion, die in unserer halbindustriellen Anlage erhalten wurde, ergab folgende Resultate, die beweisen, dass diese Emulsion eine ganz andere Zusammensetzung hat als die übliche Emulsion, die man bei der Verseifung des oxydierten Paraffins vorfindet.

Durch Behandlung mit Mineralsäuren (HCl oder H_2SO_4) wird die Emulsion getrennt und 74,7% fette Phase erhalten, bestehend aus Fettsäuren + Unverseifbares (Parafin, Fettalkohole, Esters, u.s.w.).

Die fette Phase ergibt:

Säurezahl	33, mg KOH
Verseifungszahl	42,4 mg KOH
Azetylzahl	16,5 mg KOH

und enthält 77,5% Unverseifbares und 22,5% Fettsäuren.

Die Analyse mehrerer sehr beständiger Emulsionen, die in der halbindestriellen Anlage erhalten wurden weist folgende Zusammensetzung (im Durchschnitt) auf:

Wasser	10—15%
Unverseifbares	50—60%
Fettsäuren	20—30%
Asche	3,5— 4%

In der Literatur sind keine Angaben zu finden, ob eine solche beständige Emulsion auch bei der Verarbeitung anderer Sorten Paraffin gebildet wird.

Die Bildung der beestandigen Emulsion könnte durch Mitwirkung folgender Faktoren erklärt werden:

a) Anwesenheit von Natrium— und Kaliseifen (K aus dem Katalysator) die in der Wasserphase löslich sind.

b) Anwesenheit von Manganseifen (Mn aus dem Katalysator), die in der Fettphase löslich sind.

c) Anwesenheit von Calciumseifen (Ca aus dem Wasser), die in der Fettphase löslich sind.

d) Anwesenheit von Fettalkoholen.

e) Anwesenheit von kleinen, fein verteilten Körperteilchen, die aus der Oxydationsluft stammen, aus dem Katalysator (Manganoxyde) oder aus Polymerisationsvorgängen, die in der Reaktionsmasse stattfinden.

Es war anzunehmen, dass man durch Entfernung dieser Faktoren eine raschere Trennung der Emulsion, bezw. eine bessere Ausbeute an U.V. I erhalten können wird.

7. *Entfernung der in Suspension befindlichen Gewichtsteilchen durch Dekantieren und Filtrieren*

Durch mehrstündiges Dekantieren bei 80—90° des oxydierten Paraffins wird der grösste Teil der in Suspension befindlichen Gewichtsteilchen abgesetzt.

Eine geringe Suspension verbleibt trotzdem in der Flüssigkeit, die eine zu grosse Zeit in Anspruch nehmen würden, um gänzlich abzusetzen. Deshalb empfehlen auch einige Autoren, das oxydierte Paraffin vor der Verseifung durch eine Filterpresse zu leiten.

Unsere Versuche zur Bestimmung der Bedeutung der Dekantierung zur Trennung der Emulsion wurden folgendermassen ausgeführt:

Drei Proben oxydiertes Paraffin (von 3 verschiedenen Oxydationen stammend) wurden 6 Stunden lang bei 90°C dekantiert.

Die drei Proben wurden separat verseift und die erhaltenen Emulsionen in gradierte Gefässe eingeführt, in welchen sie 6 Stunden stehengelassen wurden. Nach Verlauf dieser Zeit wurde die Höhe der Seifen —, Emulsion — und Unverseifbaren — Lösung abgelesen. Die Resultate sind in Abb. 2 und 3 angegeben.

Die steigende Variation der die Seifenlösung bezeichnenden Kurve ist direkt von der Steigung der das Unverseifbare bezeichnenden Kurve abhängig. Zwischen diesen zwei befindet sich das Existenzgebiet der Emulsion. Das almähliche Verschwinden dieses Gebietes mit der Zeit, ist ein Mass für die Trennungsgeschwindigkeit der Probe.

Nach Ablauf von 6 Stunden wurde für jede Probe das Gewicht an separiertem U.V. I und an zurückbleibender Emulsion bestimmt. Die Resultate sind in Tafeln 4, 5, 6 und in Abb. 2, 3, 4 angegeben.

Durch Vergleich der Versuche I, II, III kann bemerkt werden, dass das Resultat verschiedener Oxydationen einigermassen verschieden ist. Trotz dieser kleinen Unterschiede kann man gewisse Schlussfolgerungen ziehen:

Tafeln 4, 5, 6 und Abb. 2, 3, 4 beweisen, dass das Dekantieren einen besseren Einfluss hat als das Filtern.

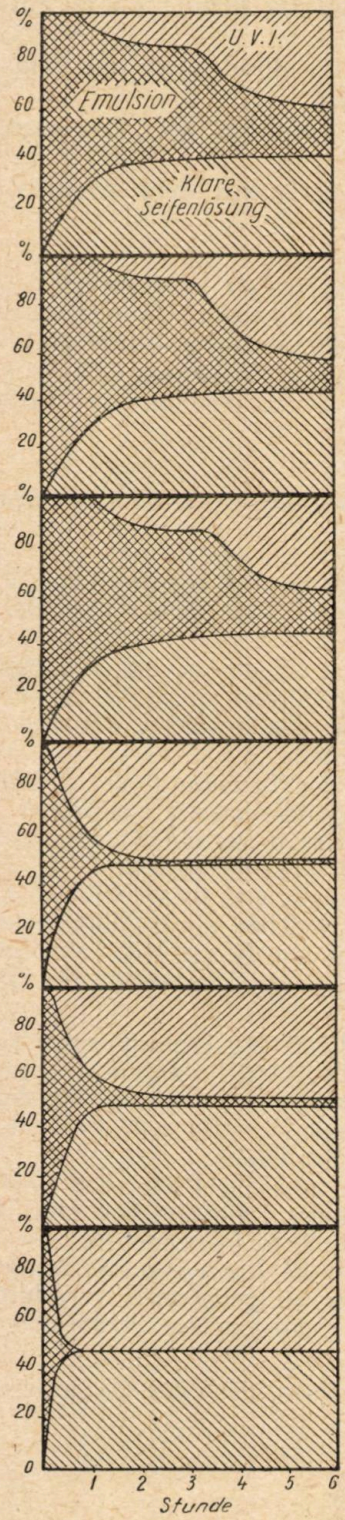


Abb. 2.

Abb. 3.

Abb. 4.

Abb. 5.

Abb. 6.

Abb. 7.

Tafel 4

A. Oxydiertes Paraffin, nicht abgesetzt, nicht gewaschen

Versuch	I	II	III
U. V. I. %	40,0	47,0	35,4
Emulsion %	18,0	10,6	26,0

Tafel 5

B. Oxydiertes Paraffin, abgesetzt, nicht gewaschen

Verscuh	I	II	III
U. V. I. %	42,6	44,5	43,0
Emulsion %	9	7	10

Tafel 6

C. Oxydiertes Paraffin, filtriert, nicht gewaschen

Versuch	I	II	III
U. V. I. %	32,5	42,5	32,5
Emulsion %	17,5	15,2	21,0

8. *Entfernung der Faktoren, welche zur Schaffung der Emulsion beitragen, durch Waschen mit Wasser.*

Das Waschen spielt eine vielseitige Rolle.

Durch ein gut durchgeführtes Waschen (im Labor durch mehrmaliges Wiederholen der Operation, in industrieller Anlage durch Waschen in Gegenstrom in Extraktionskolonnen) wird durch Auflösen oder mechanische Aktion ein Grossteil der zur Emulsion mitwirkenden Faktoren entfernt, niedrige Fettsäuren, niedrige Oxydsäuren, Alkali und Mangansalze, dicarboxyl Säuren, Manganoxyde und die durch Kondensation und Polymerisation der überoxydierten Producte gebildeten Harze.

Die im Labor angestellten Versuche haben zu diesen Resultat geführt. Die Versuche wurden auch in identischen Konditionen ausgeführten Verseifungen durchgeführt, indem man einige Sorten oxydiertes Paraffin verwendete und für jede Sorte zu je drei Parallelproben ausgeführt wurden.

Tafel 7

D. Oxydierten Paraffin, abgesetzt und gewaschen
E. — F. Oxydiertes Paraffin, nicht abgesetzt aber gewaschen

Versuch	Ia	Ib	IIa	IIb	IIIa	IIIb
U. V. I. %	47,2	45,5	45,5	46,8	48,6	44,8
Emulsion %	0,0	2,0	1,5	0,0	1,0	1,4

Auf Grund der in Tafeln 7 und 8 und in Abb. 5, 6, 7 angegebenen Resultate kann bemerkt werden, dass das Dekantieren sowie auch das Filtern zu einer besseren Geschwindigkeit der Emulsionstrennung beitragen. Es ist aber klar zu sehen, dass die besten Resultate durch Waschen erzielt werden, ganz egal ob eine Dekantierung vorangeht oder nicht. Da wir in unserer Versuchsstation (35) kg) über keine Möglichkeit verfügt haben, das Material im Gegenstrom mit Wasser zu waschen, haben wir ein nicht kontinuierliches Verfahren eingeführt: Das oxydierte Paraffin wurde, unter starkem Mischen, mit 10% Wasser behandelt und dann 1—2 Stunden stehengelassen, zum Absetzen des Wassers und verschiedener in Suspension befindlicher Körperteilchen. Diese Operation wurde dreimal wiederholt. Die Resultate, die erzielt wurden, bestätigen die im Labor erhaltenen Resultate.

In der halbindustriellen Anlage (8000 kg), wo das Waschen mit Wasser im Gegenstrom durchgeführt wird, ist ein Absetzenlassen nach dem Waschen nicht mehr möglich. Deshalb ist vor dem Waschen eine Dekantierung erforderlich.

Eine komplette Trennung der Emulsion ist weder im Labor noch in der Versuchsstation und in der halbindustriellen Anlage möglich gewesen. Die geringen Quantitäten Emulsion, die zurückbleiben, sind unwichtig und können mit der Seifenlösung zur Trennung des U.V. II weitergeleitet werden.

Schlussfolgerungen

1. Die Trennung des U.V. I ist von einer Serie von Faktoren beeinflusst die sich entweder auf die Trennungsgeschwindigkeit oder auf den Prozentsatz des U.V. I auswirkt.

2. Die Produktionskosten (durch Sparen des zur Destillation des U.V. II nötigen Brennstoffes) sind umso kleiner, je grösser der Prozentsatz an durch einfaches Dekantieren separtiertes U.V. I ist.

Tafel 9 stellt einen Verèleich zwischen den in der Literatur angegebenen und unseren Resultaten dar.

Tafel 9

	Atü	Temp. °C	Gesamt — U. V.		Bibl.
			U. V. I	U. V. II	
Prückner	25	180	33,3–33,3	33,3	(3)
Tovbin	20	entspr.	70	30	(4)
Alaev	20	„	65	35	(5)
Bios 1560 . . .	25	180	—	—	(6)
Autoren	gewönhlich	100	75	25	—

3. Die wichtigste Bedingung zur wirtschaftlichen Verwendung des Verfahrens ist, einen hohen Verseifungsgrad zu erreichen, um ein U.V. I mit der kleinstmöglichen Verseifungszahl zu erzielen.

4. Die beste Konzentration der Seifenlösung ist 50% und der beste pH Wert cca 8, 5.

5. Die Verwendung von höherem Druck und entsprechender Temperatur während der Separierung hat eine grössere Geschwindigkeit der Emulsionstrennung zur Folge.

6. Der hohe Druck hat keinen Einfluss auf das Quantum des separieten U.V. I.

7. Wenn die Verseifung gut ausgeführt wird, so geschieht die Separierung des U.V. I auch bei Atmosphärendruck, in guten Bedingungen.

Laboratorium für organische Technologie
Polytechnisches Institut, Bukarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *I. Drimuș, M. Klang und I. Manase:* Die Erzeugung der Fettalkohole aus Neutralerzeugnissen der Paraffinoxydation. Rev. Chim. ASIT 1955, 6, 269—273.
2. *I. Drimuș, M. Klang* și *I. Manase:* Beitrag zum Studium der Zusammensetzung einiger Neutralerzeugnisse der Paraffinoxydation.
3. *Dr. H. Prückner Rodleben:* Oxydation der Paraffin in der Synthese der Fettsäuren, Chemische Technik 1952, Mai, Nr. 5, 193—199.
4. *I. M. Tovbin:* Die Herstellung der synthetischen Waschmittel, Moskau 1951.
5. *B. S. Alaev:* Die Herstellung der synthetischen Fettsäuren, Moskau 1952.
6. *BIOS 1560 Final Report:* Herstellung der synthetischen Fettsäuren.
7. *Bogdănescu S. Ing.:* Gebräuchliche Methoden in der Technik der Emulsionstrennung von Rohölen in der RVR. Petrol și Gaze, 1953, 11, : 4.
8. *Elizei Marin Ing.:* Entölung der Naphtenöllaugen. Petrol și Gaze, 1953, 9, 33.

ВОПРОС РАЗДЕЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕИТРАЛЬНЫХ ПРОДУКТОВ ПОСЛУЧЕННЫЕ ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ ЖИРНЫХ КИСЛОТ ОКИСЛЕНИМ ПАРАФИНОВ

(Краткое содержание)

Изучается влияния концентрации и температуры, давления и pH и. т.д. на стабильность эмульсии, и получаются при этом резултаты лучшие тех описываемых бо сих пор в литературе.

THE PROBLEME OF THE SEPARATION OF CERTAIN NEUTRAL PRODUCTS IN THE MANUFACTURE OF FATTY ACIDS THRONGH THE OXIDATION OF PARAFFINS.

(Summary)

One of fatty acids is the existence of certain emulsions very difficult to separate. The influence of concentration temperature, presure, pH value and so on, concerning the stability of the emulsions have been studiet, obtaining better results than those mentioned till now in literature.

LE PROBLÈME DE LA SÉPARATION DE CERTAINS PRODUITS NEUTRES DANS LA FABRICATION DES ACIDES GRAS, PAR L'OXYDATION DES PARAFFINES.

(Résumé)

Une difficulté dans la fabrication des acides gras synthétiques est constitué par l'existence de certain émulsions particulièrement difficilles a séparer.

On etudie l'influence de la concentration, de la température, de la pression, du pH, etc. sur la stabilité des émulsions, eu obtenant, des meilleurs resultats que ceux mentionnés dans la litérature.

DAS PROBLEM DER SEPARIERUNG EINIGER NEUTRALEN VERBINDUNGEN, BEI DER FABRIKATION DER FETTSAUREN, DURCH DIE OXYDATION DER PARAFFINE.

(Zusammenfassung)

Eine schwie.igkeit bei der Fabrikation der Synthetischen Fettsäuren ist das Vorhandensein einiger besonderes schwer zu trennenden Emulsionen. Es wird der Einfluss der Konzentration der Temperatur, des Druckes, des pH Wertes u.s.w. auf die Stabilität der Emulsionen studiert, wobei man bessere Ergebnisse erzielte, als die in der Literatur bezeichneten.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

ELECTROTEHNICA

621.314.11

CONTRIBUTIONS A L'ÉTUDE DES MULTIPOLES LINÉAIRES ACTIFS ET PASSIFS

par CONSTANTIN I. MOCANU

L'étude des réseaux électriques, dans lesquelles on tient compte des paramètres globaux et leurs propriétés en ensemble, ne peut être faite dans les conditions moins larges des méthodes analytiques de calcul. L'application du calcul matriciel et des considérations d'analyse tensoriélle, mènet d'autre part à des résultats intéressants dans la recherche du comportement des réseaux ouverts (multipôles), concernant les conditions de réalisabilité et passivisation, propriétés de transfert etc. — connues dans la littérature seulement pour le cas particulier du quadripôle.

Dans cette étude, on établit par calcul matriciel :

— les équations matricielles fondamentales des multipôles actifs linéaires, pseudo-actifs et passifs, dans, les variantes Thévenin-Norton.

— schémas équivalents et les théoremes de passivisation,

— les conditions de réalisabilité des multipôles passifs et,

— les pérformances de transfert et l'extraction de la puissance maxima, pour les réseaux de transfert.

1. *Les équations matricielles fondamentales des multipôles actifs linéaires.* Par multipôle à $(n + 1)$ accès, on comprendra le réseau électrique ouvert et dissipatif, qui contient $(n + 1)$ bornes accessibles — auxquelles on peut raccorder un autre réseau ouvert (ou réseaux) avec le même nombre de bornes. Les multipôles sont actifs ou passifs, linéaires ou non-linéaires, selon que dans leur structure interne ils contiennent ou non des sources, et le régime électrique peut s'exprimer par des systhèmes d'équations différentielles linéaires ou non-linéaires (dans le correspondant physique de la possibilité ou impossibilité de la superposition des états.

a) *Le réseau est connu en impédances* $\underline{Z}$ *et sources de f. em.* $\underline{E}$.

Soit le réseau électrique linéaire et connexe (fig. 1a) ayant l elements et c connexions électriques dont : $(n + 1)$ bornes accessibles (externes) et m bornes libres (internes).La chute de tension dans l'élément k, est :

$$\underline{E}_k - \underline{U}_k = \sum_j \underline{Z}_{kj}\,\underline{I}_j \qquad (1)$$

où $\underline{E}_k$, $\underline{U}_k$, $\underline{Z}_{kj}$, $\underline{I}_j$, sont la f. em., la tension, l'impédance propre et mutuelle et $\underline{I}_j$, les courants par les éléments du réseau $(j = 1,2, \ldots 1)$. Le systhème

des équations (1) exprimées pour tous les éléments du réseau, peut être présenté d'une manière condensée, sous la forme matricielle :

$$[E] - [U] = [Z]\,[I] \tag{2}$$

où les matrices $[E]$, $[U]$, $[I]$ sont de type colonne a éléments, et $[Z]$ est le tenseur des impédances du réseau, dont la matrice est carrée et en général non-singulière, de rang $l \times l$, avec des éléments de la forme :

$$\underline{Z}_{kj} = pL_{kj} + R_{kj} + \frac{1}{pC_{kj}} \tag{3}$$

où $R_{kj} = 0$, pour $k \neq j$. L'équation (2) est l'équation matricielle fondamentale des chutes de tensions. Si le système des équations (1) est ordonné de maniere à écrire d'abord les équations des chutes de tension où interviennent les tensions aux bornes accessibles, l'équation (2) a la forme :

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_e \\ U_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1, & Z_2 \\ Z_3, & Z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

où l'on a partitionné les matrices $[E]$, $[Z]$, $[I]$, selon les sous-matrices des tensions aux bornes externe, $[U_e]$ et aux autres tensions $[U_i]$.

Le réseau est alimenté aux bornes accessibles par $(n + 1)$ courants externes, dont seulement n sont linéaires independants et les éléments du réseau sont parcourus par l courants, dont seulement $(l - c + 1)$ sont linéaires indépendants. Nous choisirons les courants $\underline{I}_{ek}(k = 1,2...n)$ comme linéaires indépendants. En ce qui concerne l'établissement des courants indépendants internes, leur choix est aussi arbitraire, à condition de laisser à chaque connexion (la borne libre ou accessible) au moins un courant dépendent.

En exprimant les courants par les éléments du reseau, en fonction de n courants indépendants externes, et $(l - c + 1)$ courants indépendants internes, on obtient le systhème :

$$I_k = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j' I_{ej}' + \sum_{i=1}^{l-c+1} \varepsilon_i' I_i' \tag{5}$$

où sous forme matricielle :

$$[I] = [C]\,[I'] \tag{6}$$

où $[C]$ est la matrice de connexion, généralement rectangulaire et singulière, d'ordre $l \times (l - m)$, ayant comme termes ε_i', ε_j' avec les valeurs -1, $+1$, 0, et $[I']$est la matrice collonne d'ordre $(l-m)$ peut être partitionnée en deux sous-matrices : $[I_e']$ des courants linéaires indépendants externes de l'ordre n et $[I_i']$ des courants linéaires indépendants internes de l'ordre $(l-m-n)$, ainsi que l'équation (6) peut être partitionnée sous la forme :

$$[I] = \left[\begin{array}{c:c} C_e & C_i \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_e' \\ I_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{e1}, & C_{i1} \\ C_{e2}, & C_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e' \\ I_i' \end{bmatrix} \tag{7}$$

où la sousmatrice $[C_e]$ respectivement les céllules $[C_{e1}]$, $[C_{e2}]$, se réfèrent aux connexions externes, et $[C_{i1}]$, $[C_{i2}]$ aux connexions libres. L'équa-

tion (6) est la deuxième équation matricielle fondamentale des réseaux, appelée „l'équation des connexions électriques". Elles ont été établies, sous une forme plus générale, valables pour les réseaux nonconnexes, aux éléments fixes et mobiles [9].

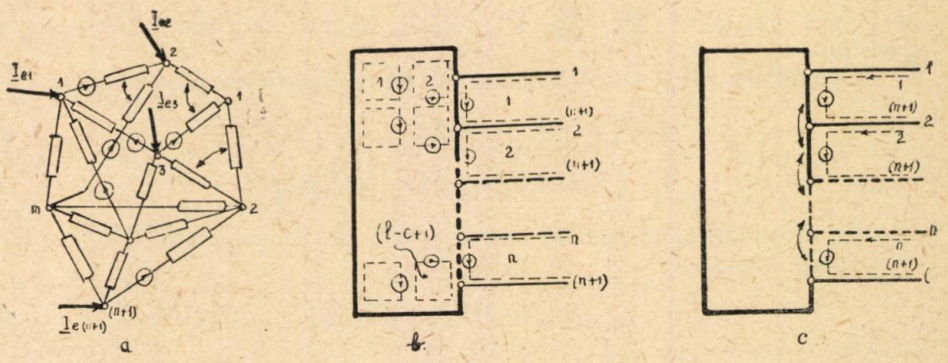


Fig. 1.

Dans les équations (2), (4) et (6), (7) interviennent outres les grandeurs du régime externes $[U_e']$ et $[I_e']$, les grandeurs du régime interne $[U_i]$, $[I_i']$ qui ne présentent pas d'intérêt dans l'étude des multipôles et doivent être éliminées. La transformation de l'équation (2) respectivement (4), par la matrice de connexion $[C]$ permet l'élimination des grandeurs du régime interne. En appliquant les règles classiques de transformation, les matrices $[E]$, $[U]$, $[Z]$, se transforment en:

$$[E'] = [C]_t\,[E]$$
$$[U'] = [C]_t\,[U]$$
$$[Z'] = [C]_t\,[Z]\,[C]$$

c'est à dire que en multipliant l'équation (4) avec $[C]_t$ (la transposée de la matrice $[C]$) et en remplacant le vecteur $[I]$, avec la valeur de (6), on obtient:

$$\begin{bmatrix} C_{e1t}, & C_{e2t} \\ C_{i1t}, & C_{i2t} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_e \\ U_i \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} C_{e1t}, & C_{e2t} \\ C_{i1t}, & C_{i2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1, & Z_2 \\ Z_3, & Z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{e1}, & C_{i1} \\ C_{e2}, & C_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e' \\ I_i' \end{bmatrix} \tag{8}$$

et parce que *:

$$[C_{i1t}]\,[U_e] + [C_{i2t}]\,[U_i] = 0 \tag{9}$$

il résulte:

$$\begin{bmatrix} C_{e1t}\,E_1 + C_{e2t}\,E_2 \\ C_{i1t}\,E_1 + C_{i2t}\,E_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{e1t}\,U_e + C_{e2t}\,U_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{e1t}Z_1C_{e1} + C_{e2t}Z_3C_{e1} + \\ C_{i1t}\,Z_1C_{e1} + C_{i2t}\,Z_3C_{e1} + \end{bmatrix}$$

$$+ C_{e1t}Z_2C_{e2} + C_{e2t}Z_4C_{e2},\ C_{e1t}Z_1C_{i1} + C_{e2t}Z_3C_{i1} + C_{e1t}Z_2C_{i2} + C_{e2t}Z_4C_{i2}$$
$$+ C_{i1t}Z_2C_{e2} + C_{i2t}Z_4C_{e2},\ C_{i1t}Z_1C_{i1} + C_{i2t}Z_3C_{i1} + C_{i1t}Z_2C_{i2} + C_{i2t}Z_4C_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e' \\ I_i' \end{bmatrix} \tag{10}$$

*) Dans les réseaux fermés $[I_e] = [0]$, il y a la relation (9): $[C]_t\,[U] = [0]$ où $[C]$ est la sous-matrice $[C_i]$ du cas plus général des réseaux ouverts.

ou en formule abrégée :

$$\begin{bmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U'_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_1, & Z'_2 \\ Z'_3, & Z'_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_e \\ I'_i \end{bmatrix} \tag{11}$$

où l'on a noté avec : E'_1, E'_2, U'_1, $Z'_1, \ldots Z'_4$, les expresion résultant par partition.

L'équation (11) se décompose en deux equations matricielles :

$$[E'_1] - [U'_e] = [Z'_1][I'_e] + [Z'_1][I'_i] \tag{12}$$

$$[E'_2] = [Z'_3][I'_e] + [Z'_4][I'_i]. \tag{13}$$

En éliminant $[I'_i]$ de (12) en fonction de la valeur de (13), l'équation (13) devient :

$$[E'_e] - [U'_e] = [Z'_e][I'_e] \tag{14}$$

où l'on a noté :

$$[E'_1] - [Z'_2][Z'_4]^{-1}[E'_2] = [E'_e] \tag{15}$$

$$[Z'_1] - [Z'_2][Z'_4]^{-1}[Z'_3] = [Z'_e]. \tag{16}$$

L'équation matricielle (14) est l'équation transformée, par la matrice $[C]$ et elle définit le régime externe des multipôles linéaires actifs, exprimés en impédances et sources de f.em. En général, les matrices de connexion $[C]$ transforment le réseau donné dans le systhème des mailles indépendantes Maxwell [9]. Dans le cas des réseaux ouverts, l'application de la matrice $[C]$, consiste dans l'application de la sous-matrice $[C_i]$ qui détermine les mailles de la structure interne (par l'équation 13) et de la sous-matrice $[C_e]$ qui déetermine les mailles externes, exprimées par l'équation (12). Pendant que les circuits internes sont fermés (fig. 1b), les circuits externes sont ouverts. L'élimination du vecteur $[I^i]$ représente l'élimination des mailles internes, c'est à dire la détermination du régime externe. A mentionner que, par le choix de la borne accesible $(n+1)$ comme borne de référence, on a fixé aussi le sens du parcours des mailles externes, qui ont comme parcours de retour, la connexion $(n+1)$, fig. 1b.

Les paramètres du régime externe. Le réseau électrique (fig. 1 a) est équivalent au point de vue du régime externe, au multipôle contenant $(n+1)$ bornes accésibles (fig. 1c), où $[I'_e]$ est le vecteur des courants externes (linéaire indépendant) par les premièrs n bornes, $[U'_e]$ le vecteur des tensions linéaires indépendants entre les premières n bornes et la borne de référence $(n+1)$ et $[Z'_e]$ le tenseur des impédances aux accès :

$$[U'_e] = \begin{bmatrix} \underline{U}'_{e1(n+1)} \\ \underline{U}'_{e2(n+1)} \\ \vdots \\ \underline{U}'_{ek(n+1)} \\ \vdots \\ \underline{U}'_{en(n+1)} \end{bmatrix}; \quad [Z'_e] = \begin{bmatrix} \underline{Z}'_{e11}, & \underline{Z}'_{e12}, \cdots \underline{Z}'_{e1k} \cdots \underline{Z}'_{e1n} \\ \underline{Z}'_{e21}, & \underline{Z}'_{e22}, \cdots \underline{Z}'_{e2k} \cdots \underline{Z}'_{e2n} \\ \cdots & \cdots \\ \underline{Z}'_{ek1}, & \underline{Z}'_{ek2}, \cdots \underline{Z}'_{ekk} \cdots \underline{Z}'_{ekn} \\ \cdots & \cdots \\ \underline{Z}'_{en1}, & \underline{Z}'_{en2}, \cdots \underline{Z}'_{enk} \cdots \underline{Z}'_{enn} \end{bmatrix}; \quad [I'_e] = \begin{bmatrix} \underline{I}'_{e1} \\ \underline{I}'_{e2} \\ \vdots \\ \underline{I}'_{ek} \\ \vdots \\ \underline{I}'_{en} \end{bmatrix} \tag{17}$$

De l'équation (16) résulte que si :

$$[Z_1'] = [Z_2'][Z_4']^{-1}[Z_3']$$

alors :

$$[Z_e'] = 0. \tag{18}$$

Pour ces réseaux on ne peut pas définir en général le tenseur des impédances aux accès et dans ce cas on emploie d'autres grandeurs (par exemple le tenseur de répartition $[S]$). Ainsi, si :

$$[E_1'] = [Z_2'][Z_4']^{-1}[E_3']$$

alors :

$$[E_e'] = 0 \tag{19}$$

et l'équation (15) devient :

$$-[U_e'] = [Z_e'][I_e']$$

ou, en considérant le vecteur des tensions appliquées :

$$[U_e'] = [Z_e'][I_e'] \tag{20}$$

qui représente l'équation du multipôle passif aux bornes duquel on applique la tension $[U_e']$. La présence seule des sources de f. em. dans la structure interne du réseau n'est pas suffisante pour définir le multipôle actif. Si :

$$[E_1'] > [Z_2'][Z_4']^{-1}[E_3'] \tag{21}$$

les multipôles sont actifs générateurs,

$$[E_1'] < [Z_2'][Z_4']^{-1}[E_3'] \tag{22}$$

ils sont actifs récepteurs, et si :

$$[E_1'] = [Z_2'][Z_4']^{-1}[E_3'] \tag{23}$$

ils sont passifs. Nous appellerons multipôles pseudo-actifs, les multipôles qui remplissent la condition (23), — bien qu'ils contiennent des sources de f. em. dans leur structure interne. On montrera au point 4, que les multipôles pseudo-actifs sont des multipôles passifs, dans lesquels on annule les sources extérieurisées par les théorèmes de passivisation topologique.

b) *Le réseau est connu en admittances et sources de courant.*

Soit le réseau électrique, dans lequel l'élément actifs k (fig. 2a) est défini par la source de courant $\underline{I}_{ck}$ le courant $\underline{I}_k$, la tension aux bornes $\underline{U}_k$ et les admittances propres $\underline{Y}_{kk}$ et mutuelles $\underline{Y}_{kj}$ ($j = 1,2, \ldots 1$) L'équation de la diminuation de courant (duale a l'équation (1) de la chute de tension) dans l'élément k, est :

$$\underline{I}_{ck} - \underline{I}_k = \sum_j^e \underline{Y}_{kj}\,\underline{U}_{kj} \tag{24}$$

ou, pour tout le réseau sous forme matricielle :

$$[I_c] - [I] = [Y]\,[U] \tag{25}$$

où $[I_c]$ est la matrice „des sources des courants" (injections des courants et (4) le tenseur des admittances ($[Y] = [Z]^{-1}$). L'équation (25) s'appelle l'équation matricielle fondamentale des „diminautions de courant" duale à l'équation des „chutes de tension" (2). La dualité des deux équations est verifiée aussi par la dualité des sources. En multipliant l'équation (2) avec $[Y] = [Z]^{-1}$, on obtient :

$$[Y]\,[E] - [U] = [Y]\,[U] \tag{26}$$

qui identifiée à (25), conduit à :

$$[I_c] = [Y]\,[E] \tag{27}$$

$$[E] = Z]\,[I_c]. \tag{28}$$

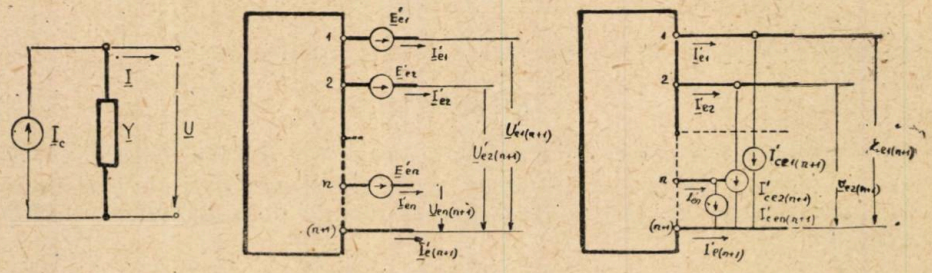


Fig. 2.

Par analogie à l'établissement de l'équation des connexions (6), on déduit dans ce cas, l'équation duale de „connexion des tensions" :

$$[U] = [T]\,[U'] \tag{29}$$

où $[T]$ est la matrice de connexion des tensions, généralement singulière de l'ordre $l \times (c-1)$, et $[U']$ la matrice des tensions linéaires indépendants (avec m tensions internes et n tensions externes).

Avec des règles de transformation similaires :

$$\begin{aligned} [I'_c] &= [T]_t\,[I_c] \\ [I'] &= [T]_t\,[I] \\ [Y'] &= [T]_t\,[Y]\,[T] \end{aligned} \tag{31}$$

on obtient finalement l'équation du régime externe :

$$[I'_{ce}] - [I'_e] = [Y'_e]\,]U'_e] \tag{31}$$

dont la dualité avec (15) réside en :

$$[I_{ce}] = [Y'_e]\,[E'_e]\,;\ [E'_e] = [Z'_e]\,[I'_{ce}]\,;\ [Y'_e] = [Z'_e]^{-1}.$$

Les paramètres du régime externe. Le réseau électrique (fig. 1a) est équivalent au point de vue du régime externe, au multipôle contenant

$(n+1)$ accès (fig. 1c), où $[I'_e]$, $[U'_e]$ sont les même de (17) et $[Y'_e]$ est le tenseur des admittances d'accés :

$$[I'_{ce}] = \begin{bmatrix} \underline{I}'_{ce1(n+1)} \\ \underline{I}'_{ce2(n+1)} \\ \vdots \\ \underline{I}'_{cek(n+1)} \\ \vdots \\ \underline{I}'_{cen(n+1)} \end{bmatrix} ; \quad [Y'_e] = \begin{bmatrix} \underline{Y}'_{e11}, \underline{Y}'_{e12}, \cdots \underline{Y}'_{e1k} \cdots \underline{Y}'_{e1n} \\ \underline{Y}'_{e21}, \underline{Y}'_{e22}, \cdots \underline{Y}'_{e2k} \cdots \underline{Y}'_{e2n} \\ \vdots \\ \underline{Y}'_{ek1}, \underline{Y}'_{ek2}, \cdots \underline{Y}'_{ekk} \cdots \underline{Y}'_{ekn} \\ \vdots \\ \underline{Y}'_{en1}, \underline{Y}'_{en2}, \cdots \underline{Y}'_{enk} \cdots \underline{Y}'_{enn} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Les éléments $\underline{Y}_{kk}$ situés sur la première diagonale, sont les admittances apparentes d'entrée, et $\underline{Y}_{ekj}$ les admittances de transfert.

Par analogie à (21), (2) et (23) on établit les conditions :

$$[I'_{c1}] > [Y'_2][Y'_4]^{-1}[I'_{c3}] \tag{33}$$

où le multipôle est actif générateur :

$$[I'_{c1}] < [Y'_2][Y'_4]^{-1}[I'_{c3}] \tag{34}$$

actif récepteur, et :

$$[I'_{c1}] = [Y'_2][Y'_4]^{-1}[I'_{c3}] \tag{35}$$

le multipôle est passif.

En ce qui concerne les équations matricielles fondamentales des multipôle passifs, on les obtient des équations (2), (25), où $[E] = [0]$, $[I_c] = [0]$, et (14), (31), où $[E'_e] = [0]$ et $[I'_{ce}] = [0]$ les équations (6), (29) étant les mêmes.

En conclusion, les équations matricielles des multipôles qui définissent le régime externe, sont :

— multipôles actifs :

$$[E] - [U] = [Z][I] \; ; \; [I] = [C][I'] \tag{36}$$

$$[I_c] - [I] = [Y][U] \; ; \; [U] = [T][U'] \tag{37}$$

$$[E'_e] - [U'_e] = [Z'_e][I'_e] \tag{38}$$

$$[I'_{ce}] - [I'_e] = [Y'_e][U'_e] \tag{39}$$

— multipôles pseudo-actifs :

$$[E] - [U] = [Z][I] \; ; \; [I] = [C][I'] \tag{40}$$

$$[I_c] - [I] = [Y][U] \; ; \; [U] = [T][U'] \tag{41}$$

$$-[U'_e] = [Z'_e][I'_e] \tag{42}$$

$$-[I'_e] = [Y'_e][U'_e] \tag{43}$$

— multipôles passifs :

$$[U] = [Z]\,[I]\,;\ [I] = [C]\,[I'] \tag{44}$$

$$[I] = [Y]\,[U]\,;\ [U] = [T]\,[U'] \tag{45}$$

$$[U'_e] = [Z'_e]\,[I'_e] \tag{46}$$

$$[I'_e] = [Y'_e]\,[U'_e] \tag{47}$$

où pour les multipôles passifs, $[U]$ est le vecteur des tensions appliquées.

Observation. On peut exprimer le régime externe des multipôles en fonction de $(n+1)$ courants externes, résultant $(n+1)$ mailles. Parce que $\sum_{1}^{n+1} I_{ek} = 0$ et $\sum \underline{U}_{ek\,(k+1)+1)}$, les matrices $[Z'_e]$, $[Y'_e]$ d'ordre $(n+1)$ $(n+1)$ sont singulières de rang $n \times n$ et on ne peut pas opérer en calculs avec leurs inverses.

2. *La déscomposition des multipôles actifs en réseaux canoniques.* L'application de la transformation $[C]$ à l'équation (2) a mené à l'établissement des équations du (régime externe (14) qui représente un systhème de n circuits ouverts, distincts électriques. Le multipôle est décomposé en un systhème de n générateurs, aux f. em. E'_{ek}, d'impédances internes Z'_{ekk}, les courants I'_{ek}, ayant les tensions aux bornes U'_{ek} et présentant entre les éléments les impédances mutuelles Z'_{ekj} (fig. 3a) — c'est à dire le systhème des mailles (ouverts), R'.

On a demontré, [6] que le systhème de n générateurs, à son tour peut être transformé en n générateurs distincts électrique et magnétique, — R'' $(Z''_{ekj} = 0)$, fig. 3b. L'equation de fonctionement :

$$[E''_e] - [U''_e] = [Z''_e]\,[I''_e] \tag{48}$$

est obtenue à l'aide d'une matrice inférieure triangulaire $[C_\Delta]$:

$$[C_\Delta] = \begin{bmatrix} \underline{C}_{11} & & & \\ \underline{C}_{21}, & \underline{C}_{22} & & \\ \cdots & \cdots & & \\ \underline{C}_{k1}, & \underline{C}_{k2}, \ldots & \underline{C}_{kk} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \underline{C}_{n1}, & \underline{C}_{n2}, \ldots & \underline{C}_{nk}, \ldots & \underline{C}_{nn} \end{bmatrix} \tag{49}$$

dont les termes sont donnés par :

$$\underline{C}_{jk} = (2\,\delta_{jk} - 1)\,\frac{\Delta_{j-1,k}}{\Delta_{jj}} \tag{50}$$

où l'on a noté :

δ_{jk}, le symbole de Kronecker, nul pour $i = j$ et 1 pour $i \neq j$.

Δ_{jj}, le premier mineur d'ordre j de la matrice $[Z']$,

$\Delta_{j-1,k}$, ie premier mineur d'ordre $j-1$, où l'on a supprimé la colonne k, et on a remplacée par la colonne j.

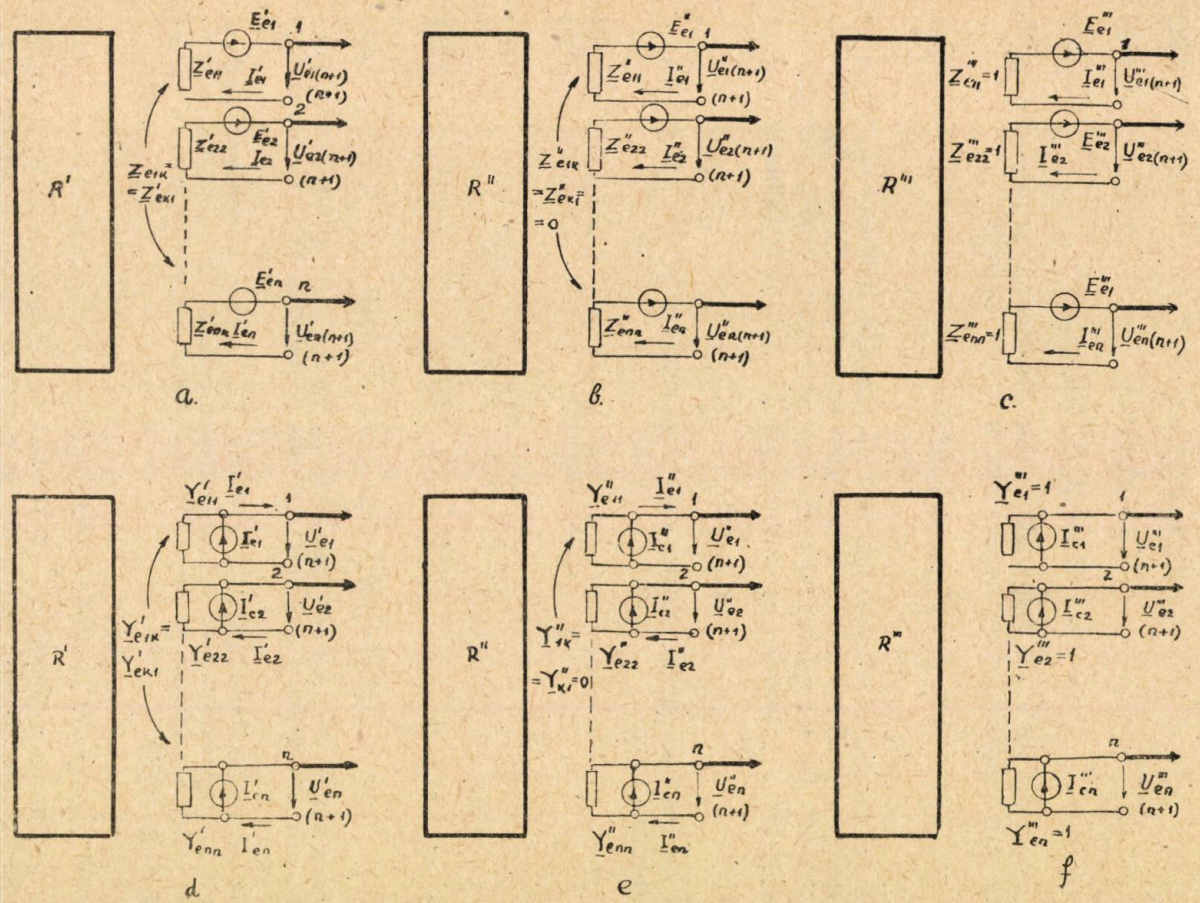


Fig. 3.

Les équations des transformations sont :

$$[I'_e] = [C_\triangle]_t [I''_e] \tag{51}$$

$$[I''_e] = [C_\triangle] [E'_e] \tag{52}$$

$$[U''_e] = [C_\triangle] [U'_e] \tag{53}$$

$$[Z''_e] = [C_\triangle]_t [Z'_e] [C_\triangle]. \tag{54}$$

La matrice $[Z''_e]$ est diagonale, et les impédances propres des générateurs sont égales au rapport de deux mineurs successifs :

$$\underline{Z}''_{ekk} = \frac{\Delta_{k-1,\,k-1}}{\Delta_{kk}}. \tag{55}$$

On a dénommé le systhème des générateurs distincts électrique et magnétique, „le réseau réduit à la forme canonique R",“ — fig. 3b.

Le systhème des générateurs R", peut être transformé à son tour en n générateurs aux impédances unitaires $[Z'''_e] = [1]$, dont l'équations est :

$$[E'''_e] - [U'''_e] = [I'''_e]$$

et qui est obtenue par la matrice de transformation $[Z'']^{\frac{1}{2}}$ par les règles de transformation :

$$[I'''_e] = [Z''_e]^{\frac{1}{2}} [I''_e] \tag{56}$$

$$[E'''_e] = [Z''_e]^{-\frac{1}{2}} [E''_e] \tag{57}$$

$$[U'''_e] = [Z''_e]^{-\frac{1}{2}} [U''_e] \tag{58}$$

$$[Z'''_e] = [Z''_e]^{-\frac{1}{2}} [Z''_e] [Z''_e]^{-\frac{1}{2}} = [1]. \tag{59}$$

On a appelé le systhème des générateurs distincts électrique et magnétique, aux impédances unitaires, „le réseau réduit à la forme canonique R''', "—fig. 3c.

Par analogie, on établit le systhème des réseaux canoniques correspondant aux générateurs de courants (les injecteurs de courant), en remplaçant dans les équations (48—59), les grandeurs respectives, avec les duales (fig. 3def).

3. *Le régime des puissances des multipôles actifs et passifs.*

En multipliant l'équation (56) au vecteur transposé et complexe conjugué du courant $[I]^*_t$, on obtient la puissance électrique apparente S :

$$\underline{S} = [I]^*_t [E] - [I]^*_t [U] = [I]^*_t [Z] [I]$$

ou, en prenant la transposée :

$$[E]_t [I]^* - [U]_t [I]^* = [I]_t [Z] [I]^*. \tag{60}$$

Le premier terme :

$$[E]_t\,[I]^* = \sum_{k=1}^{l} \underline{E}_k\,\underline{I}_k^* \tag{61}$$

représente la puissance apparente produite par les sources. Le terme $[U]_t\,[I]^*$ dans lequel la matrice $[U]$ se décompose en sous-matrices de tensions électriques internes $[U_i]$ et externes $[U_e]$, peut être mis sous la forme :

$$[U]_t\,[I]^* = [U_e]_t\,[I]^* + [U_i]_t\,[I]^* = [U_e]_t\,[I]^* \tag{62}$$

qui représente la puissance électrique apparente, changée par le réseau aux bornes accesibles. Le terme :

$$[I]_t\,[Z]\,[I]^* = \sum_{ik=1}^{l} \underline{Z}_{ik}\,\underline{I}_i\,\underline{I}_k^* \tag{63}$$

représente la puissance apparente consommée dans les éléments de la structure interne. Si :

$$re\,([E]_t\,[I]^*) \gtrless 0 \tag{64}$$

le multipôle est actif générateur, actif récepteur, respectivement pseudo-actif. Si :

$$re\,([U_e]_t\,[I]^*) \gtrless 0 \tag{65}$$

le multipôle est générateur de puissance active, — récepteur, respectivement ne change pas de puissance active à l'extérieur. En ce qui concerne la puissance active consommée dans les éléments de la structure interne, elle est toujours positive :

$$re\,([I]_t\,[Z]\,[I]^*) \tag{66}$$

le réseau électrique étant dissipatif (la matrice $[Z]$ est positive-réelle).

Des considerations similaires, on peut faire sur la puissance réactive.

Aussi, obtient-on les mêmes valeurs des puissances au cas où l'on considère le régime externe des multipôles. En multipliant l'équation (38) avec le vecteur transposé et complexe conjugué du courant externe $[I_e']$, on obtient :

$$[E_e']_t\,[I_e']^* - [U_e]_t\,[I_e']^* = [I_e']_t\,[Z_e']\,[I_e']^* \tag{67}$$

où :

$$[E_e']_t\,[I_e']^* = [E]_t\,[I]^* \tag{68}$$

$$[U_e']_t\,[I_e']^* = [U]_t\,[I]^* \tag{69}$$

$$[I_e']_t\,[Z_e']\,[I_e']^* = [I]_t\,[Z]\,[I]^* \tag{70}$$

avec la remarque que pour les multipôles pseudoactifs, le premier terme de (68) est nul.

4. *La passivisation des multipôles actifs*, a. *Schémas équivalents.* Les équations matricielles (14), (31) pour le régime externe, permettent. l'établissement des schémas équivalents — fig. 2b, c. En ce qui concerne la variante des sources de f. em., le multipôle est équivalent au multipôle passif, contenant en connexions externes les sources E_k'. En considérant donc les sources E_k' affectées au réseau auquel elles sont

interconnectées en cascade, on peut étudier le multipôle actif d'apres le modèle du multipôle passif. Par analogie, les sources de courant peuvent être transferées au réseau interconnecté. On étudie un multipôle actif de la même manière qu'un multipôle passif.

b) *La passivisation topologique des multipôles.* L'auteur a demontré [8], les théorèmes de transfiguration des réseaux électriques comme il suit :

α. *Le théorème de la transformation des éléments actifs et couplés connectés en parallèle.* Un systhème de n éléments actifs montés en parallèle avec des couplages internes et externes, est équivalent à un élément actifs, ayant comme force électromotrice la moyenne pondérée de la f. em. en rapport aux admittances, le courant égal à la somme des courants, comme admittance propre, la somme des admittances propres et mutuelles entre les éléments du montage, et comme impédance mutuelle par rapport à un élément externe, la moyenne pondérée des impédances externe par rapport aux admittances — la tension électrique étant la même :

$$\underline{E}_{ij} = \frac{\sum\limits_{lm,\,pq} \underline{Y}_{lm}^{pq}\,\underline{E}_{pq}}{\sum\limits_{lm,\,pq} \underline{Y}_{lm}^{pq}}\,;\quad \underline{U}_{ij} = \underline{U}_{lm}\,;\quad \underline{I}_{ij} = \sum_{lm} \underline{I}_{lm}\,;\quad \underline{Z}_{ij}^{ij} = \frac{1}{\sum\limits_{lm,\,pq} \underline{Y}_{lm}^{pq}}\,;$$

$$\underline{Z}_{e(ij)}^{rs} = \frac{\sum\limits_{lm,\,pq} \underline{Y}_{lm}^{pq}\,\underline{Z}_{e(pq)}^{rs}}{\sum\limits_{lm,\,pq} \underline{Y}_{lm}^{pq}}\,.$$

β. *Le théorème de la transformation des éléments actifs et couplés, connectés en série.* Un systhème de n éléments actifs montés en série avec des couplages internes et externes, est équivalent à un élément actif ayant la f. em. égale à la somme des f. em., — comme tension électrique la somme des tensions, — comme impédance propre la somme des impédances propres et mutuelles par rapport aux éléments internes et comme impédance mutuelle à un élément externe, la somme des impédances mutuelles externes par rapport à l'élément respectif, — le courant étant le même :

$$\underline{E}_{ij} = \sum_{lm} \underline{E}_{lm}\,;\quad \underline{U}_{ij} = \sum_{lm} \underline{U}_{lm}\,;\quad \underline{I}_{ij} = \sum_{lm} \underline{I}_{lm}\,;\quad \underline{Z}_{ij}^{ij} = \sum_{lm,\,pq} \underline{Z}_{lm}^{pq}\,;\quad \underline{Z}_{e(ij)}^{rs} = \sum \underline{Z}_{e(lm)}^{rs}$$

γ. *Le théorème de la transformation étoile-polygone avec des éléments actifs et couplages internes et externes.* Un systhème de n éléments actifs, connectés en étoile, avec des couplages internes et externes, est équivalent à la structure polygonale complète aux éléments actifs, sans couplages internes, mais avec des couplages externes. L'élément actif (ij) est déterminé par : $\underline{E}_{ij}$, $\underline{U}_{ij}$, $\underline{I}_{ij}$, $\underline{Z}$, $\underline{Z}_{e(ij)}^{rs}$, exprimées en fonction des grandeurs de la structure étoilée :

$$\underline{E}_{ij} = \underline{E}_{io} - \underline{E}_{jo}\,;\quad \underline{U}_{io} - \underline{U}_{jo}\,;\quad \underline{Y}_{ij}^{ij} = \frac{1}{\underline{y}_{\lambda 0}}\,\underline{y}_{io}\,\underline{y}_{jo} - \underline{Y}_{io}^{jo}\,;\quad \underline{Z}_{e(ij)}^{rs} = \underline{Z}_{e(io)}^{rs} - \underline{Z}_{e(jo)}^{rs}$$

$$\underline{I}_{ij} = \left[\frac{1}{\underline{y}_{\lambda 0}}\,\underline{y}_{io}\,\underline{y}_{jo} - \underline{Y}_{io}^{jo}\right] \sum_{k=1}^{n} (\underline{Z}_{io}^{ko} - \underline{Z}_{jo}^{ko})\,\underline{I}_{ko}$$

où l'on a noté comme admittances équivalentes :

$$\underline{y}_{io} = \sum_{j=1}^{n} \underline{Y}_{io}^{jo}\,; \quad \underline{y}_{\lambda 0} = \sum_{i=1}^{n} \underline{y}_{io} = \sum_{ij=1}^{n} \underline{Y}_{io}^{jo}.$$

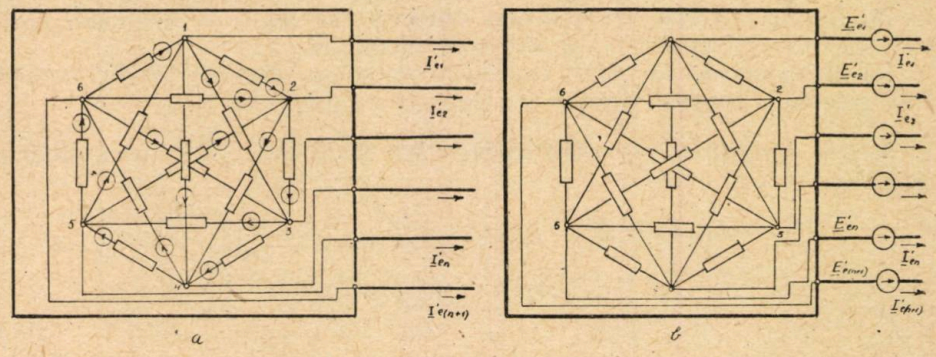


Fig. 4.

δ. *Le théorème de la transformation triangle-étoile, aux éléments actifs et des couplages externes et internes.* Avec les même notations, si les éléments sont connus en admittances :

$$\underline{E}_{10} = \frac{\underline{y}_{23}}{\sum \underline{y}_{12}\underline{y}_{23}} \left[\sum_{pq} (\underline{Y}_{12}^{pq} - \underline{Y}_{31}^{pq})\, \underline{E}_{pq} \right]\,; \quad \underline{U}_{10} = \frac{\underline{y}_{23}}{\sum \underline{y}_{12}\underline{y}_{23}} \left[\sum_{pq} (\underline{Y}_{12}^{pq} - \underline{Y}_{31}^{pq})\, \underline{U}_{pq} \right]$$

$$\underline{I}_{10} = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}\,; \quad \underline{Z}_{10} = \frac{1}{\underline{Y}_{10}} = \frac{\sum \underline{y}_{12}\underline{y}_{23}}{\underline{y}_{23}}\,;$$

$$\underline{Z}_{e(10)}^{rs} = \frac{\underline{y}_{23}}{\sum \underline{y}_{12}\underline{y}_{23}} \left[\sum_{pq} (\underline{Y}_{12}^{pq} - \underline{Y}_{31}^{pq})\, \underline{Z}_{e(pq)}^{rs} \right]$$

où l'on a noté, comme admittances équivalentes :

$$\underline{y}_{12} = \underline{Y}_{12}^{12} - \underline{Y}_{12}^{23} - \underline{Y}_{12}^{31} + \underline{Y}_{23}^{31}.$$

Si les éléments sont connus comme impédances :

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{z}_{12}\underline{z}_{31}}{\underline{z}_{\Delta 0}} - \underline{Z}_{31}^{23}$$

où l'on a noté en impédances équivalentes :

$$\underline{z}_{12} = \sum_{ij=12}^{31} \underline{Z}_{12}^{ij}\,; \quad \underline{z}_{\Delta 0} = \sum_{ij=12}^{31}$$

Dans la structure interne du multipôle (fig. 1a) chacune des m connexions libres, peut être considérée comme le centre d'une structure étoilée d'impédances (couplées ou non), qui se transforme en structure polygonale. En supprimant successivement toutes les connexions libres, on obtient une structure interne aux éléments actifs connectés seulement

entre les bornes accesibles, c'est à dire le polygone complet d'éléments a n noeuds. En appliquant le théorème de la passivisation des sources de courant, (11) les sources peuvent être transférées sur les connexions externes, d'où résultent les schémas équivalents, fig. 4a, pour la variante aux f. em., et fig. 4b, pour la variante des sources de courant. Au point de vue du régime externe, les schémas obtenus par les deux méthodes (fig. 2b et 4a, respectivement 2c et 4b) sont identique.

La méthode de la passivisation topologique permet l'établissement de la structure interne typique du polygone équivalent.

5. *Les conditions de réalisabilité des multipôles.* Soit le systhème d'équations :

$$\begin{aligned}
\underline{U}'_{e1} &= \underline{Z}'_{e11}\underline{I}'_{e1} + \underline{Z}'_{e12}\underline{I}'_{e2} + \ldots + \underline{Z}'_{e1k}\underline{I}'_{ek} \ldots + \underline{Z}'_{e1n}\underline{I}'_{en} \\
\underline{U}'_{e2} &= \underline{Z}'_{e21}\underline{I}'_{e1} + \underline{Z}'_{e22}\underline{I}'_{e2} + \ldots + \underline{Z}'_{e2k}\underline{I}'_{ek} \ldots + \underline{Z}'_{e2n}\underline{I}'_{en} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\underline{U}'_{ek} &= \underline{Z}'_{ek1}\underline{I}'_{e1} + \underline{Z}'_{ek2}\underline{I}'_{e1} + \ldots + \underline{Z}'_{ekk}\underline{I}'_{ek} \ldots + \underline{Z}'_{ekn}\underline{I}'_{en} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\underline{U}'_{en} &= \underline{Z}'_{en1}\underline{I}'_{e1} + \underline{Z}'_{en2}\underline{I}'_{e2} + \ldots + \underline{Z}'_{enk}\underline{I}'_{ek} \ldots + \underline{Z}'_{enn}\underline{I}'_{en}
\end{aligned} \tag{71}$$

et :

$$\begin{aligned}
\underline{I}'_{e1} &= \underline{Y}'_{e11}\underline{U}'_{e1} + \underline{Y}'_{e12}\underline{U}'_{e2} + \ldots + \underline{Y}'_{a1k}\underline{U}'_{ek} \ldots + \underline{Y}'_{e1n}\underline{U}'_{en} \\
\underline{I}'_{e2} &= \underline{Y}'_{e21}\underline{U}'_{e1} + \underline{Y}'_{e22}\underline{U}'_{e2} + \ldots + \underline{Y}'_{e1k}\underline{U}'_{ek} \ldots + \underline{Y}'_{e2n}\underline{U}'_{en} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\underline{I}'_{ek} &= \underline{Y}'_{ek1}\underline{U}'_{e1} + \underline{Y}'_{ek2}\underline{U}'_{e2} + \ldots + \underline{Y}'_{ekk}\underline{U}'_{ek} \ldots + \underline{Y}'_{ekn}\underline{U}'_{en} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\underline{I}'_{en} &= \underline{Y}'_{en1}\underline{U}'_{e1} + \underline{Y}'_{en2}\underline{U}'_{e2} + \ldots + \underline{Y}'_{enk}\underline{U}'_{ek} \ldots + \underline{Y}'_{enn}\underline{U}'_{en}.
\end{aligned} \tag{72}$$

Afin que les systhème (71) et (72) représentent un multipôle passif, il faut que dans les deux équations, les coéfficients de la première diagonale $\underline{Z}'_{kk}$, $\underline{Y}'_{kk}$ et $\underline{Z}'_{kj}$, $\underline{Y}'_{kj}$ représentent les impédances ou les admittances apparentes d'entrée, respectivement les impédances ou admittances de transfert. De même les formes carrées de la puissance active, doivent être positivement définies :

$$P = \sum_{jk=1}^{n} (re\ \underline{Z}'_{ejk})\ \underline{I}'_{ej}\underline{I}'^{*}_{ek} > 0 \tag{73}$$

$$P = \sum_{jk=1}^{n} (re\ \underline{Y}'_{ejk})\ \underline{U}'_{ej}\underline{U}'^{*}_{ek} > 0. \tag{74}$$

Le systhème des mailles qui sont représentées par les équations (71) et (72) peut être transformé en un systhème de circuits distincts du

réseau réduit, à la forme canonique, où les expressions des puissances (73—74) deviennent :

$$P = \sum_{j}^{n} (re\, \underline{Z}''_{ejj})\, \underline{I}''^{2}_{ej} > 0 \tag{75}$$

$$P = \sum_{j}^{n} (re\, \underline{Y}''_{ejj})\, \underline{U}''^{2}_{ej} > 0 \tag{76}$$

où les impédances $\underline{Z}''_{ejj}$ et les admittances $\underline{Y}''_{ejj}$ du réseau reduit, sont données par (55), respectivement par l'équation duale. Les conditions (75—76) sont verifiées pour toutes les valeurs des courant $\underline{I}''_{ej}$ et des tensions $\underline{U}''_{ej}$, si :

$$re\, \underline{Z}''_{ejj} > 0 \; ; \quad re\, \underline{Y}''_{ejj} > 0$$

et par conséquant, les conditions de réalisabilitée des multipôles sont :

$$(re\, \Delta^{(Z)}_{j,j}) > 0 \; ; \quad (re\, \Delta^{(Y)}_{j,j}) > 0 \tag{77}$$

c'est à dire que les valeurs des déterminants mineurs successifs des parties réelles des matrices $[\underline{Z}'_e]$, $[\underline{Y}'_e]$ doivent être positives. Par exemple, afin que le systhème :

$$\begin{aligned} \underline{U}'_1 &= \underline{Z}'_{11}\underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{12}\underline{I}'_2 + \underline{Z}'_{13}\underline{I}'_3 \\ \underline{U}'_2 &= \underline{Z}'_{21}\underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{22}\underline{I}'_2 + \underline{Z}'_{23}\underline{I}'_3 \\ \underline{U}'_3 &= \underline{Z}'_{31}\underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{32}\underline{I}'_2 + \underline{Z}'_{33}\underline{I}'_3 \end{aligned}$$

représente les équations du tétrapôle (c'est à dire que le tableau des coéfficients représente les impédances apparente d'entrée et de transfert) il faut que :

$$re\, \underline{Z}'_{11} > 0 \; ; \begin{vmatrix} re\, \underline{Z}'_{11}, & re\, \underline{Z}'_{12} \\ re\, \underline{Z}'_{21}, & re\, \underline{Z}'_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} re\, \underline{Z}'_{11}, & re\, \underline{Z}'_{12}, & re\, \underline{Z}'_{13} \\ re\, \underline{Z}'_{21}, & re\, \underline{Z}'_{22}, & re\, \underline{Z}'_{23} \\ re\, \underline{Z}'_{31}, & re\, \underline{Z}'_{32}, & re\, \underline{Z}'_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Par analogie :

$$re\, \underline{Y}'_{11} > 0 \; ; \begin{vmatrix} re\, \underline{Y}'_{11}, & re\, \underline{Y}'_{12} \\ re\, \underline{Y}'_{21}, & re\, \underline{Y}'_{22} \end{vmatrix} > 0 \; ; \begin{vmatrix} re\, \underline{Y}'_{11}, & re\, \underline{Y}'_{12}, & re\, \underline{Y}'_{13} \\ re\, \underline{Y}'_{21}, & re\, \underline{Y}'_{22}, & re\, \underline{Y}'_{23} \\ re\, \underline{Y}'_{31}, & re\, \underline{Y}'_{32}, & re\, \underline{Y}'_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Aussi pour le quadripôle :

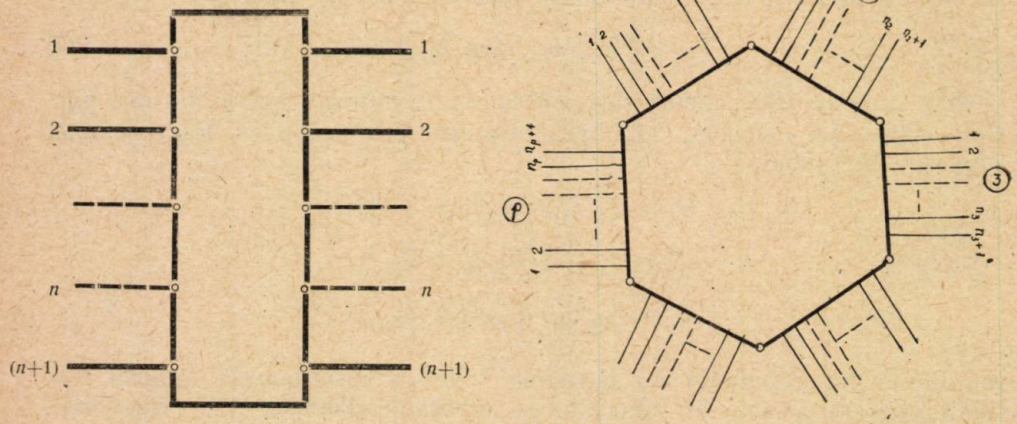
$$\begin{aligned} \underline{U}'_1 &= \underline{Z}'_{11}\underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{12}\underline{I}'_2 \\ \underline{U}'_2 &= \underline{Z}'_{21}\underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{22}\underline{I}'_2 \end{aligned}$$

résultent les conditions :

$$re\,\underline{Z}'_{11} > 0\,;\quad \begin{vmatrix} re\,\underline{Z}'_{11}, & re\,\underline{Z}'_{12} \\ re\,\underline{Z}'_{21}, & re\,\underline{Z}'_{22} \end{vmatrix} = (re\,\underline{Z}'_{11})\,(re\,\underline{Z}'_{22}) - (re\,\underline{Z}'_{12})\,(re\,\underline{Z}'_{21}) > 0$$

(connues dans la littérature sous le nom de conditions de Vaulot au cas particulier du quadripôle et retrouvées dans l'ouvrage [5]).

6. *Multipôles à accès groupés. Multipôles de transfert.* Le multipôle de l'ordre n, dont l'équation matricielle de fonctionement est de rang n (38), a $(n + 1)$ bornes accessibles, la borne $(n + 1)$ étant de référence (fig. 2bc). Certains régimes externes de fonctionnement des multipôles, — résultant par exemple de les interconnexions à des groupes de réseaux connexes et distincts, — imposent la spécialisation des accès par groupes,



a Fig. 5. b

ainsi que chaqne groupe vérifie l'équation de conservation. Ainsi, le multipôle à deux groupes d'accès, a un groupe de $(n + 1)$ bornes d'entrée et un autre groupe de $(n + 1)$ bornes de sortie, fig. 5a. Si le multipôle est interconnecté à l'entré, à un multipôle actif, et à la sortie à un multipole passif, il sera nommé, „multipôle de transfert". Un cas particulier de multipôle de transfert est la ligne triphasée, ou le transformateur triphasé. Les multipôles de transfert peuvent avoir un nombre de connexions d'entrée différant du nombre des connexions de sortie, fig. 5b, par exemple le transformateur triangle-étoile à fil neutre. Enfin, les multipôles de transfert peuvent être connectés a p_1 multipôles actifs et p_2 multipôles passifs, disposant en ce cas de $p_1 + p_2$ groupes d'accès, fig. 5b. Le multipôle de transfert à un groupe d'accès actif et à plusieurs passifs, est le transformateur à plusieurs enroulements, fig. 5.

Sous la forme la plus générale, les multipôles de transfert peuvent contenir p groupes d'accès, d'ordre, $n_1, n_2, \ldots n_p$ les groupes d'accès qui alimentent le multipôle étant „d'entrée" et ceux de transfert „de sortie". Les multipôles à p groupes peuvent être aussi actifs (générateurs, récepteurs ou pseudo-actifs) et passifs.

7. Les équations matricielles de fonctionnement des multipôles de transfert. On déduit les équations des multipôles à p groupes, de l'équation générale de fonctionnement (38) où chacune des matrices $[E'_e]$, $[U'_e]$, $[I'_e]$, se compose des sousmatrices des groupes d'accès. En notant avec $[E'_{ek}]$, $[U'_{ek}]$, $[I'_{ek}]$ les matrices du groupe d'accés k l'équation (38) se décompose dans le systhème :

$$[E'_{e1}] - [U'_{e1}] = [Z'_{e11}][I'_{e1}] + [Z'_{e12}][I'_{e2}] + \ldots [Z'_{e1k}][I'_{ek}] + \ldots + [Z'_{e1p}][I'_{ap}]$$

$$[E'_{e2}] - [U'_{e2}] = [Z'_{e21}][I'_{e1}] + [Z'_{e22}][I'_{e2}] + \ldots [Z'_{e2k}][I'_{ek}] + \ldots + [Z'_{e2p}][I'_{ep}]$$

. . . . . .

$$[E'_{ek}] - [U'_{ek}] = [Z'_{ek1}][I'_{e1}] + [Z'_{ek2}][I'_{e2}] + \ldots [Z'_{ekk}][I'_{ek}] + \ldots [Z'_{ekp}][I'_{ep}]$$

. . . . . .

$$[E'_{ep}] - [U'_{ep}] = [Z'_{ep1}][I'_{e1}] + [Z'_{ep2}][I'_{e2}] + \ldots [Z'_{epk}][I'_{ek}] + \ldots [Z'_{epp}][I'_{ep}]$$

où $[Z'_{ekk}]$ est l'impédance apparente matricielle d'entrée et $[Z'_{ekj}]$, l'impédance matricielle de transfert entre les groupes d'accès k et j. Tandis que les sous-matrices $[Z'_{ekk}]$ sont carrées, de rang $n_k \times n_k$,, les sous-matrices $[Z'_{ekj}]$ sont rectangulaires d'ordre $n_k \times n_j$.

Si l'on multiple en (78), chaque équation avec le vecteur transposé et complexe conjugué du courant du groupe respectif, on obtient le bilan des puissances. Au groupe k :

$$[E'_{ek}]_t [I'_{ek}]^* - [U'_{ek}]_t [I'_{ek}]^* = \sum_{j=1}^{n} [I'_{ej}]_t [Z'_{ekj}] [I'_{ej}]^* \qquad (79)$$

le premier terme représente la puissance produite par les sources afférentes au groupe k, le second la puissance changée par les bornes accessibles et le troisième, la puissance absorbé dans la structure interne du multipôle (aussi afférant au groupe k). Si dans le groupe d'accès k :

$$[E'_{ek}]_t [I'_{ek}]^* \gtrless 0 \qquad (80)$$

le multipôle est par rapport aux connexions du groupe, actif-générateur, actif-récepteur ou pseudoactif.

L'equation (36), peut être partitionnée par la séparation des cellules $[E'_{ek}]$, $[U'_{ek}]$, $[I'_{ek}]$, ainsi :

$$[E'_{ek}] - [U'_{ek}] = [Z'_{ekk}][I'_{ek}] + [Z'_{eks}][I'_{es}] \qquad (81)$$

$$[E'_{es}] - [U'_{es}] = [Z'_{esk}][I'_{ek}] + [Z'_{ess}][I'_{es}] \qquad (82)$$

où $[E'_{es}]$, $[U'_{es}]$, $[I'_{es}]$, contiennent les sous-matrices des autres $(p-1)$ groupes d'accès. En éliminant les courants $[I'_{es}]$ entre (81) et (82) on obtient la condition :

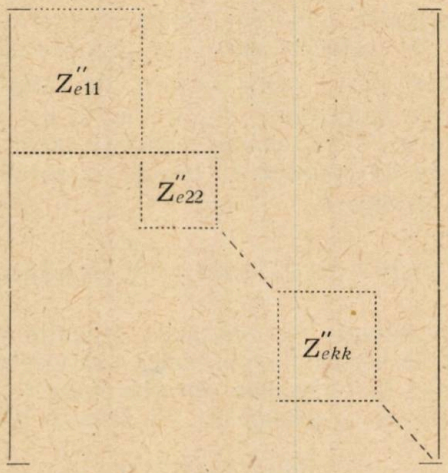
$$[E'_{ek}] - [Z'_{eks}][Z'_{ess}]^{-1}[E'_{es}] \gtrless 0 \qquad (83)$$

analogue à (21).

8. *La décomposition du multipôle à p groupes d'accès en p multipôles.* En diagonalisant la matrice $[Z'_e]$ en rapport aux sous-matrices $[Z'_{ekk}]$, le systhème des equation (78) se transforme en :

$$\begin{aligned}
&[E''_{e1}] - [U''_{e1}] = [Z''_{e11}]\,[I''_{e1}] \\
&[E''_{e2}] - [U''_{e2}] = \quad [Z''_{e22}]\,[I''_{e2}] \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&[E''_{ek}] - [U''_{ek}] = \quad [Z''_{ekk}]\,[I''_{ek}] \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&[E''_{ep}] - [U''_{ep}] = \quad [Z''_{epp}]\,[I''_{ep}]
\end{aligned} \tag{84}$$

qui représente un systhème de p multipôles à n_k accès ($k = 1,2, \ldots p$). La matrice $[Z''_e]$ a la forme Jordan par rapport *au* sous-matrice $[Z''_{ekk}]$:



et peut être représentée comme somme additive $(\dot{+})$;

$$[Z'_e] = [Z''_{e11}] \dot{+} [Z''_{e22}] \dot{+} \ldots \dot{+} [Z''_{ekk}] \dot{+} \ldots \dot{+} [Z''_{epp}]$$

Le schéma équivalent du multipôle à p groupes (fig. 5b) a été transformé en le schéma de la fig. 6a qui représente l'analogue du réseau réduit pour les multipôles.

9. *Les performances de transfert des multipôles à deux groupes d'accès.* Soit le multipôle passif de transfert (fig. 7a) à $(n + 1)$ bornes accessibles d'entrée et $(n + 1)$ de sortie. A l'entrée, le multipôle de transfert est connecté à un multipôle actif ayant $(n + 1)$ accès, et à la sortie à un multipôle passif à $(n + 1)$ accès. Le problème du transfert de la puissance active maxima, du multipôle actif générateur au multipôle passif récepteur, réside dans l'établissement des conditions d'adaptation pour que la puissance extraite soit maxima.

a) *Les équations matricielles des multipôles à deux groupes d'accès égaux,* sont :

$$[U'_{e1}] = [Z'_{e11}]\,[I'_{e1}] + [Z'_{e12}]\,[I'_{e2}] \tag{85}$$

$$[U'_{e1}] = [Z'_{e21}]\,[I'_{e1}] + [Z'_{e22}]\,[I'_{e2}]. \tag{86}$$

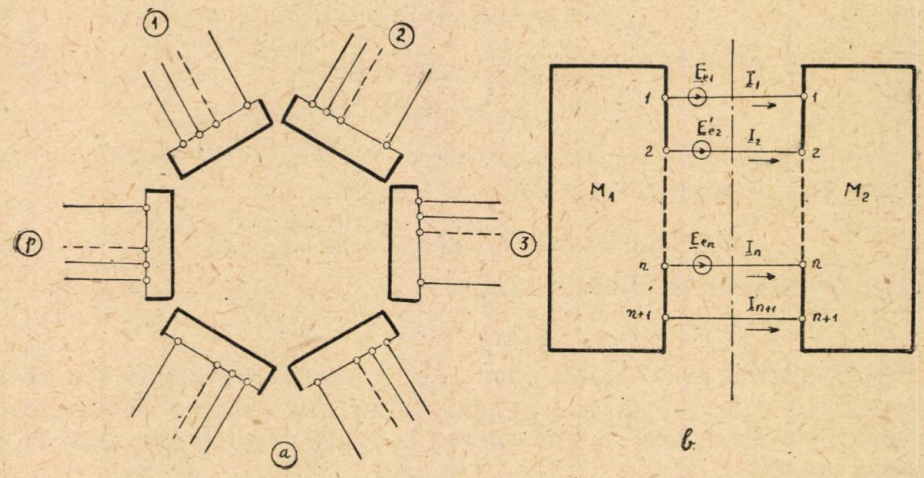


Fig. 6.

Analogue aux équations du quadripôle, on peut écrire les équations (85—86) :

$$[U'_{e1}] = [A]\,[U'_{e2}] + [B]\,]I'_{e2}] \tag{87}$$

$$[I'_{e1}] = [C]\,[U'_{e2}] + [D]\,[I'_{e2}] \tag{88}$$

d'où on déduit les valeurs des matrices $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$:

$$[A] = [Z'_{e11}]\,[Z'_{e12}]_t^{-1}; \quad [B] = [Z'_{e12}] - [Z'_{e11}]\,[Z'_{e12}]_t^{-1}\,[Z'_{22}]$$

$$[C] = [Z'_{e12}]_t^{-1}; \quad [D] = -[Z'_{e12}]_t^{-1}\,[Z'_{e22}] \tag{89}$$

respectivement :

$$[Z'_{e11}] = [A]\,[C]^{-1}; \quad [Z'_{e12}]\,[C]_t^{-1}; \quad [Z'_{e22}] = -[D]_t\,[C]_t^{-1}. \tag{90}$$

Étant donnée la relation :

$$[A]\,[D]_t - [B]\,[C]_t = [1] \tag{91}$$

les matrices $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$, ne sont pas indépendentes.

b) *Le théorème du transfert de la puissance active maxima entre deux multipôles.* Soit le multipôle actif M_1 à $(n + 1)$ bornes accesibles, ayant le vecteur de f. em. $[E'_e]$, le tenseur des impédances apparentes d'entrée et de transfert $[Z'_{ce}]$ interconnecté au multipôle passif M_2 ayant le tenseur

des impédances $[Z'_e]$ fig. 6b. Si $[U'_e]$, $[I'_e]$, sont les vecteurs des tensions et des courants aux accès, les équations de fonctionnement sont :

$$[E'_e] - [U'_e] = [Z'_{eo}]\,[I'_e] \tag{92}$$

$$[U'_e] = [Z'_e]\,[I'_e] \tag{93}$$

d'où en éliminant $[U'_e]$ résulte :

$$[E'_e] = ([Z'_{oe} + Z'_e])\,[I'_e] \tag{94}$$

c'est à dire la valeur du courant :

$$[I'_e] = ([Z'_{oe}] + [Z'_e])^{-1}\,[E'_e\,. \tag{95}$$

On obtient la puissance apparente en multipliant l'équation (86) au vecteur $[I'_e]$ de (88), c'est à dire :

$$S = [E'_e]_t\,[Z'_{oe} + Z'_e]_t^{-1}\,[Z'_e]\,[Z'_{ce} + Z'_e]^{-1}\,[E'_e]^* \tag{96}$$

et par conséquent la puissance active :

$$P = re\,(S).$$

L'expression (96), représentant une transformation bilinéaire de la matrice $[Z'_e]$,, par le vecteur : $[E'_e]_t\,[Z'_{oe} + Z'_e]_t^{-1}$, étant donc hermitique, il résulte que : $P = re\,(S)$, est donné par la transformation bilinéaire de la matrice $[re\,Z'_e]$:

$$P = [E'_e]_t\,[Z'_{oe} + Z'_e]_t^{-1}\,[re\,Z'_e]\,[Z'_{oe} + Z'_e]^{-1}\,[E'_e]^*. \tag{97}$$

La puissance maxima transmise par le multipôle M_1, au multipôle M_2, est obtenue du maximum de l'expression (97), par rapport à $[Z'_{oe}]$. Pour cela, il faudrait résoudre le systhème à $n(n+1)$ équations, résultant par l'annulation des derivées partielles de la puisance P, par rapport aux impédances apparentes, (c'est à dire par rapport à leurs parties réelles et imaginaires, ou par rapport aux modules et arguments) :

$$re\left(\frac{\partial P}{\partial Z'_{ejk}}\right)_{Z'_{ejk} = R'_{ejk},\ x'_{ejk}} = 0\,; \quad j, k = 1, 2 \ldots n.$$

La solution de ce systhème est particulièrement difficile, parce que les solutions ne sont pas toutes physiquement réalisables.

Nous donnons une démonstration directe à la base du réseau réduit. En supposant les deux multipôles déconnectés, on peut les décomposer en réseaux réduits à la forme canonique, par l'application des matrices triangulaires $[C_{\triangle 0}]$ et $[C_{\triangle}]$, sous la forme (49),-obtenues des matrices $[Z'_{eo}]$ et $[Z'_e]$ fig. 3be. Il résulte un systhème de n dipôles récepteurs et n dipôles générateurs, dont les équations sont :

$$\underline{E}''_{ej} - \underline{U}''_{ej} = \underline{Z}''_{eoj}\,\underline{I}''_{ej}$$

pour les dipôles générateurs, et :

$$\underline{U}''_{ej} = \underline{Z}''_{ej}\,\underline{I}''_{ej}\,; \quad j = 1, 2 \ldots n$$

pour les récepteurs. Les conditions d'interconnexion des dipôles exigent l'identité des tensions $\underline{U}''_{ej}$ et des courants $\underline{I}''_{ej}$ de (97), (98) et — par conséquent l'identité des matrices triangulaires $[C_{\triangle 0}]$, $[C_{\triangle}]$ qui les transforment :

$$[C_{\triangle 0}] = [C_{\triangle}]$$

et donc :

$$\underline{Z}'_{eojk} = \underline{Z}'_{ejk}\ ;\quad j, k = 1, 2 \ldots n.$$

Les conditions de transfert entre dipôles, demandent supplémentairement :

$$\underline{Z}'_{eojk} = \underline{Z}'^{*}_{ejk} \tag{98}$$

c'est à dire :

$$[Z'_{eo}] = [Z'_{e}]^{*} \tag{99}$$

qui représente la condition du transfert de la puissance active maxima. En introduisant dans (97), il résulte :

$$P_{max} = \frac{1}{4}[E'_e]_t\,[R'_e]^{-1}\,[E'_e]^{*} \tag{100}$$

où l'on a noté :

$$re\,[Z'_e] = [R'_e]. \tag{101}$$

On a demontré le théorème : un réseau électrique actif, dont le tenseur des impédances apparentes de sortie est $[Z'_{eo}]$ interconnecté en cascade à un réseau passif, ayant le tenseur des impédances apparentes d'entrée $[Z'_e]$, débite une puissance active maxima, quand les deux tenseurs sont égaux et complexes conjugués, le rendement étant 1/2.

c) *L'extraction de la puissance maxima, par les multipôles de transfert.* Connaissant les conditions de transfert de la puissance maxima entre deux multipôles directement connectés, passons à la détermination des conditions de transfert, par le multipôle de transit, M_T, fig. 7. Les équations matricielles des multipôles M_A, M_T, M_P sont :

$$M_A\ ;\quad [E'_{eo}] - [U'_{e1}] = [Z'_{eo}]\,[I'_{e1}] \tag{102}$$

$$M\ ;\quad [U'_{e1}] = [A]\,[U'_{e2}] + [B]\,[I'_{e2}] \tag{103}$$

$$[I'_{e1}] = [C]\,[U'_{e2}] + [D]\,[I'_{e2}] \tag{104}$$

$$M\ ;\quad [U'_{e2}] = [Z'_{e2}]\,[I'_{e2}] \tag{105}$$

En éliminant les vecteurs $[U'_{e1}]$ et $[I'_{e1}]$ entre (92), (93), (94) on obtient :

$$[A + Z'_{eo}\,C]^{-1}\,[E'_{eo}] - [U'_{e2}] = [A + Z'_{eo}\,C]^{-1}\,[B + Z'_{eo}\,D]\,[I'_{e2}]. \tag{106}$$

L'equation (106) représente le multipôle M_4, équivalent à M_A et M_T vus des bornes secondaires du M_T, et où :

$$[E'_{e4}] = [A + Z'_{eo}\,C]^{-1}\,[E'_{eo}] \tag{107}$$

est le vecteur des forces electromotrices apparentes, et :

$$[Z'_{e4}] = [A + Z'_{eo}\,C]^{-1}\,[B + Z'_{eo}\,D] \tag{108}$$

est le tenseur des impédances apparentes de transfert vu des bornes de sortie. La puissance active transférée au multipôle M_P, est maxima quand :

$$[Z'_{e3}]^* = [Z'_{e4}] = [A + Z'_{eo}\,C]^{-1}\,[B + Z'_{eo}\,D] \tag{109}$$

et a la valeur :

$$P_{max} = \frac{1}{4}\,[E'_0]_t\,\{re[A+Z'_{eo}C]_t^{-1}\,[B+Z'_{eo}D]^{-1}\,[A+Z'_{eo}C]\,[A^*+Z'^{*}_{eo}\,C^*]\}[E'_{eo}]^*. \tag{110}$$

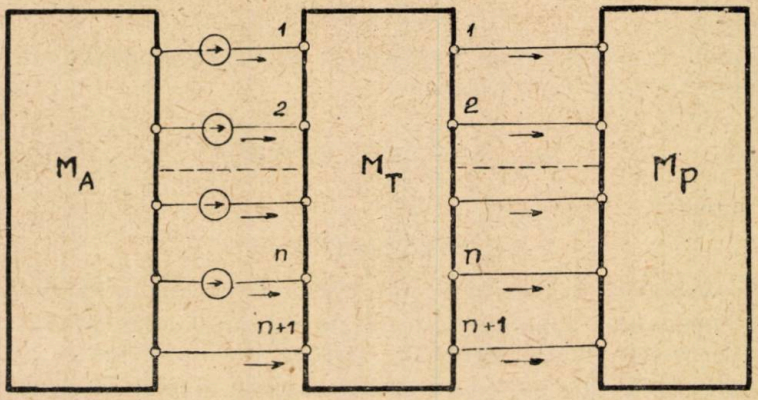


Fig. 7.

Le maximum de la puissance extraite, correspond au maximum de la forme quadratique de la matrice :

$$re\,\{[A+Z'_{eo}\,C]_t^{-1}\,[B+Z'_{eo}\,D]^{-1}\,[A+Z'_{eo}\,C]\,[A^*+Z'^{*}_{eo}\,C^*]\}. \tag{111}$$

Applications. a) *Le transfert de la puissance maxima entre le tripôle actif connecté en cascade avec le tripôle passif.* Les équations de fonctionnement du tripôle sont :

$$\begin{aligned} \underline{E}'_{e1} - \underline{U}'_{e1} &= \underline{Z}'_{eo11}\,\underline{I}'_{e1} - \underline{Z}'_{eo12}\,\underline{I}'_{e2} \\ \underline{E}'_{e2} - \underline{U}'_{e2} &= \underline{Z}'_{eo21}\,\underline{I}'_{e1} - \underline{Z}'_{eo22}\,\underline{I}'_{e2} \end{aligned} \tag{112}$$

pour le tripôle actif, et :

$$\begin{aligned} \underline{U}'_{e1} &= \underline{Z}'_{e11}\,\underline{I}'_{e1} + \underline{Z}'_{e12}\,\underline{I}'_{e2} \\ \underline{U}'_{e2} &= \underline{Z}'_{e21}\,\underline{I}'_{e1} + \underline{Z}'_{e22}\,I'_{e2} \end{aligned} \tag{113}$$

pour le tripôle pasif. La puissance électrique absorbée par le tripôle passif, est :

$$P = re\,\{[E'_e]_t\,[Z'_{oe} + Z'_e]^{-1}\,[Z'_e]\,[Z'_{oe} + Z'_e]^{*-1}\,[E'_e]^*\}. \tag{114}$$

On démontrera directement, que l'on annule les derivées partielles, en rapport aux impédances apparentes d'entrée Z'_{e11}, Z'_{e22} et de transfert Z'_{e12}, Z'_{e21}, pour les valeurs (99). Par la règle de dérivation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[A]^{-1} = -[A]^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[A]\right\}[A]^{-1} = -[A]^{-1}[\dot{A}_x][A]^{-1}$$

résulte :

$$re\left(\frac{\partial P}{\partial Z'_{e11}}\right)_{R'_{e11},\ X'_{e11}} = re\left\{-[E'_e]_t[Z'_{eo}+Z'_e]^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial Z'_{e11}}[Z'_e]\right)+\right.$$

$$+[Z'_{oe}+Z'_e][Z'_e][Z'_{oe}+Z'_e]^{*-1}[E'_e]^* + [E'_e]_t[Z'_{oe}+Z'_e]^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial Z'_{e11}}[Z'_e]\right)+$$

$$[Z'_{eo}+Z'_e]^{*-1}[E'_e]^* - [E'_e]_t[Z'_{oe}-Z'_e]^{-1}[Z'_e][Z'_{oe}+Z'_\partial]^{*-1}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial Z'_{e11}}[Z'_e]^*\right)^{-1}[Z'_{eo}+Z'_e]^{*-1}[E'_e]^*\right\}.$$

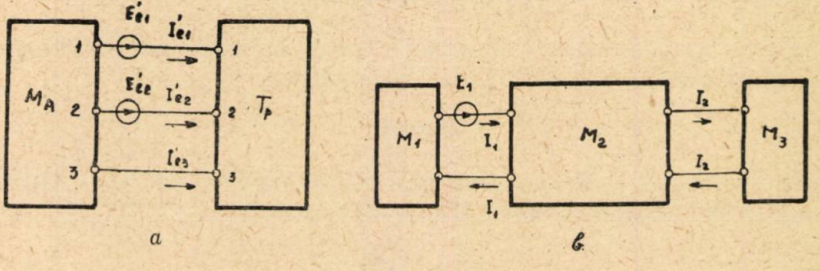


Fig. 8.

La matrice $\frac{\partial}{\partial Z'_{e11}}[Z'_e]$, a tous les termes nuls, sauf le premier terme égal à l'unité. La valeur de l'expression (115), pour ; $]Z'_{eo}] = [Z'_e]$, devient :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Z'_{e11}}\right)_{R'_{e11},\ X'_{e11}} = 0 \qquad (116)$$

vérifiant ainsi le théorème du transfert de la puissance maxima.

Observation. Les équations du régime externe du tripôle (112) sont identiques aux équations du quadripôle.

b) *Le transfert de la puissance maxima par le quadripôle.* Pour le quadripôle passif de transfert (fig. 8b) la condition d'adaptation (111), devient :

$$P_{max} = \frac{1}{4}\frac{\underline{E}_o}{re\,(\underline{A}^* + \underline{Z}^*_{eo}\,\underline{C}^*)(\underline{B} + \underline{Z}_{eo}\,\underline{D})} \qquad (117)$$

et on déduit [3] :

$$re\,(\underline{A}^* + \underline{Z}^*_{eo}\,\underline{C}^*)(\underline{B} + \underline{Z}_{eo}\,\underline{D}). \qquad (118)$$

Conclusions. L'étude matricielle et tensorielle des régimes électriques et magnétiques des réseaux électriques, met en évidence des propriétés des multipôles analogues à plusieurs points de vue aux propriétés des dipôles et des multipôles.

a) Si, par un élément $\underline{Z}$ d'une réseau électrique, on exprime le théorème Thévenin sous la forme :

$$\underline{I} = (\underline{Z} + \underline{Z}_o)^{-1} \underline{E}_o$$

pour le multipôle actif, $[E_o]$, $[Z_o]$, interconnecté au multipôle passif $[Z]$, on exprime le même théorème Thévenin, d'une manière similaire, sous la forme :

$$[I] = [Z + Z_o]^{-1} [E_o].$$

b) Si, pour un element $\underline{Y}$ d'un réseau électrique, on exprime le théorème Norton sous la forme :

$$\underline{U} = (\underline{Y} + \underline{Y}_o)^{-1} \underline{I}$$

par analogie, pour les multipôles :

$$[U] = [Y + Y_o]^{-1} [I].$$

c) Si le transfert de la puissance maxima, entre un dipôle générateur $\underline{Z}_o$ et un autre récepteur $\underline{Z}$, a lieu quand :

$$\underline{Z}_o = \underline{Z}^*$$

analogue, le transfert de la puissance active maxima, entre le multipôle actif $[Z_o]$ et le multipôle passif $[Z]$, a lieu quand :

$$[Z_o] = [Z]^*.$$

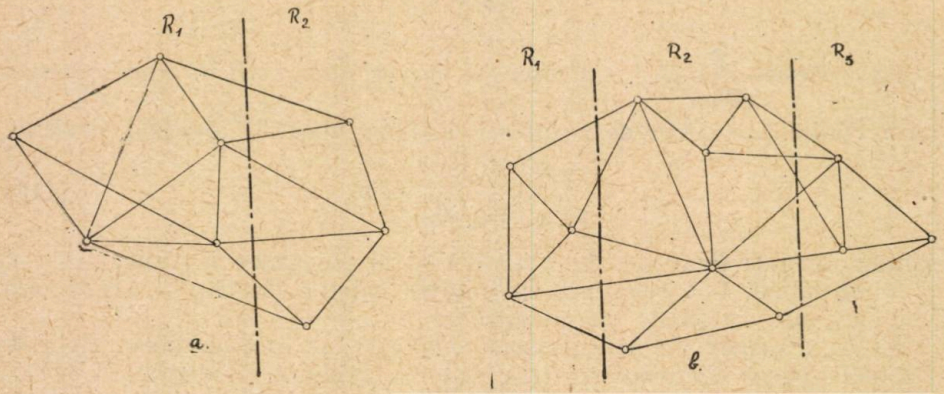


Fig. 9.

Il résulte donc, que par analogie au générateur de tension et au générateur de courant (respectivement la source dipolaire de tension et la source dipolaire de courant) avec le schéma de la fig. 2a, on peut formuler „la source multipolaire de tension et la source multipolaire de courant" avec les schémas des fig. 2bc.

Les théorèmes du transfert de la puissance par les multipôles, mènent au corolaire :

— en sectionnant un réseau R en deux sous — réseaux R_1 (actif) et R_2 (passif) (fig. 9a), les deux sous-réseaux échangent de la puissance active maxima, si les impédances apparentes et de transfert, mesurées entre les bornes libres, sont égales et complexe conjuguées.

— en sectionnant un réseau électrique R, en trois sous-réseau R_1 (actif) et R_2, R_3, (passifs) (fig. 9b), le transfert de la puissance active maxima, par R_2, est conditionné par le maximum de la forme quadratique de la matrice (111).

La Chaire d'Electrotechnique
L'Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE.

1. *Vornov R. A.* — Obşceaia teoria cetîrehpolivsnikov, Moscova 1951.
2. *Kron G.* Tensor analysis of networks, New-York, 1939.
3. *Torben Laurent.* Vierpoltheorie und frequenztransformation Berlin 1956.
4. *Bayard M.* Théorie des réseaux de Kirchhoff, Paris 1954.
5. *N. Sotirescu* et *M. Leon.* Concernant les conditions pour définir le quadripôle linéaire passif, — Bulletin A.M.T. Bucarest, 1956.
6. *Mocanu C.* Un théorème dans l'étude des réseaux électriques à l'aide du calcul matriciel, Études et recherches d'énergétique Acad. R.P.R. 1956.
7. *Mocanu C.* L'isomorphisme des structures électriques, — Bulletin A.M.T. Bucarest 1957.
8. *Mocanu C.*, Une théorie unitaire des schémas équivalents, par transformation topologique, Electrotehnica V (1957) no. 12, p. 405.

ВКЛАД К ИЗУЧЕНИЮ ЛИНЕИНЫХ, АКТИВНЫХ И ПАСИВНЫХ МНОГОПОЛЮСОВ

(Краткое содержание)

Изучение электрических сетей, при учете общх параметров и их свойств не возможно провести в мение охватывющх условиях аналитических методов исчисления.

Применение матричекого исчисления и соображения по тензориальному анализу, ведут, кроме прочих, к интересным результатам в иследываний множественых открытых сетей, что касаитея условий реализаций и пасивизаций переводных своиств и. пр. известным в литературе только по частному случаю четырехполюса.

В этой работе установливается прн помощи матрических исчеслений, основныя матрическия уровнение активных линейных, псевдоактивных и пасивных многополюсов в вариантах нортона знакй эквивалентностий, теоремы пасивизаций, условия реализаций пасивных многополюсов и переводныя своиства, извлечение максимального корня для переводных сетей.

CONTRIBUTIONS TO THE STUDYING ACTIVE AND PASSIVE LINEAR MULTIPOLES.

(Summary)

The study of electrical networks, in which the full parameters and their properties as a whole have to be taken into account, cannot be

achieved under the less comprehensive conditions of the analytical computing methods.

The use of the matrix calculation and considerations of tensorial analysis methods have lead to interesting results in the research of the behaviour of free (multipole) networks, concerning the possibility of realization and passivizity, the transfer properties and so on, generally known for the particular case of the 4-pole. In this paper is being determined, by means of matrix calculus, the basic matricial equations of the linear active and passive multipoles in Thevenin and Norton modifications, the passivization theorems, the equivalent schemes, and the transfer and extraction performances of the maximum force for transfer networks.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES MULTIPOLES LINEAIRES ACTIFS ET PASSIFS

(Résumé)

L'étude des réseaux électriques, dans laquelle on tient compte des paramètres globaux et leurs propriétés d'ensemble, ne peut être faite dans les conditions moins large des méthodes analytiques.

L'application du calcul matriciel et des considérations d'analyse tensorielle, mènent d'autre part à des résultats interessants dans la recherche du comportement, des réseaux ouverts (multipôles) concernant les conditions de réalisabilité et passivisation, propriétés de transfert, — connues dans la littérature seulement pour le cas particulier du quadripôle.

Dans cette étude, on établit, par calcul matriciel ; les équations matricielles fondamentales des multipôles actifs lineaires pseudo-actifs et passifs dans les variantes Thevenin — Norton, les schémas équivalents et les théorèmes de passivisation, les conditions de réalisabilité des multipôles passifs, et les performances de transfert et d'éxtraction de la puissance maxima, pour les réseaux de transfert.

BEITRÄGE ZUM STUDIUM DER AKTIVEN UND PASSIVEN LINEAREN MEHRPOLE

(Zusammenfassung)

Das Studium der elektrischen Netze, wobei die Vollparameter und deren Gesamteigenschaften berüsksichtigt werden sollen, kann in den weniger umfassenden Bedingungen de analytischen Rechenmethoden nicht unternommen werden.

Die Anwendung der „Matrizialberechnung und Tensoranalyse erwägungen führen jedoch zu interessanten Ergebnissen in der Untersuchung des Verhaltens der freien (Mehrpol) Netze, in Bezug auf Verwirklichungsmölichkeit und Passivisierung, auf die Verlegung u.s.f., die im allgemeinen für den besonderen Fall des Mehrpols bekannt sind. In der vorliegenden Arbeit, wird durch die Matrizialberechnung die Matrizialgrundgleichungen der linearen aktiven un pasiven Mehrpole in den Thevenin — und Norton Varianten, die äquivalenten Schemata, die Passivisierungslehrsätze und die Verlegungs — und Ausnutzungsleistungen der Höchstkraft für Verlegungsnetze — festgelegt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

ELECTRONICA

621.396.645.1

NOTĂ ASUPRA APROXIMĂRII MATEMATICE A CARACTERISTICILOR DINATRON ȘI TRANZITRON

de REINHARD PIRINGER

Pentru studiul analitic al oscilatorilor electronici care utilizează un organ cu rezistență negativă, cît și pentru studiul stabilității acestora, este necesară cunoașterea unei relații matematice care să aproximeze satisfăcător caracteristica curent-tensiune ridicată experimental. În cele ce urmează ne vom ocupa numai de aproximarea caracteristicilor de rezistență negativă în formă de N, adică la care trecerea de la rezistența diferențială pozitivă la cea negativă și invers se face prin valoarea $\pm \infty$ (punctele A și B în fig. 1). Asemenea caracteristici în N se obțin de exemplu cu ajutorul unei tetrode în regim dinatron ($u_a < u_e$), cu ajutorul unei pentode tranzitron (cuplarea supresorului cu ecranul dă naștere unei caracteristici N în circuitul de ecran) sau cu circuitul simetric cu două triode din figura 2 (între punctele B_1 și B_2 se obține o caracteristică N). Orice element cu caracteristică N poate servi, prin legarea în paralel a unui circuit acordat derivație, la producerea oscilațiilor [1].

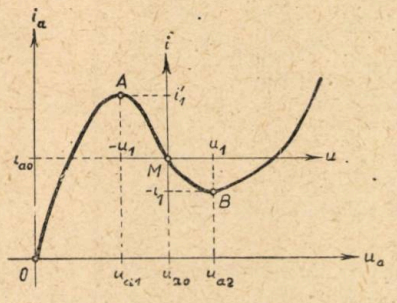


Fig. 1. Caracteristică în formă de N cu rezistență diferențială negativă.

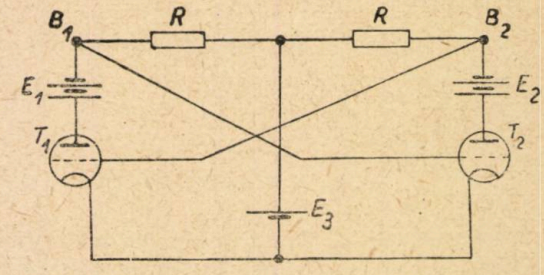


Fig. 2. Circuit simetric cu două triode

Pentru a utiliza cît mai bine porțiunea de rezistență diferențială negativă (AB, fig. 1), punctul static de funcționare se alege de obicei la mijlocul acestei porțiuni, adică la o tensiune

$$u_{a0} = \frac{u_{a1} + u_{a2}}{2}.$$

Ecuația de aproximare a caracteristicii în vederea studiului oscilațiilor în jurul punctului static M (u_{a0}, i_{a0}), va trebui scrisă în modul cel

mai convenabil față de un sistem de axe i, u cu originea în M, astfel încît:

$$u = u_a - u_{a0}; \qquad i = i_a - i_{a0}.$$

În literatura tehnică [1, 2] se indică aproximarea caracteristicilor N printr-o ecuație de gradul trei în care lipsește termenul de gradul doi, adică de forma:

$$i = -au + bu^3. \tag{1}$$

Această ecuație este reprezentată în figura 3, în care se indică și legătura între coeficienții ecuației și diferite mărimi caracteristice ale curbei. Curba este simetrică față de originea M.

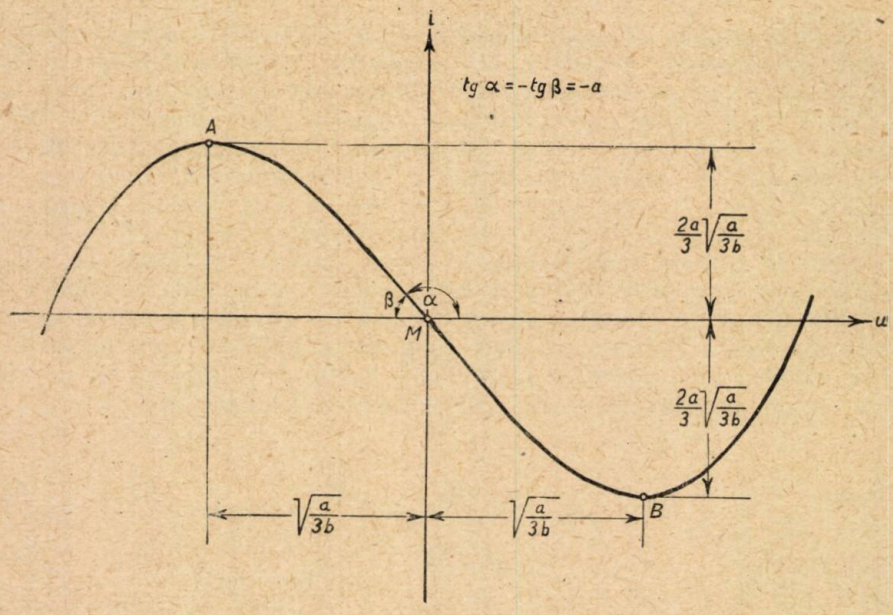


Fig. 3. Reprezentarea grafică a curbei $i = -au + bu^3$.

Încercînd să aproximăm caracteristicile N printr-o asemenea ecuație, ne-am referit mai întîi la caracteristica $i = f(u)$ din figura 4 (curba *1*) obținută între punctele B_1, B_2 ale montajului reprezentat în figura 2. Tuburile T_1, T_2 au fost formate de cele două secțiuni ale dublei triode 6 N 7, condițiile de lucru fiind: $R = 1\ k\Omega$, $E_1 = 250$ V, $E_3 = 0$. Curba aproximantă *2* trasată în figura 4 pe baza ecuației de mai sus este suficient de apropiată de curba experimentală, atît în regiunea de rezistență diferențială negativă cît și pozitivă, astfel încît la studiul oscilatorului bazat pe acest montaj putem să ne așteptăm la rezultate experimentale puțin diferite de rezultatele teoretice obținute prin înlocuirea curbei reale *1* cu curba de aproximare *2*. Făcîndu-se această verificare în ceea ce privește stabilitatea frecvenței oscilatorului, s-a obținut într-adevăr o concordanță satisfăcătoare între valorile experimentale și cele teoretice [3].

De altfel, era de așteptat ca ecuația (1), care este simetrică, să poată aproxima satisfăcător curba experimentală a montajului reprezentat în figura 2, curba trebuind să fie practic simetrică prin natura montajului. În realitate, tuburile T_1 și T_2 (cele două secțiuni ale dublei triode 6 N 7) și celelalte elemente ale montajului nu sînt chiar identice și de aceea, de fapt, curba experimentală *1* din figura 4 nu este perfect simetrică.

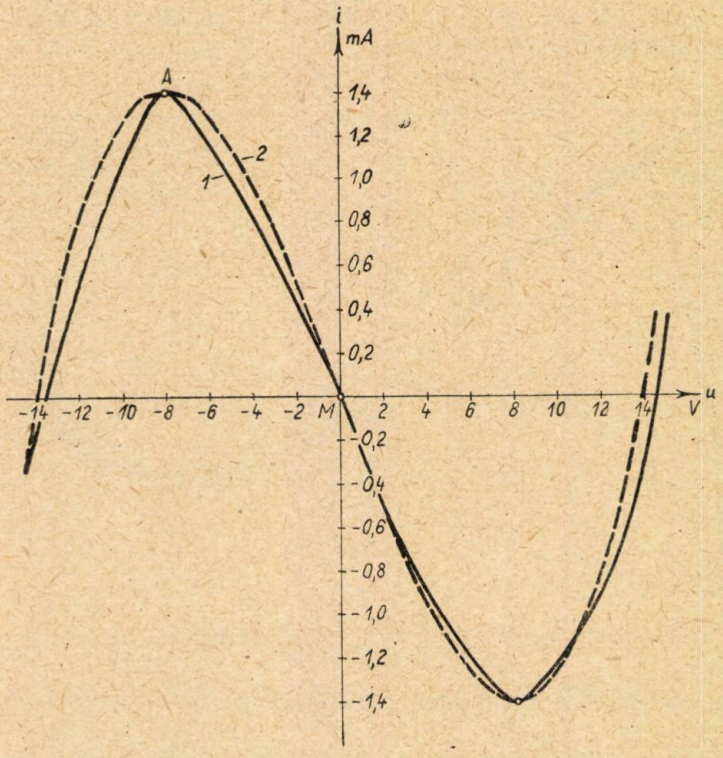


Fig. 4. Caracteristica curent-tensiune a circuitului simetric și aproximarea ei: *1* — curba experimentală; *2* — curba de aproximare de gradul trei

Trecînd acum la aproximarea unor caracteristici dinatron sau tranzitron, observăm în primul rînd că aceste caracteristici nu sînt simetrice față de punctul *M* (fig. 1). De aceea aproximarea prin ecuația (1) va fi probabil nesatisfăcătoare.

Pentru a putea studia un oscilator folosind o asemenea caracteristică, ne propunem aproximarea caracteristicii dinatron obținută cu pentoda 6 J 7 avînd supresorul legat la ecran, în condițiile: $u_g = -2$V, $u_{e+s} = 110$V. Curba experimentală este reprezentată în figura 5 (curba I_1), iar curba aproximantă pe baza ecuației (1) este curba *2*. Această curbă nu trece prin punctul *M*, deoarece am impus curbei să treacă prin punctele *A* și *B*, în care să aibă tangente orizontale (ca și curba reală), și de aceea în ecuația (1) a trebuit să fie adăugat un termen liber, care dă ordonata la origine a curbei *2*. Această curbă se depărtează mult prea

mult de curba reală, atît în regiunea *AB* cît și în afara ei. De aceea ea nu poate da satisfacție.

În consecință, am căutat o aproximare mai bună prin curbe de grad trei cu toți termenii sau de grad superior (patru, cinci și șase), impunînd de fiecare dată anumite condiții. Am urmărit să fie aproximată nu numai regiunea *AB*, ci și porțiunile din afara ei, căci alura acestor porțiuni intervine în limitarea oscilațiilor și stabilirea amplitudinii lor și anume cu atît mai mult, cu cît depășirea limitei de amorsare a oscilațiilor este mai mare. Aceste porțiuni intervin de asemenea în stabilitatea frecvenței și amplitudinii oscilațiilor.

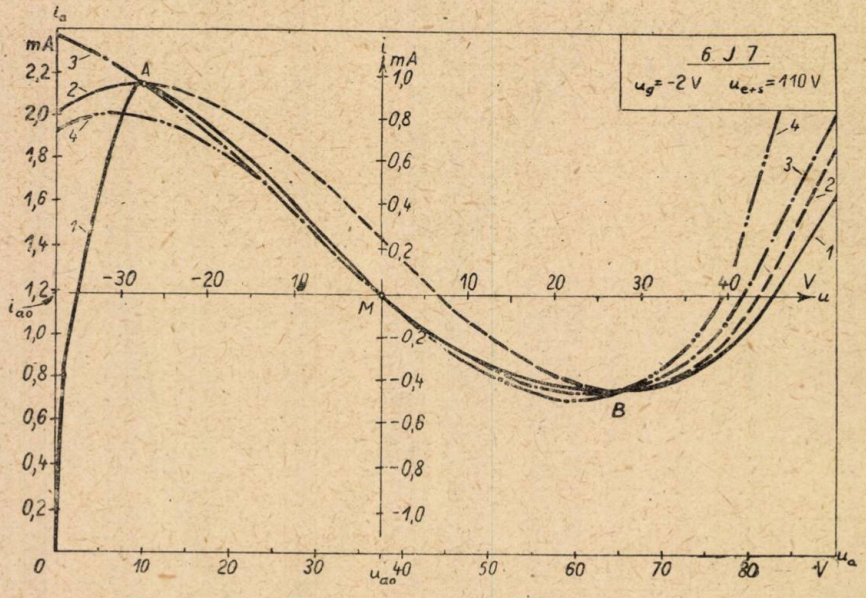


Fig. 5. Caracteristică dinatron (*1*) și curbele de aproximare de grad trei (*2, 3, 4*).

Curbele trasate sînt următoarele (pe fiecare figură s-a repetat curba reală *1* pentru comparație):

A. *Curbe de grad trei* (fig. 5).

curba *2*: curbă simetrică (ecuația (1) cu termen liber, lipsind termenul de grad doi) trecînd prin *A* și *B* și avînd în aceste puncte tangentele orizontale ca și curba reală;

curba *3*: curbă trecînd prin *A*, *M*, *B* și avînd în *M* aceeași tangentă ca și curba reală;

curba *4*: curbă avînd suma minimă a erorilor pătratice în șase puncte:

$$u = \pm 10\,;\ \pm 20\,;\ \pm 30\ \text{V}.$$

B. *Curbe de grad patru* (fig. 6).

curba *5*: curbă trecînd prin punctele *A*, *M*, *B* și avînd în *A* și *B* aceeași tangentă (orizontală) ca și curba reală;

curba *6* : curbă avînd suma minimă a erorilor pătratice în opt puncte: $u = \pm 10$; ± 20; $\pm 27{,}5$; ± 30 V.

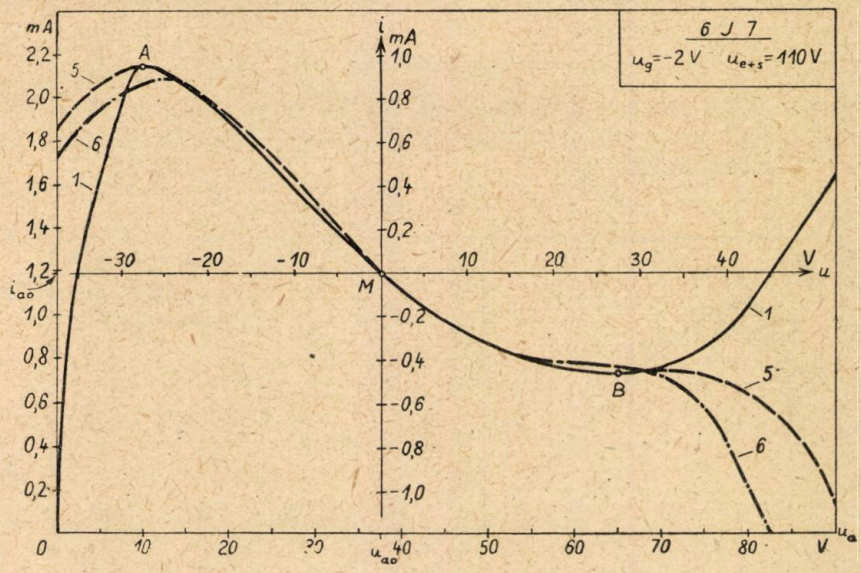


Fig. 6. Caracteristică dinatron (*1*) și curbele de aproximare de grad patru (*5, 6*).

C. *Curbe de grad cinci* (fig. 7).

curba *7* : curbă trecînd prin punctele *O, A, B, M* și avînd în *A* și *B* aceeași tangentă (orizontală) ca și curba reală;

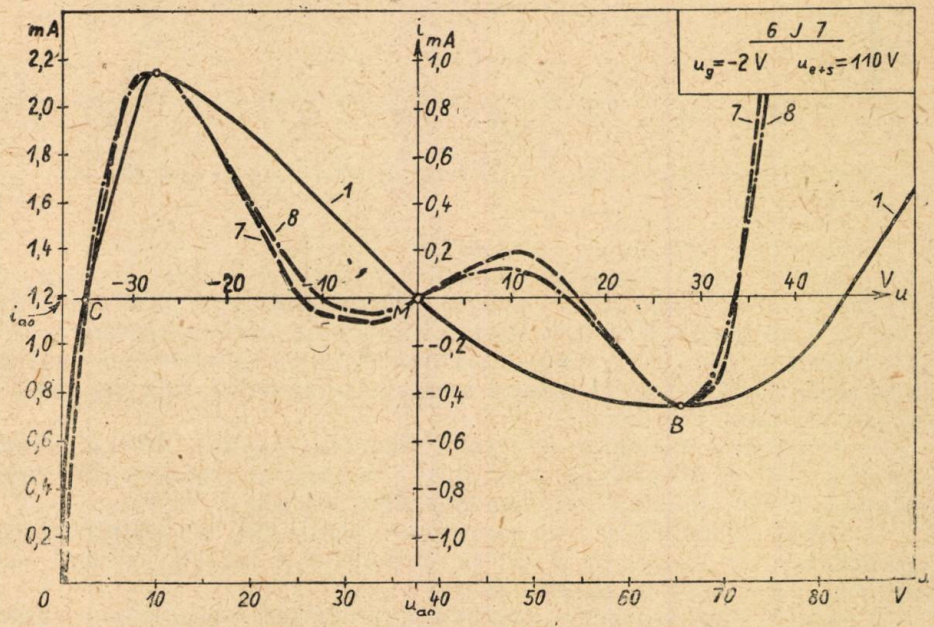


Fig. 7. Caracteristică dinatron (*1*) și curbele de aproximare de grad cinc (*7, 8*).

curba *8*: curbă trecînd prin punctele *C* ($u = -35$ V, $i = 0$, unde curba reală intersectează axa absciselor), *A*, *B*, *M* și avînd în *A* și *B* aceeași tangentă (orizontală) ca și curba reală.

D. *Curbe de grad șase* (fig. 8).

curba *9*: curbă trecînd prin punctele *A*, *M*, *B* și avînd în *A* și *B* aceeași tangentă (orizontală) și aceeași rază de curbură ca și curba reală.

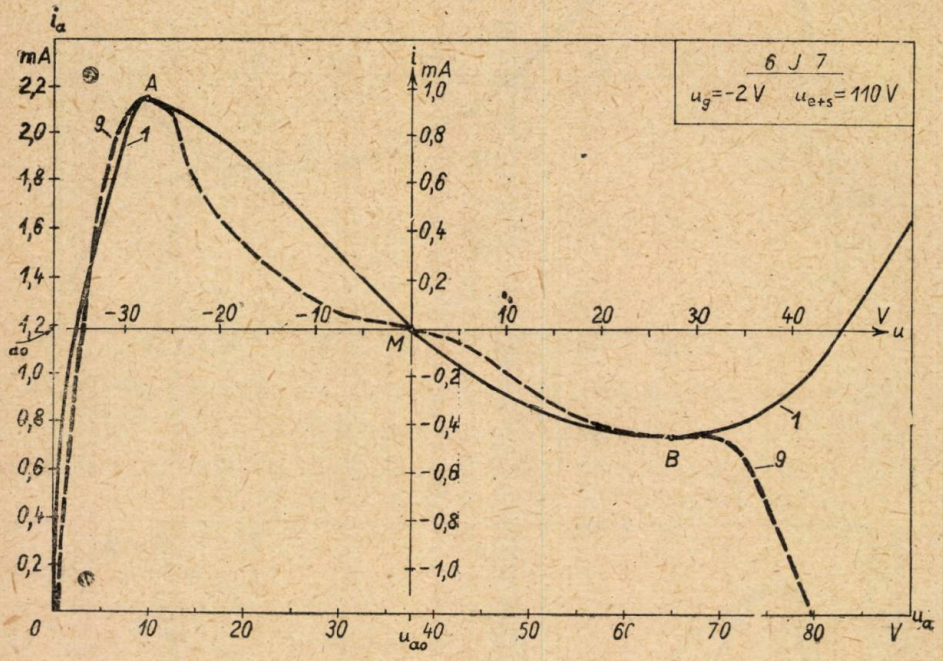


Fig. 8. Caracteristică dinatron (*1*) și curba de aproximare de grad șase (*9*).

Din curbele trasate se constată următoarele:

— nu se poate aproxima satisfăcător decît regiunea *AB*, curbele cele mai favorabile din acest punct de vedere fiind curba *3* de grad trei și curba *5* de grad patru. Din aceste două curbe, curba *5* trebuie preferată, deoarece imediat la stînga punctului *A* ea se apropie mai mult de curba reală (căci are în *A* aceeași tangentă orizontală), față de curba *3* care are cu totul altă alură;

— aproximînd mai bine porțiunile din afara regiunii *AB* (și anume porțiunea *OA*) prin curbe de grad cinci sau șase, în regiunea *AB* curba prezintă oscilații, fiind cu totul inacceptabilă (curbele *7*, *8*, *9*);

— cauza dificultăților de aproximare rezidă în nesimetria curbei experimentale, în special în faptul că în punctul *A* raza de curbură este mult mai mică decît în punctul *B*.

O caracteristică tranzitron prezintă o nesimetrie asemănătoare caracteristicii dinatron și deci vor exista aceleași dificultăți în aproximarea ei.

În concluzie, la studiul oscilatorilor dinatron și tranzitron, folosind aproximarea caracteristicii sub forma unui polinom, nu ne putem aștepta decît la rezultate cu totul calitative în ceea ce privește amplitudinea oscilațiilor, stabilitatea amplitudinii și stabilitatea frecvenței lor, mai ales dacă limita de amorsare este mult depășită.

Dacă oscilatorul lucrează la limita de amorsare sau cu o mică depășire a ei (adică funcționarea se limitează la regiunea AB a curbei), atunci pot fi obținute și rezultate cantitative aproximative. În acest caz, se recomandă să se aproximeze curba experimentală printr-o curbă de grad patru (curba 5 din fig. 6) trecînd prin punctele de maxim și minim A și B și prin punctul M cu abscisa la mijlocul distanței dintre abscisele punctelor A, B și avînd în A, B aceeași tangentă (orizontală) ca și curba reală. Ecuația are forma:

$$i = au + bu^2 + cu^3 + du^4 \tag{2}$$

și folosind notațiile din figura 1, se poate găsi prin calcule simple că valorile coeficienților sînt dați de:

$$a = -\frac{3}{4}\cdot\frac{i_1' - i_1}{u_1}; \qquad b = \frac{i_1' + i_1}{u_1^2};$$
$$c = -\frac{i_1' - i_1}{4u_1^3}; \qquad d = -\frac{i_1' + i_1}{2u_1^4}. \tag{3}$$

Astfel, cu ajutorul relațiilor (3) se poate găsi ușor ecuația (2) de grad patru care aproximează destul de bine regiunea AB a unei caracteristici dinatron sau tranzitron. Este însă necesar să se verifice, pentru fiecare caz în parte, dacă aproximarea este satisfăcătoare.

Din contră, pentru studiul oscilatorilor dinatron și tranzitron la care limita de amorsare este sensibil depășită, intervenind în funcționare porțiunile din afara regiunii AB a caracteristicii, este necesar să se folosească metode grafice bazate pe caracteristica experimentală sau să se găsească o aproximare prin funcțiuni mai complicate (nu printr-un simplu polinom).

Catedra de tuburi electronice și tehnică nucleară
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *T. Tănăsescu:* — Manual de tuburi și circuite electronice, vol. III. Editura Academiei R.P.R., București, 1957, pag. 214—216 și 233.
2. *B. P. Aseev:* — Bazele radiotehnicii. Editura energetică de stat, București, 1952, pag. 542 și 558.
3. *D. Bernstein:* — Asupra stabilității frecvenței unui oscilator cu rezistență negativă. Automatica și electronica I (1957) nr. 4, pag. 159.

К АНАЛИТИЧЕСКОЙ АПРОКСИМАЦИИ ДИНАТРОННЫХ И ТРАНЗИТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

(Краткое содержание)

В основе некоторых экспериментальных характеристик, рассматриваются трудности при лучшем апроксимации динатронных и транзитронных характеристик через многочлен до шестой степени. Показывается в каких случаях может быть использовано одно или другое привлижение для исследования динатронных и транзитронных осциллыторов.

NOTE CONCERNING THE ANALYTICAL APPROXIMATION OF DYNATRON AND TRANSITRON CHARACTERISTICS

(Summary)

Based on characteristics obtained experimentally, the paper presents the difficulties encountered while trying a better approximation of the dynatron and transitron characteristics with a superior degree polynome developped till the sixth degree. Indications are given which approximation should be used in each case while studying dynatron and transitron oscillators.

NOTE SUR L'APPROXIMATION MATHÉMATIQUE DES CARACTÉRISTIQUES DYNATRON ET TRANSITRON

(Résumé)

En partant des caractéristiques expérimentelles, on présente les difficultés intervenant lorsque on veut obtenir une meilleure approximation des caractéristiques dynatron et transitron par un polynome de degré supérieur, jusqu'au sixième. On indique les cas où peut être utilisée l'une ou l'autre des approximations pour l'étude des oscillateurs dynatron et transitron.

NOTE ÜBER MATHEMATISCHE ANNÄHERUNGSAUSDRÜCKE FÜR DYNATRON UND TRANSITRON-KENNLINIEN

(Zusammenfossung)

Auf Grund von experimentell aufgenommenen Kennlinien werden die Schwierigkeiten hervorgehoben, die auftreten, wenn man eine bessere Annäherung für Dynatron und Transitron-Kennlinien durch Polynome höheren Grades (bis zum sechsten) verfolgt. Es wird angegeben, in welchen Fällen der eine oder andere Annäherungsausdruck für die Untersuchung von Dynatron und Transitron-Oszillatoren verwendet werden kann.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 2

UNDE ELECTROMAGNETICE

538

ON INHOMOGENEOUS ELECTROMAGNETIC WAVES

by EDMOND NICOLAU and ANDREI DOBRESCU

1. This paper describes some fundamental properties of inhomogeneous electromagnetic waves.

Some considerations are given on the elementary theory of inhomogeneous scalar waves, and of inhomogeneous plane electromagnetic waves. The important part of the paper is the formulae showing the relations between the vectors of the field, which is considered to be harmonic in time.

2. In source-free space, the field equations read:

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \overline{H} = \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \overline{D} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \overline{H} = 0. \tag{4}$$

Between the four vectors $\overline{E}$, $\overline{B}$, $\overline{D}$, $\overline{H}$ there are but two independet relations

$$\overline{D} = D(\overline{E}) \qquad \overline{H} = H(\overline{B}).$$

If the medium is isotropic and linear,

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} \qquad \overline{H} = \frac{1}{\mu} \overline{B}$$

so that we have only two independent vectors in the field. Upon elimination of the terms in $\overline{B}$, the vector $\overline{E}$ is found to satisfy the equation

$$\Box \overline{E} = 0 \tag{5}$$

$$\Box = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t^2}.$$

Equation (5) is valid for homogeneous mediums; v is the velocity of the wave.

A similar elimination of $\overline{E}$ leads to an identical equation for $\overline{H}$.

The simplest solutions of the wave eguations are the plane waves, represented by functions that depend upon the time and a single space coordinate 3 measured along a line whose direction is defined by the unit vector $\bar{n}$.

In virtue of the relations

$$\bar{E} = \bar{E}(3, t), \qquad \bar{H} = \bar{H}(3, t) \tag{6}$$

the field equations assume the form

$$\bar{n} \times \frac{\partial \bar{E}}{\partial 3} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

$$\bar{n} \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial 3} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\bar{n} \frac{\partial \bar{H}}{\partial 3} = 0$$

$$\bar{n} \frac{\partial \bar{E}}{\partial 3} = 0$$

We are forced to conclude that the vectors $\bar{E}$ and $\bar{H}$ of every electromagnetic field subject to the conditions (6) lie in planes normal to the axis of the coordinate 3, they are orthogonal to the direction $\bar{n}$ and to each other. Also,

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

The theory of homogeneous, plane waves can be extended to inhomogeneous plane waves. More generaly, if u is a scalar, and if

$$\Box u = 0 \qquad u = u(x, y, z, t)$$

u represents a scalar wave.

We have an inhomogeneous scalar wave, if

$$u = f(x, y, z)\, \chi\left(t - \frac{1}{v}\, g(x, y, z)\right) \tag{8}$$

where $f(x, y, z)$ is the amplitude of the wave, and $(t - \frac{1}{v}\, g)$ the phase. The conditions that u shall be a wave are

$$\Delta f = 0 \tag{9}$$

$$(\nabla f)(\nabla g) = \frac{1}{2}\, \Delta g \tag{10}$$

$$(\nabla g)^2 = 1. \tag{11}$$

If u is any component of an electromagnetic vector, (9), (10) and (11) represent a set of necessary condition for the components of the field in linear, isotropic and homogeneous mediums.

If in particular we take a field harmonic in time, with

$$f = 1 \qquad \frac{\omega}{v} g(x, y, z) = \bar{k}\bar{r}$$

we have an inhomogeneous, plane wave.

The field equation are

$$\bar{k} \times \bar{E} = -\omega \bar{B}$$

$$\bar{k} \times \bar{H} = \omega \bar{D}$$

$$\bar{k}\bar{B} = 0$$

$$\bar{k}\bar{D} = 0.$$

The propagation factor $\bar{k}$ is now a complex vector which we shall write as

$$\bar{k} = \bar{k}_1 + j\bar{k}_2 = \alpha \bar{n}_1 + j\beta \bar{n}_2.$$

The surfaces of constant real phase are planes normal to the axis $\bar{n}_1$, and the surfaces of constant amplitude are planes normal to $\bar{n}_2$.

It is now that if the electric vector is linearly poralized, $\bar{E}$ is perpendicular to both $\bar{k}_1$ and $\bar{k}_2$ and $\bar{H}$ lies in the plane of these two vectors. Inversly, if $\bar{H}$ is linearly polarized it is perpendicular to both $\bar{k}_1$ and $\bar{k}_2$, while $\bar{E}$ lies in $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$-plane.

3. We want to find the general properties of general inhomogeneous electromagnetic waves. Let

$$\bar{E} = \bar{E}_s \exp j\omega t_E^*$$

$$\bar{E}_s = \bar{E}_s(x, y, z)$$

$$t_E^* = t - \frac{1}{v} g_E(x, y, z) - \varphi_E$$

$$\bar{H} = \bar{H}_s \exp j\omega t_H^*$$

$$\bar{H}_s = \bar{H}_s(x, y, z)$$

$$t_H^* = t - \frac{1}{v} g_H(x, y, z) - \varphi_H$$

and so an.

From equation (3) fe have

$$\nabla \bar{D}_s - jk(\nabla g_D)\bar{D}_s = 0.$$

This complex equation is equivalent to two real equations

$$\nabla \bar{D}_s = 0 \tag{12}$$

$$(\nabla g)\bar{D}_s = 0 \tag{13}$$

In a similar way

$$\nabla \overline{B}_s = 0 \tag{14}$$

$$(\nabla g)\overline{B} = 0. \tag{15}$$

It results that $\overline{D}$ and $\overline{B}$ can not have any components in the direction of propagation.

In the same time, the equations

$$\Delta \overline{E}_s = 0 \qquad \Delta \overline{H}_s = 0 \tag{16}$$

$$(\nabla \overline{E}_s)(\nabla g_E) = -\frac{1}{2}\Delta g_E \qquad (\nabla \overline{H})(\nabla g_H) = -\frac{1}{2}\Delta g_H \tag{17}$$

$$(\nabla g_E)^2 = 1 \qquad (\nabla g_H)^2 = 1 \tag{18}$$

must be satisfied.

Substituind for $\overline{E}$ from (12) and for $\overline{H}$ from (13), (1) becomes

$$(\nabla \times \overline{E}) \exp j\omega t_B^* - jk \exp j\omega t_E^* (\overline{E}_s \times \nabla g_E) = -j\omega \overline{B}_s \exp j\omega t_E^* \tag{19}$$

If

$$g_E = g_B = g(x, y, z) \tag{20}$$

$$\varphi_E - \varphi_B = \varphi$$

(19) becomes

$$\nabla \times \overline{E}_s - jk(\overline{E}_s \times \nabla g) = -j\omega \overline{B}_s \exp j\varphi \tag{21}$$

or

$$\nabla \times \overline{E}_s = \omega \sin\varphi \, \overline{B}_s \tag{22}$$

$$\overline{E}_s \times \nabla g = v \cos\varphi \, \overline{B}_s. \tag{23}$$

From (22) an other condition can be obtained, taking the curl form the both members

$$\nabla \times \nabla \times \overline{E}_s = \omega \sin\varphi \, \nabla \times \overline{B}_s. \tag{24}$$

But

$$\nabla \times \nabla \times \overline{E}_s = \nabla \nabla \overline{E}_s - \Delta \overline{E}_s = 0$$

taking into account (14) and (16).

From (24) it results that we must have

$$\nabla \times \overline{B}_s = 0 \tag{25}$$

or

$$\sin\varphi = 0. \tag{26}$$

In a similar way, from (2) we obtain

$$\nabla \times \overline{H}_s = \omega \sin\varphi \, D_s \tag{27}$$

$$\overline{H}_s \times \nabla g = -v \cos\varphi \, \overline{D}_s \tag{28}$$

and the conditions

$$\nabla \times \overline{D}_s = 0 \tag{29}$$

or

$$\sin\varphi = 0 \tag{30}$$

The conditions (25) and (29) are not acceptable — they correspond to a field with $\overline{E} = 0$, $\overline{H} = 0$.

It result that (26) is valid; (22) reduces to

$$\nabla \times \overline{E}_s = 0 \tag{31}$$

and (27) reduces to

$$\nabla \times \overline{H}_s = 0. \tag{32}$$

4. If $\sin\varphi = 0$, (23) and (28) become

$$\overline{E}_s \times \nabla g = \sqrt{\frac{\overline{\mu}}{\varepsilon}}\,\overline{H}_s \tag{33}$$

$$\overline{H}_s \times \nabla g = -\sqrt{\frac{\overline{\varepsilon}}{\mu}}\,\overline{E}_s. \tag{34}$$

Substituing for H_s from (33), (34) becomes an identity.

Eqs. (33) — (34) indicat that *the electric and magnetic vectors of the field of inhomogeneous electromagnetic waves are orthogonal to the direction of propagation* ∇g *and to each other, if the field is harmonic in time.* In the same time

$$\frac{E_s}{H_s} = \sqrt{\frac{\overline{\mu}}{\varepsilon}}. \tag{35}$$

5. From (31) results

$$E_s = \nabla V_E \tag{36}$$

and from (32)

$$H_s = -\nabla V_H. \tag{37}$$

Through each point P there pass three surfaces

$$V_E = \text{constant}, \quad V_H = \text{constant}, \quad g = \text{constant},$$

which are mutually perpendicular.

6. As the properties established are independent of the frequency, it seems that they hold for any field which can be obtained by superposition of fields harmonic in time.

Electronic Laboratory
Polytechnical Institut of Bucarest

REFERENCES

1. *J. A. Stratton.* — Electromagnetic Theory McGraw-Hill New York a. London 1941, 340.
2. *V. Novacu.* — Introducere în electrodinamică vol. I, Edit. Acad. R.P.R., 1955, 366.

3. *H. Schmidt* — Einführung in die Theorie der Wellengleichung, Ambrosius Barth, Leipzig 1931, 8.
4. *L. Landau i E. Lifșiț.* — Teoriia polia OGHIZ Moscova - Leningrad 1948, 125.
5. *D. Ivanenko, A. Sokolov.* — Teoria clasică a cîmpului (Traducere din limba rusă). Editura Tehnică București 1955, 76.
6. *V. Smait.* — Electrostatika i Electrodinamika, I. L. Moscova, 1954, 430.

НЕОДНОРОДНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

(Краткое содержание)

В работе данны некоторые основные своиства неоднородных электромагнитных волн.

Некоторые соображения из елементарной теорий неоднородных скалярных электромагнитных волн и неоднородных плоских электромагнитных волн также излагается.

Пуств :

$$\overline{E} = \overline{E}_s(x, y, z)\,\chi(j\omega t_E^*); \quad \overline{H} = \overline{H}_s(x, y, z)\,\chi(j\omega t_H^*)$$

векторы поля; $t_F^* = t - \frac{1}{v} g_F(x, y, z) - \varphi_F$ запаздывающее время, и $g_F(x, y, z) = c^t$ экифазные поверхности вектора $\overline{F}$.

Эти векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ имеют одинаковюе экифазные поверхности, т.е.

$$g_E = g_H = g$$

показываются что соответсвуюшие электромагнитные болны — *TEM* типа,

Векторы электрического и магнитного поля неоднородных электромагнитных волн перпендикуларны друг другу и не имеют продольных составляющнх в направлении своево распространения ∇g.

Векторы $\overline{E}_s$ и $\overline{H}_s$ связаны соотношенями :

$$\nabla \times \overline{E}_s = 0 \qquad \nabla \times \overline{H}_s = 0$$

$$\Delta E_s = 0 \qquad \Delta H_s = 0$$

$$\frac{E_s}{H_s} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (\nabla g)^2 = 1$$

$$(\nabla E_{s,i})(\nabla g) = -\frac{1}{2}\Delta g \qquad (\nabla H_{s,i})(\nabla g) = -\frac{1}{2}\Delta g$$

где $E_{s,i}$ и $H_{s,i}$ — составляюшие $\overline{E}_s$ и $\overline{H}_s$ по направлений; Волны $\overline{E}$ и $\overline{H}$ имеют одинаковые фазы :

$$\varphi_E = \varphi_H.$$

Независимо от свойства среда $\overline{D}$ и $\overline{B}$ не имеют продольные составляюшие

$$\overline{D}(\nabla g_D) = 0 \qquad \overline{B}(\nabla g_B) = 0.$$

ON INHOMOGENEOUS ELECTROMAGNETIC WAVES

(Summary)

This paper describes some fundamental properties of the inhomogeneous electromagnetic waves. Some consideration are given on the elementary theory of the inhomogeneous scalar waves, and of the inhomogeneous plane electromagnetic waves.

Let be

$$\overline{E} = \overline{E}_s(x, y, z)\,\chi(j\omega t_E^*) \qquad \overline{H} = \overline{H}_s(x, y, z)\,\chi(j\omega t_H^*)$$

the vectors of the field, $t_F^* = t - \frac{1}{v} g_F(x, y, z) - \varphi_F$ being the retarded time, and $g_F(x, y, z) = C^t$ the equiphase surfaces of the vector $\overline{F}$.

It is shown that if the vectors $\overline{E}$ and $\overline{H}$ have the same equiphase surfaces, *i. e.*

$$g_E = g_H = g$$

then the electromagnetic wave is a $T\ E\ M$ wave. The electric and magnetic vectors of the inhomogeneous electromagnetic waves are orthogonal to the direction of propagation ∇g and to each other.

The amplitudes $\overline{E}_s$ and $\overline{H}_s$ are not independent:

$$\nabla \times \overline{E}_s = 0 \qquad \nabla \times \overline{H}_s = 0$$

$$\Delta \overline{E}_s = 0 \qquad \Delta \overline{E}_s = 0$$

$$\frac{E_s}{H_s} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (\nabla g)^2 = 1$$

$$(\nabla E_{s,i})(\nabla g) = -\frac{1}{2}\Delta g \qquad (\nabla H_{s,i})(\nabla g) = -\frac{1}{2}\Delta g$$

$E_{s,i}$ and $H_{s,i}$ being the components of $\overline{E}_s$ and $\overline{H}_s$ in the i — direction.

The waves have the same phase:

$$\varphi_E = \varphi_H.$$

Independent of the properties of the medium, $\overline{D}$ and $\overline{B}$ have not components in the direction of propagation of these waves:

$$\overline{D}(\nabla g_D) = 0 \qquad \overline{B}(\nabla g_B) = 0.$$

SUR LES ONDES ELECTROMAGNETIQUES NON-HOMOGENES

(Résumé)

On établit quelques propriétés des ondes électro-magnétiques. On rappelle aussi la théorie élémentaire des ondes non-homogènes scalaires et des ondes électro-magnétiques non-homogènes planes.

Soit

$$\overline{E} = \overline{E}_s(x, y, z)\,\chi(j\omega t_E^*) \qquad \overline{H} = \overline{H}_s(x, y, z)\,\chi(j\omega t_H^*)$$

les vecteurs du champ, $t_F^* = t - \frac{1}{v} g_F(x, y, z) - \varphi_F$ le temps retardé, et $g_F(x, y, z) = C^t$ les surfaces equiphases du vecteur $\overline{F}$.

On demontre que si les vecteurs $\overline{E}$ et $\overline{H}$ ont les mêmes surfaces equiphase,

$$g_E = g_H = g$$

alors les ondes électro-magnétiques sont du type $T\ E\ M$.

Les vecteurs $\overline{E}$, $\overline{H}$ et ∇g forment un trièdre tri-orthogonal.

Les amplitudes $\overline{E}_s$ et $\overline{H}_s$ ne sont pas indépendentes :

$$\nabla \times \overline{E}_s = 0 \qquad \nabla \times \overline{H}_s = 0$$

$$\Delta \overline{E}_s = 0 \qquad \Delta \overline{H}_s = 0$$

$$\frac{E_s}{H_s} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (\Delta g)^2 = 1$$

$$(\nabla E_{s,i})(\nabla g) = -\frac{1}{2}\Delta g \qquad (\nabla H_{s,i})(\nabla g) = -\frac{1}{2}\Delta g$$

$E_{s,i}$ et $H_{s,i}$ etant les composantes de $\overline{E}_s$ et de $\overline{H}_s$ dans la direction i.

Independement des propriétés du milieu, $\overline{D}$ et $\overline{B}$ n'ont pas des composantes dans la direction dans laquelle se propagent ces ondes :

$$\overline{D}(\nabla g_D) = 0 \qquad \overline{B}(\nabla g_B) = 0.$$

ÜBER NICHT HOMOGENE ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

(Zusammenfassung)

Vorliegender Artikel stellt einige Grundeigenschaften der nicht homogenen elektromagnetischen Wellen dar. Es werden einige Betrachtungen über die elementare Theorie der nicht homogenen skalaren Wellen und der nicht homogenen ebenen elecktromagnetischen Wellen gemacht.

Es seien

$$\overline{E} = \overline{E}_s(x, y, z)\,\chi(j\omega t_E^*) \qquad \overline{H} = \overline{H}_s(x, y, z)\,\chi(j\omega t_H^*)$$

die Feldvektoren, wobei $t_F^* = t - \frac{1}{v} g_F(x, y, z) - \varphi_F$ die verzögerte Zeit, und $g_F(x, y, z) = C^t$ die gleichphasigen Flächen des Vektors $\overline{F}$ sind.

Es wird gezeigt dass, wenn die Vektoren $\overline{E}$ und $\overline{H}$ die selben gleichphasigen Flächen haben, d.h.

$$g_E = g_H = g$$

dann die elecktromagnetische Welle eine TEM Welle ist.

Der elecktrische und der magnetische Vektor der nicht homogenen elecktromagnetischen Wellen befinden sich senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ∇g und senkrecht zueinander.

Die Amplituden $\overline{E}_s$ und $\overline{H}_s$ sind nicht unabhängig :

$$\nabla \times \overline{E}_s = 0 \qquad \nabla \times \overline{H}_s = 0$$

$$\Delta \overline{E}_s = 0 \qquad \Delta \overline{H}_s = 0$$

$$\frac{E_s}{H_s} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (\nabla g)^2 = 1$$

$$(\nabla E_{s,i})(\nabla g) = -\frac{1}{2}\Delta g \qquad (\nabla H_{s,i})(\nabla g) = -\frac{1}{2}\Delta g$$

$E_{s,i}$ und $H_{s,i}$ sind die Komponenten von $\overline{E}_s$ und $\overline{H}_s$ in der i-Richtung.

Die Welle haben die kleiche Phase :

$$\varphi_E = \varphi_H.$$

Unabhängig von den Medium- Eigenschaften haben $\overline{D}$ und $\overline{B}$ keine Komponenten in der Ausbreitungsrichtung dieser Wellen :

$$\overline{D}(\nabla g_D) = 0 \qquad \overline{B}(\nabla g_B) = 0$$

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 2

621.396

UNE CONTRIBUTION À L'ÉTUDE ÉLECTRODYNAMIQUE DIRECTE DE LA PROPAGATION DES ONDES SUR LES LIGNES DE TRANSMISSION

par AUREL MILLEA

1. Pour décrire les phénomènes de propagation des ondes électromagnétiques sur les lignes de transmission, on emploie généralement les équations des télégraphistes, déduites à l'aide des théorèmes de Kirchhoff appliqués aux portions infiniment petites de la ligne [1]. Il est évident que les équations des télégraphistes représentent la solution du problème de la propagation des ondes sur les lignes de transmission dans certaines cas particuliers seulement, les théorèmes de Kirchhoff n'étant pas valables qu'en régime quasi-stationnaire ; pour résoudre complètement le problème, il faut déterminer *toutes les solutions* des équations de l'électromagnétisme satisfaisant aux conditions aux limites à la surface des conducteurs de la ligne et aux conditions de régularité à l'infini.

Dans le cas des ondes cylindriques, on a obtenu de telles solutions générales sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions orthogonales constituant un système complet, chacune de ces fonctions satisfaisant aux conditions aux limites du problème. La méthode usuelle employée pour trouver le système de fonctions en question est celle des coordonnées curvilignes ; le procédé est simple, mais le nombre de problèmes qu'on peut résoudre à l'aide de cette méthode est limité. Ainsi, pour les lignes de transmission, même dans le cas le plus simple de la ligne bifilaire, l'application des coordonnées bipolaires conduit à des équations dont les variables ne peuvent être séparées.

Pour cette raison, le problème de la propagation le long des lignes de transmission n'est pas encore résolu, malgre les nombreuses publications consacrées à ce sujet. Certains auteurs ont apporté des corrections aux paramètres figurant dans les équations des télégraphistes [2, 3, 4] ; d'autres ont décrit qualitativement les phénomènes en cause [5, 6], sans avoir résolu le problème général susmentionné. La seule tentative en cette direction, que nous avons trouvée dans la littérature, est l'article de Soudakove [7], qui présente une théorie générale de la propagation sur la ligne de transmission bifilaire formée de conducteurs à section circulaire. Toutefois, les équations transcendentes donnant les valeurs de la constante de propagation sont très compliquées ; elle ne permettent aucune interprétation physique simple et ne peuvent pas être résolues à l'aide des méthodes d'approximation ou graphiques usuelles, parce qu'elles contiennent des fonctions cylindriques d'argument complexe.

2. Le présent exposé se propose de donner une solution générale du problème de la propagation des ondes sur les lignes de transmission formées de n conducteurs parallèles, ayant les sections circulaires, à la seule condition restrictive que les diamètres des conducteurs soient petits par rapport aux distances entre les conducteurs. Cette hypothèse nous permettera de supposer une répartition symétrique du courant dans chaque conducteur et d'obtenir des relations très simples et facilement interprétables. Ce traitement du problème ne tient compte de l'effet de proximité ; en revanche, il conduit à une représentation asymptotique correcte des phénomènes de propagation sur les lignes de transmission à deux ou plusieurs conducteurs minces. De plus, en partant des relations obtenues, on déduira les équations des télégraphistes, comme un cas particulier ; on peut ainsi donner une démonstration générale et rigoureuse de celles-ci, et aussi formuler exactement les conditions où elles sont appliquables.

3. Considérons n conducteurs parallèles infiniment longs, à section circulaire, ayant les rayons a_i, les distances entre les conducteurs étant désignées par g_{ik}. Le milieu où se trouvent les conducteurs est homogène, isotrope et linéaire, étant caractérisé par les constantes ε et μ complexes. On suppose une variation en temps sinusoïdale des grandeurs du champ électromagnétique ; le facteur $e^{j\omega t}$ sera omis dans le calcul suivant.

Dans l'hypothèse

$$a_i \ll g_{ik} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n) \tag{1}$$

la distribution transversale du courant qui parcourt l'un des conducteurs est symétrique et ne dépend pas des courants traversant les autres conducteurs. On peut donc calculer l'expression du champ électromagnétique produit par les n conducteurs en superposant les champs individuels de chaque conducteur.

Considérons seulement le conducteur i et prenons un système de coordonnées cylindriques r_i, θ_i, z_i de telle sorte que l'axe Oz_i coïncide avec l'axe du conducteur. Le vecteur de Hertz Π est de la forme

$$\overline{\Pi} = \overline{k}\,\Pi \tag{2}$$

le courant étant dirigé le long de l'axe Oz_i.

La fonction Π satisfait à l'équation

$$\Delta\,\Pi + k^2\,\Pi = 0 \tag{3}$$

où $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$.

En coordonnées cylindriques l'équation (3) s'écrit

$$\frac{1}{r_i}\frac{\partial}{\partial r_i}\left(r_i\frac{\partial \Pi}{\partial r_i}\right) + \frac{1}{r_i^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_i^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z_i^2} + k^2\Pi = 0. \tag{4}$$

A cause de la symétrie $\dfrac{\partial}{\partial \theta_i} = 0$. La solution générale de l'équation (4) est une combinaison linéaire des solutions particulières de la forme suivante :

$$\Pi = A_i\, Z_0(h\, r_i)\, e^{-j\gamma z_i} \tag{5}$$

où γ est la constante de propagation, généralement complexe, $h = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$, $Z_0(h\, r_i)$ est une combinaison linéaire de fonctions cylindriques de l'ordre zéro et A_i est une constante complexe.

Les composantes du champ sont exprimées par les relations

$$\overline{E} = \text{grad div}\,\overline{\Pi} + k^2\overline{\Pi} \tag{6}$$

$$\overline{H} = j\omega\varepsilon\,\text{rot}\,\overline{\Pi}. \tag{7}$$

En y introduisant l'expression du vecteur $\overline{\Pi}$, on obtient

$$E_{z_i} = (k^2 - \gamma^2)\,\Pi = h^2 A_i Z_0(h r_i)\, e^{-j\gamma z_i} \tag{8}$$

$$E_{r_i} = -j\gamma \frac{\partial \Pi}{\partial r_i} = j\gamma h A_i Z_1(h r_i)\, e^{-j\gamma z_i} \tag{9}$$

$$H_{\theta_i} = -j\omega\varepsilon \frac{\partial \Pi}{\partial r_i} = j\omega\varepsilon h A_i Z_1(h r_i)\, e^{-j\gamma z_i} \tag{10}$$

$$E_{\theta_i} = H_{r_i} = H_{z_i} = 0.$$

Afin de déterminer la constante A_i, on néglige le courant de déplacement par rapport au courant de conduction dans le conducteur (dans le cas des conducteurs métalliques cette approximation est valable même aux fréquences très élevées), et on applique la loi du circuit magnétique pour un contour circulaire qui entoure le conducteur :

$$2\pi a H_{\theta_i}\Big|_{r_i = a_i} = I_i \tag{11}$$

où I_i désigne l'amplitude complexe du courant qui parcourt le conducteur i. En notant

$$I_i = I_{oi}\, e^{-j\gamma z_i} \tag{12}$$

la relation (11) devient

$$2\pi a\, j\omega\varepsilon h A_i Z_1(h a_i)\, e^{-j\gamma z_i} = I_{oi}\, e^{-j\gamma z_i}$$

d'où l'on déduit

$$A_i = -j \frac{I_{oi}}{2\pi a_i \omega\varepsilon h Z_1(h a_i)}. \tag{13}$$

Superposons maintenant les champs produits par les courants $I_1, I_2, \ldots I_n$. Les composantes E_{zi} peuvent être additionnées directement :

$$E_z = -j \frac{h}{2\pi\omega\varepsilon} e^{-j\gamma z} \sum_{i=1}^{n} \frac{I_{oi}}{a_i} \frac{Z_0(h r_i)}{Z_1(h a_i)}. \tag{14}$$

Les composantes E_{r_i} et H_{θ_i} se composent vectoriellement :

$$\overline{E}_t = \frac{\gamma}{2\pi\omega\varepsilon} e^{-j\gamma z} \sum_{i=1}^{n} \frac{I_{oi}}{a_i} \frac{Z_1(h r_i)}{Z_1(h a_i)} \overline{u}_{ri} \tag{15}$$

$$\overline{H}_t = \frac{1}{2\pi} e^{-j\gamma z} \sum_{i=1}^{n} \frac{I_{oi}}{a_i} \frac{Z_1(h r_i)}{Z_1(h a_i)} \overline{u}_{\theta i} \tag{16}$$

où $\overline{E}_t$ et $\overline{H}_t$ désignent les composantes transversales du champ électromagnétique ; $\overline{u}_{ri}$ et $\overline{u}_{\theta i}$ sont des vecteurs unitaires ayant les directions des lignes de coordonnées r_i et θ_i.

On doit choisir la fonction $Z_0(hr_i)$ de telle sorte que le flux de puissance à travers une surface $z = \text{const.}$ soit fini, ce qui comporte une décroissance assez rapide de l'intensité du champ avec la distance r. Il est facile de vérifier que la seule fonction satisfaisant à cette condition est la fonction de Hanckel de la deuxième espèce. Par conséquent, les expressions des composantes du champ dû aux n conducteurs sont les suivantes :

$$E_z = -j\frac{h}{2\pi\omega\varepsilon}e^{-j\gamma z}\sum_{i=1}^{n}\frac{I_{oi}}{a_i}\frac{H_0^{(2)}(hr_i)}{H_1^{(2)}(ha_i)} \tag{17}$$

$$\bar{E}_t = \frac{\gamma}{2\pi\omega\varepsilon}e^{-j\gamma z}\sum_{i=1}^{n}\frac{I_{oi}}{a_i}\frac{H_1^{(2)}(hr_i)}{H_1^{(2)}(ha_i)}\bar{u}_{ri} \tag{18}$$

$$\bar{H}_t = \frac{1}{2\pi}e^{-j\gamma z}\sum_{i=1}^{n}\frac{I_{oi}}{a_i}\frac{H_1^{(2)}(hr_i)}{H_1^{(2)}(ha_i)}\bar{u}_{0i}. \tag{19}$$

4. Les relations (17), (18), (19) contiennent $n + 1$ constantes encore indéterminées : les courants I_{oi} et le coefficient h. Afin de les déterminer, on doit utiliser les conditions aux limites, qui peuvent s'écrire, dans notre cas, sous la forme

$$E_z\big|_{r_i=a_i} = Z_{si}\,I_i \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{20}$$

où Z_{si} désignent les impédances superficielles des conducteurs. En tenant compte de l'hypothèse (1), sur laquelle est basé notre calcul, ces conditions s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &h\frac{I_{01}}{a_i}\frac{H_0^{(2)}(hg_{1i})}{H_1^{(2)}(ha_1)} + h\frac{I_{02}}{a_2}\frac{H_0^{(2)}(hg_{21})}{H_1^{(2)}(ha_2)} + \ldots + h\frac{I_{oi}}{a_i}\frac{H_0^{(2)}(ha_i)}{H_1^{(2)}(ha_i)} + \\ &+ \ldots + h\frac{I_{on}}{a_n}\frac{H_0^{(2)}(hg_{ni})}{H_1^{(2)}(ha_n)} = j\,2\pi\omega\varepsilon Z_{si}I_{oi}; \qquad (i = 1, 2 \ldots n). \end{aligned} \tag{21}$$

On peut considérer ces relations comme un système linéaire de n équations à n inconnues : I_{01}, $I_{02} \ldots I_{on}$. Pour que le système admette des solutions, il est nécessaire que son déterminant principal soit nul :

$$\begin{vmatrix} \frac{h}{a_1}\frac{H_0^{(2)}(ha_1)}{H_1^{(2)}(ha_1)} - j\,2\pi\omega\varepsilon Z_{s1} & \cdots & \frac{h}{a_i}\frac{H_0^{(2)}(hg_{1i})}{H_1^{(2)}(ha_i)} & \cdots & \frac{h}{a_n}\frac{H_0^{(2)}(hg_{1n})}{H_1^{(2)}(ha_n)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{h}{a_1}\frac{H_0^{(2)}(hg_{i1})}{H_1^{(2)}(ha_1)} & \cdots & \frac{h}{a_i}\frac{H_0^{(2)}(ha_i)}{H_1^{(2)}(ha_i)} - j\,2\pi\omega\varepsilon Z_{si} & \cdots & \frac{h}{a_n}\frac{H_0^{(2)}(hg_{in})}{H_1^{(2)}(ha_n)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{h}{a_1}\frac{H_0^{(2)}(hg_{n1})}{H_1^{(2)}(ha_1)} & \cdots & \frac{h}{a_i}\frac{H_0^{(2)}(ha_{ni})}{H_1^{(2)}(ha_i)} & \cdots & \frac{h}{a_n}\frac{H_0^{(2)}(ha_n)}{H_1^{(2)}(ha_n)} - j\,2\pi\omega\varepsilon Z_{sn} \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Les solutions de cette équation représentent les valeurs possibles du coefficient h et de la constante de propagation γ

$$\gamma = \sqrt{k - h^2}. \tag{23}$$

Chaque solution h de l'équation (22) correspond à un mode particulier de propagation sur la ligne. Dans le cas général, une onde se propageant le long de la ligne représente la superposition de ces ondes élémentaires.

Le problème envisagé est donc complètement résolu par les équations (21) et (22).

5. Le caractère de la propagation des ondes sur la ligne de transmission est déterminé par la valeur du coefficient h, solution de l'équation (22). L'analyse de cette équation est difficile dans le cas général, puisque h est un nombre complexe. Nous considérerons un cas important en pratique, à savoir le cas pour lequel on a les conditions

$$| h a_i | \ll 1 \qquad (i = 1, 2 \ldots n). \tag{24}$$

Ces inégalités sont aussi justifiées par le caractère asymptotique de nos équations, en vertu des conditions (1). Elles comportent les inégalités suivantes :

$$| H_1^{(2)} (h a_i) | \gg 1. \tag{25}$$

Supposons, en première approximation, que les pertes ohmiques dans les conducteurs sont négligeables, c'est à dire que $Z_{si} = 0$. En utilisant les expressions asymptotiques des fonctions de Hanckel :

$$H_0^{(2)} (x) \approx j \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\beta x}; \qquad \beta = 1{,}7811 \tag{26}$$

$$H_1^{(2)} (x) \approx j \frac{2}{\pi x} \tag{27}$$

l'équation (22) devient

$$\begin{vmatrix} h^2 j \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\beta h a_1} \ldots h^2 H_0^{(2)}(h g_{1i}) \ldots h^2 H_0^{(2)}(h g_{1n}) \\ \vdots \\ h^2 H_0^{(2)}(h g_{i1}) \ldots h^2 j \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\beta h a_i} \ldots h^2 H_0^{(2)}(h g_{in}) \\ \vdots \\ h^2 H_0^{(2)}(h g_{n1}) \ldots h^2 H_0^{(2)}(h g_{ni}) \ldots h^2 j \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\beta h a_n} \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

Les termes de la première diagonale de ce déterminant sont, en module, beaucoup plus grands que les autres, car $g_{ik} \gg a_i$; l'équation (28) est donc approximativement équivalente à l'équation suivante :

$$\left(h^2 \ln \frac{2}{\beta h a_1}\right)\left(h^2 \ln \frac{2}{\beta h a_2}\right) \ldots \left(h^2 \ln \frac{2}{\beta h a_n}\right) = 0. \tag{29}$$

Évidemment, la seule solution de cette équation est $h = 0$ (en tenant compte aussi de la condition (24)). On voit facilement que l'équation (28) n'admet aucune solution $h \neq 0$, parce que le terme du développement du déterminant obtenu en multipliant les quantités de la première diagonale est, en module, beaucoup plus grand que les autres termes.

La valeur $h = 0$ correspond aux ondes transversal-électromagnétiques qui peuvent se propager le long des conducteurs parfaits, cylindriques, à sections quelconques, avec une vitesse égale à la vitesse de propagation dans un milieu illimité [8] ; ces ondes sont aussi connues sous le nom d'ondes quasi-planes.

Si l'on considère les conducteurs de la ligne imparfaits, ayant toutefois une conductivité suffisamment élevée, les quantités $-j2\pi\omega\varepsilon Z_{si}$ qu'on doit ajouter aux termes de la première diagonale du déterminant de (28) sont très réduites ; les considérations antérieures restent valables, à la seule réserve que l'équation (22) a maintenant, au lieu de la solution $h = 0$, plusieurs solution $h \neq 0$, *très petites en module*. Dans ce cas, les ondes auront aussi une composante longitudinale, de faible amplitude, et la vitesse de propagation sera un peu inférieure à celle de l'espace illimité.

Nous pouvons déduire les conclusions suivantes :

a) les conducteurs rectilignes, parallèles et minces, ayant une conductivité suffisamment élevée, permettent la propagation des ondes transversal-magnétiques ;

b) il y a plusieurs modes de propagation, mais tous ces modes sont caractérisés par des valeurs très faibles de h ; aux fréquences élevées, la constante de propagation $\gamma = \sqrt{k^2 - h^2}$ aura donc approximativement la même valeur pour tous les modes de propagation ;

c) les modes de propagation supérieurs, du type „guide d'ondes", dont la vitesse de phase este plus élevée que dans l'espace illimité, existent seulement lorsque les conditions (24) ne sont pas remplies ; la longueur d'onde de ces ondes sera donc au moins de l'ordre de grandeur des diamètres des conducteurs.

6. Il est intéressant d'établir *les conditions où les équations des télégraphistes sont valables*. Nous démontrerons que les conditions d'applicabilité des équations des télégraphistes au système de n conducteurs parallèles s'expriment par

$$| hg_{ik} | \ll 1 ; \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n) \tag{30}$$

les conditions (1) étant également remplies.

Pour la démonstration, on utilise de nouveau les expressions asymptotiques (27), en les introduisant dans les formules (18) et (19) des composantes transversales du champ. On obtient

$$\overline{E}_t = \frac{\gamma}{2\pi\omega\varepsilon} e^{-j\gamma z} \sum_{i=1}^{n} \frac{I_{oi}}{r_i} \overline{u}_{ri} \tag{31}$$

$$\overline{H}_t = \frac{1}{2\pi} e^{-j\gamma z} \sum_{i=1}^{n} \frac{I_{oi}}{r_i} \overline{u}_{\theta i} . \tag{32}$$

Ces expressions sont correctes seulement lorsque les distances r_i ne sont pas trop grandes ; plus exactement, leur applicabilité est limitée à la région occupée par les conducteurs de la ligne, ou l'on a $r_i < g_{ik}$. On peut remarquer que *les expressions (31) et (32) coïncident avec les expressions du champ électromagnétique en régime quasi-stationnaire ;* ce fait représente exactement la condition d'applicabilité des théorèmes de Kirchhoff et, par conséquent, des équations des télégraphistes généralisées. Nous pouvons donc affirmer que :

a) les conditions d'applicabilité des équations des télégraphistes à un système de n conducteurs parallèles sont :

$$g_{ik} \gg a_i \quad \text{et} \quad |hg_{ik}| \ll 1 ; \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

la première condition est purement géométrique, tandis que dans la deuxième interviennent aussi des grandeurs électriques ;

b) ces conditions d'applicabilité des équations des télégraphistes sont beaucoup moins restrictives que les conditions $kg_{ik} \ll 1$ que l'on donne dans la plupart des ouvrages de spécialité, parce que, aux fréquences élevées, $|h|$ est généralement très petit par rapport à k ;

c) les équations des télégraphistes sont d'autant plus exactes que la conductivité du matériel des conducteurs est plus grande. En effet, en ce cas les grandeurs Z_{si} et $|h|$ sont plus petites et la condition (30) est satisfaite avec plus d'exactité.

7. La relation entre la théorie présentée ci-dessus et les équations des télégraphistes sera plus évidente, si l'on comparera la valeur de la constante de propagation γ résultant de l'équation (22) avec la valeur déduite des équations des télégraphistes.

Pour cela nous considérerons le cas simple d'une ligne bifilaire, ayant des conducteurs identiques ; soit a le rayon des sections des conducteurs et g la distance entre les conducteurs. L'equation (22) devient

$$\begin{vmatrix} \frac{h}{a}\frac{H_0^{(2)}(ha)}{H_1^{(2)}(ha)} - j2\pi\omega\varepsilon Z_s & \frac{h}{a}\frac{H_0^{(2)}(hg)}{H_1^{(2)}(ha)} \\ \frac{h}{a}\frac{H_0^{(2)}(hg)}{H_1^{(2)}(ha)} & \frac{h}{a}\frac{H_0^{(2)}(ha)}{H_1^{(2)}(ha)} - j2\pi\omega\varepsilon Z_s \end{vmatrix} = 0 \qquad (33)$$

ou

$$\frac{h}{a}\frac{H_0^{(2)}(ha)}{H_1^{(2)}(ha)} - j2\pi\omega\varepsilon Z_s = \pm\frac{h}{a}\frac{H_0^{(2)}(hg)}{H_1^{(2)}(ha)} . \qquad (34)$$

On le constate facilement que, en considérant le signe + devant le deuxième membre de l'équation, on obtient le résultat

$$I_{01} = -I_{02},$$

tandis que, pour le signe —, on trouve

$$I_{01} = I_{02}.$$

Le premier cas correspond aux ondes en antiphase et le second aux ondes en phase. Considérons seulement le cas des ondes en antiphase ;

ce mode de propagation existe lorsque l'excitation de la ligne est symétrique. En supposant de nouveau les conditions (1) et (3) remplies et en utilisant les expressions asymptotiques (26) et (27), l'équation (34) se peut transcrire sous la forme

$$h^2\left(\ln\frac{2}{\beta h a}-\ln\frac{2}{\beta h g}\right)=j\,2\pi\omega\varepsilon Z_s \tag{35}$$

d'où l'on déduit

$$h^2=j\,\frac{2\pi\omega\varepsilon Z_s}{\ln\dfrac{g}{a}}. \tag{36}$$

La constante de propagation est donnée par

$$\gamma^2=k^2-h^2=k^2-j\,\frac{2\pi\omega\varepsilon Z_s}{\ln\dfrac{g}{a}}. \tag{37}$$

Nous rappelons les expressions suivantes des constantes de la ligne bifilaire :

$$Z_s=\frac{R}{2}+j\omega\frac{L_i}{2} \tag{38}$$

$$C=\frac{\pi\varepsilon_R}{\ln\dfrac{g}{a}} \tag{39}$$

$$L_e=\frac{\mu}{\pi}\ln\frac{g}{a} \tag{40}$$

$$G=\frac{\pi\sigma}{\ln\dfrac{g}{a}} \tag{41}$$

$$L=L_e+L_i \tag{42}$$

et aussi les relations

$$k^2=\omega^2\varepsilon\mu;\quad \varepsilon=\varepsilon_R+j\varepsilon_I=\varepsilon_R-j\frac{\sigma}{\omega};\quad \mu=\mu_R$$

où L_i et L_e sont l'inductance linéique intérieure et extérieure, C est la capacité linéique, R et G sont la résistance linéique des conducteurs et la conductance linéique du milieu contenant la ligne. En supposant ε complexe et μ réel, on obtient, en partant de (37) et en y introduisant les dernières expressions

$$\gamma^2=\omega^2\varepsilon_R\mu-\frac{\pi\sigma}{\ln\dfrac{g}{a}}R+\omega^2\frac{\pi\varepsilon_R}{\ln\dfrac{g}{a}}L_i+j\left(-\omega\mu\sigma-\frac{\omega\pi\varepsilon_R}{\ln\dfrac{g}{a}}R-\frac{\omega\pi\sigma}{\ln\dfrac{g}{a}}\right) \tag{43}$$

et encore

$$\gamma^2=-(R+j\omega L)\,(G+j\omega C).$$

On a retrouvé l'expression de la constante de propagation donnée par les équations des télégraphistes.

8. Les résultats obtenus peuvent offrir une base théorique pour une étude plus détaillée de la propagation sur les lignes de transmission, lorsque les équations des télégraphistes ne sont pas applicables. Ainsi, une analyse de l'équation (22), sans imposer aucune restriction, pourrait conduire à des conclusions plus générales que celles données dans le présent exposé.

La théorie présentée permet également d'étudier, d'une manière plus générale qu'on peut le faire à l'aide des équations des télégraphistes, le problème de la transmission de la puissance sur les lignes de transmission.

Il faut mentionner que tous les résultats obtenus sont valables dans le seul cas de la ligne infiniment longue et, par conséquent, ils ne décrivent pas correctement les phénomènes au voisinage des extrémités de la ligne.

La Chaire d'Electrotechnique
L'Institut Politechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

[1.] *R. Răduleț:* „Bazele Teoretice ale Electrotehnicii", t. 4. București, 1956.
[2.] *G. Mie:* „Elektrische Wellen an zwei parallelen Drähten". Ann. d. Physik, 1900, p. 201.
[3.] *В. И. Ломоносов:* „Электромагнитное поле двухпроводной линии". Труды Ивановского Энергетического Института, 1951, стр. 223.
[4.] *П. И. Кузнецов, П. Л. Стратонович:* „Электромагнитные процессы в системах с двумя проводами". Электричество, 1955, № 2, p. 5.
[5.] *G. N. Carson:* „Electromagnetic processes on transmission lines". Bell System Technical Journal, 1928 Nr. 4, p. 268.
[6.] *Hund A.:* „Short-wave radiation phenomena". New-York 1952. t, I, p. 490.
[7.] *В. А. Судаков:* „Волноводные свойства двухпроводной линии передачи и неаксиального кабеля". Сборник научных работ по проводной связи, 1949, p. 73.
[8.] *W. R. Smythe:* „Static and Dinamic Electricity". Ney-York 1950, p. 457.

К НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРАКТОВКЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ПО ДЛИННЫМ ЛИНЯМ

(Краткое содержание)

Применяя уравнения электромагнитного поля, излагается более общая теория распространения электромагнитных волн по длинных линий с n проводами, сечения которых малые в сравнение с расстояниями между ними. Из найдённых соотношений, в частном случае, выводятся телеграфные уравнения; тем самым приводится строгий вывод этих уравнений и уточняются условия в которых их применение законно.

A CONTRIBUTION TO THE DIRECT ELECTRODYNAMICAL TREATMENT OF WAVE PROPAGATION ON TRANSMISSION LINES

(Summary)

Based on electromagnetic field equations, a general théory of wave propagation on transmission lines with n conductors is developed, in the single restrictive hypothesis that the conductors diameters are small as compared to the distances between them. From the found relationships, as a particular case, the telegraphists' equations are derived; thus, a rigurous demonstration of these ones and the accurate conditions, wherein they are valid, are obtained.

UNE CONTRIBUTION A L'ÉTUDE ÉLECTRODYNAMIQUE DIRECTE DE LA PROPAGATION DES ONDES SUR LES LIGNES DE TRANSMISSION

(Résumé)

En employant les équations du champ électromagnétique, on présente une théorie générale de la propagation des ondes électromagnétiques sur les lignes de transmission à n conducteurs, à le seule condition restrictive que les diamètres des conducteurs soient petits par rapport aux distances entre les conducteurs. En partant des relations obtenues, on déduit, comme un cas particulier, les équations des télégraphistes; on obtient ainsi une démonstration générale et rigoureuse de celles-ci, de même que les conditions exactes de leur applicabilité.

BEITRAG ZUR DIREKTEN ELEKTRODYNAMISCHEN BEHANDLUNG DER WELLENVERBREITUNG AUF LANGEN LEITUNGEN

(Zusammenfassung)

Auf Grund der Gleichungen des elektromagnêtischen Feldes wird eine aligemeine Theorie über die Wellenverbreitung auf langen Leitungen mit n Drähten entwickelt-mit der einzigen einschränkenden Voraussetzung, dass die Durchmesser der Drähte im Vergleich zu den Entfernungen zwischen ihnen klein sind. Aus den gefundenen Beziehungen gehen, als ein besonderer Fall die Telegraphistengleichungen hervor. Man erhält auf diese Weise eine streng genaue Ableitung dieser Gleichungen-und die Bedingungen in welchen sie gültig sind.

Tipografia şi Litografia Învăţământului, strada Mihai Vodă nr. 44—46, Bucureşti — c. 31

MUSZAKI KÖNYVTÁR 1863

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de pronume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul la care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a aricolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XX — FASCICOLA 3

IULIE — SEPTEMBRIE

1958

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках продолжением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей б/дут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производится по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges des publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

MŰSZAKI EGYETEM 1953

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XX — FASCICOLA 3

IULIE — SEPTEMBRIE

1958

COMITETUL DE REDACȚIE:

Prof. *I. Agîrbiceanu;* Prof. Dr. *I. S. Antoniu;* Conf. *I. Berceanu;* Prof. Dr. *E. Bratu;* Prof. *Gh. Buzdugan;* Conf. cand. în științe *S. Călin;* Prof. *C. Ionescu-Bujor;* Prof. Dr. *Gh. Manea;* Acad. Prof. Dr. *Tr. Negrescu;* Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu;* Prof. *C. Penescu;* Prof. *M. Postelnicescu;* Prof. Dr. *R. Răduleț;* Prof. *Al. Spătaru;* Prof. *L. Stoicescu;* Prof. Dr. *T. Tănăsescu,* membru corespondent al Academiei R. P. R.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
membru corespondent al Academiei R. P. R.

SUMAR

MATEMATICA

C. IONESCU-BUJOR — Sur les suites de points obtennues par une suite de transformations 13

FIZICA

D. BÎRCĂ-GĂLĂȚEANU — Das schwingungsspektrum des Fichtenöls in Gebiet von 1μ bis 3,7μ 23

A. POPA-ICHIMESCU — Die lokale Empfindlichkeit bestimmter photoelektrischer Zellen fur naturliches und polarisiertes Licht 29

MECANICA

AL. STOENESCU, M. ATANASIU — Une généralisation de la loi des aires 37

M. ATANASIU — Considérations sur le calcul des pivots . 45

HIDRAULICA

M. D. CAZACU — Mouvements unidimensionnels et nonpermanents des fluides compressibles, dans le cas des petites variations de pression avec des applications au coup de bélier 59

CHIMIE ORGANICĂ

C. D. NENIȚESCU, F. BADEA — Simplified method for the preparation of sodium hydride and complex hydrides derived from it 93

ELECTROCHIMIE

L. STANCU — Asupra îmbunătățirii randamentului de curent la formarea compușilor oxigenați ai clorului 99

I. CRIȘAN — Die elektrolytische Herstellung des kupfers in streuförmigen Zustand aus Chlorammoniumlösungen von einwertigen komplexen Ionen 107

CHIMIE TEHNOLOGICĂ

I. IONESCU, M. GORUNEANU, G. TUDORACHE — Studiul proprietăților unor cationiți obținuți din lignină 121

I. DRIMUȘ, I. ADAMACHE, C. LAZESCU — Cîțiva agenți tensio-activi în recuperarea țițeiului dintr-o carotă artificială 129

ELECTROTEHNICA

AL. TIMOTIN — Asupra definirii densității de volum a forței 139

V. NEDELCU — Относительно выражения электромагнитного момента, развиваемого асинхронной машиной 149

UNDE ELECTROMAGNETICE

ED. NICOLAU — On the network equations in antenna theory 153

A. MILLEA — Calculul cu aproximație al frecvențelor critice ale ghidurilor de undă cu secțiune poligonală . 161

REZISTENȚA MATERIALELOR

GH. BUZDUGAN, A. CONSTANTINESCU — Etude des contraints dans le voisinage des ouvertures d'evacuation des fours rotatifs 173

A. PETRE — Les équations du mouvement dans le cas du flambage des barres droites par choc axial . . 189

INFORMAȚII 199

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

К. ИОНЕСЧУ - БУЖОР — О ряде точек, полученных с помощью некоторого ряда преобразований . . 13

ФИЗИКА

Д. БЫРКЭ - ГЭЛЭЦЕАНУ — Спектр вибрации соснового масла в спектральной овласти от 1 μ до 3,7 μ 23

А. ПОПА - ИКИМЕСКУ — Местная чувствительность некоторых фотоэлектрических клеток при естественном и поляризованном свете 29

МЕХАНИКА

А. СТОЕНЕСКУ, М. АТАНАСИУ — Обобщение закона площадей 37

М. АТАНАСИУ — Соображения относительно трения вращения 45

ГИДРАВЛИКА

М. КАЗАКУ — Одномерные и неустановившиеся движения сжимаемых жидкостей в случае малых изменений давления, с применением при гидравлическом ударе 59

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

К. НЕНИЦЕСКУ, Ф. БАДЕА — Упрошенный метод изготовления натрий-гидрида и сложных гидридов на его основе 93

ЭЛЕКТРОХИМИЯ

Л. СТАНКУ — Об улучшении токового к. п. д. при образовании кислородных соединений хлора 99

И. КРИШАН — Получение электролитической меди в дисперссионном состоянии из хлораминовых растворов комплексных одновалентных ионов . . . 107

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Т. ЙОНЕСКУ, М. ГОРУНЕАНУ, Г. ТУДОРАКЕ — Изучение свойств некоторых катионитов, полученных из лигнина 121

И. ДРИМУШ, И. АДАМАКЕ, К. ЛЭЗЕСКУ — К использованию поверхностно активных веществ при вторичных методах добычи нефти 129

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. ТИМОТИН — Об определении объёмной плотности сила 139

В. НЕДЕЛКУ — Относительно выражения электромагнитного момента, развиваемого асинхронной машиной 149

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Е. НИКОЛАУ — О теореме сетей для многовибраторных антен 153

А. МИЛЛЕА — Приближённый расчёт критических частот волноводов многоугольного сечения . . 161

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Г. БУЗДУГАН, А. КОНСТАНТИНЕСКУ — Исследование напряжений в непосредственном соседстве с выпускими окона цементных печей 173

А. ПЕТРЕ — Уравнения движения при продольном изгибе прямых балок от аксиального удара . . 189

СООБЩЕНИЯ 199

CONTENTS

MATHEMATICS

C. IONESCU-BUJOR — On the sets of points which are formed with a set of transformations 13

PHYSICS

D. BÎRCĂ-GĂLĂȚEANU — Vibration spectrum of pine oil within the region 1μ to 3,7μ 23

A. POPA-ICHIMESCU — The local sensitivity of some photocells in natural and polarised light 29

MECHANICS

AL. STOENESCU, M. ATANASIU — A generalisation of the law of areas 37

M. ATANASIU — Considerations in connection with the calculation of pivots 45

HYDRODYNAMICS

D. CAZACU — Non-permanent one-dimensional motions of compressible fluids in the case of small pressure variation with application to the wather hammer 59

ORGANIC CHEMISTRY

C. NENIȚESCU, F. BADEA — Simplified method for the preparation of sodium hydride and complex hydrides derived from it 93

ELECTROCHEMISTRI

L. STANCU — Improving the current output on the formation of chlove oxygenate compounds 99

I. CRIȘAN — Obtaining on electrolytical way of copper in dispersed state, from chloroamonical solutions of complex monovalent ions 107

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

T. IONESCU, M. GORUNEANU, C. TUDORACHE — An investigation of properties of some cationites obtiained from lignin 121

I. DRIMUȘ, I. ADAMACHE, C. LĂZESCU — Some tensioative agents in the recovery of crude-oil from an artificial core 129

ELECTRICITY

AL. TIMOTIN — On the definition of the volume density of the force 139

V. NEDELCU — On the expression of the electromagnetic torque developed by asynchronous machine . . . 149

ELECTROMAGNETIC WAVES

ED. NICOLAU — On the network equations in antenna theory 153

A. MILLEA — Approximate computation of the critical frequencies in polygonal section waveguides . . . 161

STRENGTH OF MATERIALS

GH. BUZDUGAN, A. CONSTANTINESCU — A study on the stresses in the vicinity of discharge openings of cement furnaces 173

A. PETRE — Motion equations for straght beam buckling under axial impact 189

INFORMATIONS 199

SOMMAIRE

MATHEMATIQUE

C. IONESCU-BUJOR — Sur les suites de points obtenues par une suite de transformations 13

PHYSIQUE

D. BIRCA-GĂLĂȚEANU — Le spectre de vibration de l'huile de pin dans la région de 1μ à 3,7 μ . . . 23

A. POPA-ICHIMESCU — La sensibilité locale des quelques cellules photoélectriques en lumière naturelle et polarisée 29

MECANIQUE

AL. STOENESCU, M. ATANASIU — Une généralisation de la loi des aires 37

M. ATANASIU — Considérations sur le calcul des pivots . 45

HYDRAULIQUE

M. D. CAZACU — Mouvements unidimensionnels et nonpermanents des fluides compressibles dans le cas des petites variations de pression avec des applications au coup de bélier 59

CHIMIE ORGANIQUE

C. NENIȚESCU, F. BADEA — Méthode simplifiée pour la preparation de l'hydrure de sodium et des hydrures complexes dérivées 93

ELECTROCHIMIE

L. STANCU — Sur l'amélioration du randement de courant à la formation des produits oxigénés du chlore . . 99

I. CRIȘAN — L'obtention électrolytique du cuivre en état dispersé des solutions chloroammoniacales des ions complexes monovalents. 107

CHIMIE TECHNOLOGIQUE

T. IONESCU, M. GORUNEANU, G. TUDORACHE — L'étude des propriétés des quelques cationites obtenus de lignine 121

I. DRIMUȘ, I. ADAMACHE, C. LĂZESCU — Sur des agents tensioactifs dans la récuperation d'huile d'une carotte artificielle 129

ELECTROTECHNIQUE

AL. TIMOTIN — Sur la définition de la densité volumique de la force 139

V. NEDELCU — Sur l'expression du couple éléctromagnetique devéloppé dans les machines asynchrones . 149

ONDES ELECTROMAGNETIQUES

ED. NICOLAU — Un théorème pour les systémes d'antennes 153

A. MILLEA — Le calcul approximatif des fréquences de coupure pour les guides d'ondes à section polygonale 161

RESISTANCE DES MATERIAUX

GH. BUZDUGAN, A. CONSTANTINESCU Etude des contraintes dans le voisinage des ouvertures d'évacuation des fours rotatifs 173

A. PETRE — Les équations du mouvement dans le cas du flambage des barres droites par choc axial . . 189

INFORMATIONS 199

INHALT

MATHEMATIK

C. IONESCU-BUJOR — Uber den Reihen von Punkten mit einer Reiche von Transformationen gezeugt werden . 13

PHYSIK

D. BÎRCĂ-GĂLĂȚEANU — Das Schwingungsspektrum des Fichtenöls in Gebiet von 1μ bis 3,7μ 23

A. POPA-ICHIMESCU — Die lokale empfindlichkeit bestimmter photoelektrischer Zellen für naturliches und polarisiertes Licht 29

MECHANIK

AL. STOENESCU, M. ATANASIU — Eine verallgemeinerung des Flächengesetzes 37

M. ATANASIU — Betrachtungen über die Berechnung des Revolutionszapfen 45

HYDRODYNAMIK

M. CAZACU — Eindimensionale instationäre Bewegung kompressibler Flüssigkeiten bei kleinen Druckänderungen mit Anwendung auf dem Wasserschlag . 59

ORGANISCHE CHEMIE

C. D. NENIȚESCU, F. BADEA — Vereinfachte Methode zur Darstellung von Natriumhydrid und von daraus gewonnen komplexen Hydriden 93

ELEKTROCHEMIE

L. STANCU — Verbesserung der Stromleistungserzeugung bei der Bildung von oxydierten Chlorzusammensetzungen 99

I. CRIȘAN — Die electrolytische Herstellung des Kupfers in streuförmigen Zustand aus Chlorammoniumlösungen von einwertigen Komplexen lonen 107

TEHNOLOGISCHE CHEMIE

T. IONESCU, M. GORUNEANU, G. TUDORACHE — Untersuchung der Eigenschaften einiger aus Lignin gewonnenen kationiten 121

I. DRIMUȘ, I. ANDRONACHE, C. LĂZESCU — Einige oberflächen aktiven stoffe bei der oelverdrängung aus künstlichen kernen 129

ELEKTROTECHNIK

AL. TIMOTIN — Uber die Definition der Kraftdichte . 139

V. NEDELCU — Uber den ausdruck des von einer asynchronen maschine entwickelten elektromagnetischen Drehmomentes 149

ELEKTROMAGNETISCHEN WELLEN

ED. NICOLAU — Netztheorem für Mehrfachantennen . 153

A. MILLEA — Näherungsberechnung der Grenzfrequenzen von Hohlleitern mit vieleckigem Querschnitt . 161

FESTIGKEITSLEHRE

GH. BUZDUGAN, A. CONSTANTINESCU — Uber die in der Nähe der Entheerungsöffnungen von Zementöfen auftretenden Spannungen 173

A. PETRE — Bewegungsgleich ungen im falle der knickung der geraden trägern durch axialen Stoss . . 189

INFORMATIONEN 199

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 3

MATEMATICA

517.5

SUR LES SUITES DE POINTS OBTENUES PAR UNE SUITE DE TRANSFORMATIONS

par CONSTANTIN IONESCU-BUJOR

1°. Nous considérons dans cette note des transformations qui appliquées aux points d'un espace font correspondre à chaque point un point du même espace. Aussi nous supposons qu'à chaque transformation il correspond une transformation inverse.

Considérons, appliquée aux points d'un espace, la suite de transformation $[T_p]$:

$$1, T_1, \ldots, T_p, \ldots \tag{1}$$

L'application de cette suite, transforme deux points M, N de l'espace, formant les suites de points $[M_p]$, $[N_p]$:

$$M, M_1, \ldots, M_p, \ldots \tag{2}$$

$$N, N_1, \ldots, N_p, \ldots \tag{3}$$

$[M_p]$, $[N_p]$ sont les suites de points transformés engendrées par les transformations de la suite $[T_p]$ appliquées aux points M, N.

S'il y a une suite de transformations $[\tau_p]$:

$$\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_p, \ldots \tag{4}$$

telle que τ_p transforme le point M_p en N_p $(p = 0,1,2\ldots)$, nous dirons que la suite $[M_p]$ est appliqu es sur la suite de points $[N_p]$ par la suite de transformations $[\tau_p]$.

2°. *A chaque transformation τ_0 qui transforme le point M en N, il correspond une suite $[\tau_p]$ qui applique la suite de points $[M_p]$ sur $[N_p]$.*

Si τ_0 est une transformation qui transforme le point M en N, la transformation qui fait correspondre au point M_p le point N_p est

$$\tau_p = T_p \ \tau_0 \ T_p^{-1},$$

donc la suite $[\tau_p]$ est :

$$\tau_0, \ T_1 \ \tau_0 \ T_1^{-1}, \ T_2 \ \tau_0 \ T_2^{-1}, \ldots \tag{5}$$

Dans cette note nous admettrons qu'il existe une infinité de transformations qui transforment le point M en N.

Si la suite de points $[M_p]$ est appliquée sur la suite $[N_p]$ par les transformations de la suite $[\tau_p]$, pour trouver la suite qui applique

$$M_p, M_{p+1}, \ldots, M_{p+k}, \ldots \tag{2'}$$

sur

$$N_q, N_{q+1}, \ldots, N_{q+k}, \ldots \tag{3'}$$

nous observons qu'on transforme M_{p+k} en N_{q+k} par

$$T_{q+k}\ \tau_0\ T_{p+k}^{-1}$$

et la suite cherchée est

$$T_q\ \tau_0\ T_p^{-1}, T_{q+1}\ \tau_0\ T_{p+1}^{-1}, \ldots, T_{q+k}\,\tau_0\,T_{p+k}^{-1}, \ldots \tag{5'}$$

Conséquence. Toute suite de points engendrée par les transformations de la suite $[T_p]$ *appliquées au point M, est applicable sur soi-même.*

Dans ce cas on a $N \equiv M$, $\tau_0 \equiv 1$ et si $q > p$, la suite (2') est appliquée sur

$$M_q, M_{q+1}, \ldots M_{q+k}, \ldots$$

par

$$T_q\ T_p^{-1}, T_{q+1}\ T_{p+1}^{-1}, \ldots, T_{q+k}\ T_{p+k}^{-1}, \ldots \tag{5''}$$

3°. LES SUITES DE POINTS CONCOURANTES. *Définitions. Deux suites de points* $[M_p]$. $[N_p]$ *engendrées par les transformations de la suite* $[T_p]$ *appliquées aux points M, N sont concourantes s'il y a coïncidence entre un point d'une suite et un point de l'autre.*

Les deux suites sont i — concourantes s'il y a coïncidence entre i points d'une suite et i points de l'autre suite.

4°. *Si* τ_0 *transforme un point quelconque M en N, les suites de points* $[M_p]$, $[N_p]$ *engendrées par les transformations de la suite* $[T_p]$ *appliquées aux points M, N ne sont pas concourantes en deux points correspondants* M_p, N_p.

Supposons que pour tout M on a

$$M_p \equiv N_p.$$

Comme N_p résulte par l'application de

$$T_p\ \tau_0\ T_p^{-1}$$

à M_p, on aurait

$$T_p\ \tau_0\ T_p^{-1} = 1,$$

donc

$$\tau_0 = T_p^{-1}\ T_p = 1,$$

ce qui est absurde.

5°. *Si* τ_n *transforme un point quelconque M en N, la condition nécessaire et suffisante pour que les suites de points* $[M_p,]$ $[N_p]$ *engendrées*

par les transformations de la suite $[T_p]$ *appliquées aux points M, N soient concourantes tel que* $M_p \equiv N_q$ *est*

$$\tau_0 = T_q^{-1}\, T_p .$$

Supposons que pour tout M on a

$$M_p \equiv N_q .$$

Alors

$$T_q\ \tau_0\ T_p^{-1} = 1 ,$$

donc

$$\tau_0 = T_q^{-1}\, T_p .$$

Si cette équivalence est vraie, comme M_p est transformé en N_q par $T_q\ \tau_0 T_p^{-1}$, il résulte

$$M_p \equiv N_q .$$

Conséquence : Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les suites de points $[M_p], [N_p]$ soient i — concourantes tel que

$$M_{p_1} \equiv N_{q_1} , M_{p_2} \equiv N_{q_2} , \ldots , M_{p_i} \equiv N_{q_i}$$

sont :

$$T_{q_1}^{-1}\, T_{p_1} = T_{q_2}^{-1}\, T_{p_2} = \ldots = T_{q_i}^{-1}\ T_{p_i} = \tau_0 .$$

6⁰. Considérons relativement à un axe le groupe $[\ \omega\ ]$ des transformations projectives ayant les points α, β comme points doubles et la suite $[\omega_p] \subset [\omega]$, dont les termes

$$\omega_1,\ \omega_2 , \ldots , \omega_p , \ldots , \omega_q , \ldots \qquad (6)$$

correspondent aux valeurs

$$\lambda_1,\ \lambda_2 , \ldots , \lambda_p , \ldots , \lambda_q , \ldots$$

de l'invariant absolu.

Si $\omega_0 \in [\omega]$ a l'invariant absolu $\dfrac{\lambda_p}{\lambda_q}$ et transforme un point quelconque M de l'axe en N, alors les suites de points engendrées par la suite $[\omega_p]$ appliquée aux points M,N sont concourantes en $M_p \equiv N_q$.

En effet, ω_q^{-1} a l'invariant absolu $-\dfrac{1}{\lambda_q}$, donc l'invariant absolu de $\omega_q^{-1}\ \omega_p$ est $\dfrac{\lambda_p}{\lambda_q}$. Il résulte

$$\omega_0 = \omega_q^{-1}\, \omega_p ,$$

donc la concourence des suites $[M_p]$, $[N_q]$ en $M_p \equiv N_q$.

7'. Si les transformations de la suite $[T_p]$ appartiennent à un groupe de transformations $[T]$ et si les suites des points $[M_p], [N_p]$ sont concourantes, la transformation τ_0 appartient au groupe $[T]$.

Par conséquent, s'il n'existe pas une transformation du groupe $[T]$ pour transformer un point doné M en N, les suites $[M_p]$, $[N_p]$ ne sont pas concourantes.

Considérons, par exemple, comme transformations de la suite $[T_p]$ des rotations du groupe $[R]$ des rotations planes ayant comme centre un point O. Un point quelconque du plan este transformé en un autre point N par une rotation R du groupe considéré seulement si $OM = ON$. Il résulte que pour $OM \neq ON$ les suites de points $[M_p]$, $[N_p]$ engendrées par la suite $[T_p]$ appliquée aux points M,N ne sont pas concourantes.

Mais pour $OM = ON$, il existe une rotation τ_0 du groupe $[R]$, dont l'angle est $\alpha = MON$ qui transforme le point M en N. Pour que les suites de pointes $[M_p]$, $[N_p]$ soient concourantes en $M_p \equiv N_q$, il est nécessaire que

$$\tau_0 = T_q^{-1}\, T_p\,,$$

donc si α_p, α_q sont les angles des rotations T_p, T_q, on a la condition

$$\alpha = 2\pi + \alpha_p - \alpha_q\,.$$

8°. *Le faisceau des suites de points engendrées par une suite de transformations.*

Considérons les suites de transformations $[T_p]$, $[\tau_p]$:

$$1,\ T_1,\ T_2, \ldots T_p, \ldots \tag{7}$$

$$1,\ \tau_1,\ \tau_2, \ldots \tau_p, \ldots \tag{8}$$

Un point quelconque M est transformé par la suite (8) en

$$M_0,\ M_1,\ M_2, \ldots, M_p, \ldots \tag{9}$$

En appliquant à chaque point de la suite (9) la suite de transformations (7), on obient les suites de points :

$$M_i,\ M_{i1},\ M_{i2}, \ldots, M_{ip}, \ldots \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{10}$$

Si

$$M_{ip_0} \equiv M_{1p_1} \equiv M_{2p_2} \equiv \ldots \equiv M_{kp_k}\,,$$

les suites de points $[M_{ip}]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots k)$ sont concourantes. Ces suites forment un faisceau de suites. Dans ce cas il est nécessaire et il suffit qu'on ait :

$$\tau_1 = T_{p_1}^{-1}\, T_{p_0}\,,\ \tau_2 = T_{p_2}^{-1}\, T_{p_0}, \ldots, \tau_k = T_{p_k}^{-1}\, T_{p_0} \tag{11}$$

En particulier, si

$$\tau_1 = \tau \text{ et } \tau_p = \tau^p \text{ pour tout } p\,,$$

la suite (8) est

$$1,\ \tau,\ \tau^2, \ldots, \tau^p, \ldots$$

et les conditions (11) deviennent

$$\tau = T_{p_1}^{-1} T_{p_0} = T_{p_2}^{-1} T_{p_1} = \ldots = T_{p_k}^{-1} T_{p_{k-1}},$$

ce qui montre que les suites $[M_{0p}]$, $[M_{1p}]$ sont K concourantes.

9° LES SUITES PARALLÈLES DE POINTS, ENGENDRÉES PAR LES TRANSFORMATIONS D'UNE SUITE APPLIQUÉE À DEUX POINTS.

Définition. Soient $[M_p]$, $[N_p]$, *deux suites de points engendrées par la suite de transformations* $[T_p]$, *appliquée à deux points quelconques* M, N. *Les suites* $[M_p]$, $[N_p]$ *sont parallèles par rapport à l'ensemble de transformations* $[\tau]$ *s'il existe un ensemble de transformations* $[\tau]$, *tel que pour chaque couple* M, N *donné on a*

$$\tau \in [\tau]$$

qui transforme M_p *en* N_p ($p = 0, 1, 2 \ldots$).

Exemple : Si les transformations T_p sont des translations et M, N sont deux points quelconques de l'espace, les suites de points $[M_p]$, $[N_p]$ engendrées par la suite $[T_p]$ sont parallèles, par rapport à l'ensemble des translations parcequ'il y a une translation, à savoir la translation définie par le vecteur MN qui transforme chaque point de la suite $[M_p]$ en son correspondant de la suite $[N_p]$.

Théorème. S'il existe un ensemble de transformations $[\tau]$, *qui transforme un point* M *de l'espace considéré en chaque point* N *de l'espace, pour que les suites de points* $[M_p]$, $[N_p]$ *engendrées par les transformations de la suite donnée* $[T_p]$ *soient parallèles par rapport à* $[\tau]$ *il faut et il suffit que le produit*

$$T_p \tau$$

soit commutatif pour tout τ *et* p.

En effet, si les suites $[M_p]$, $[N_p]$ sont parallèles, nous avons

$$\tau = T_p \tau \, T_p^{-1},$$

donc

$$T_p \tau = \tau T_p .$$

Comme τ transforme le point M en N, alors si

$$T_p \tau = \tau T_p \quad \text{pour tout p,}$$

on a

$$\tau = T_p \tau \, T_p^{-1},$$

donc M_p est transformé en N_p par la transformation τ et les suites $[M_p]$, $[N_p]$ sont parallèles par rapport à $[\tau]$.

10°. Soit donnée dans l'espace la suite $[H_p]$ des homothéties

$$1, H_1, H_2 \ldots, H_p, \ldots$$

ayant le point O comme centre. Les suites de points $[M_p]$, $[N_p]$ engendrées par la suite $[H_p]$ appliquée à deux points quelconque M, N de l'espace sont parallèles par rapport à l'ensemble [a] des transformations perspectives-affines de l'espace, définies par un plan π qui contient le point O, car il existe toujours une transformation $a \in [a]$ qui transforme le point M en N et le produit aH_p est commutatif.

11° a) La propriété de parallèlisme, par rapport à un ensemble $[\tau]$, des suites de points engendrées par les transformations d'une suite $[T_p]$ appliquées aux points d'un espace est réflexive, symétrique et transitive.

b) Soient $[T]$, $[\tau]$ deux ensembles de transformations tel qu'il existe toujours $T \in [T]$ et $\tau \in [\tau]$ qui transforment un point donné M de l'espace considéré en un autre point N. On note $[M_p]$, $[N_p]$, les suites de points engendrées par la suite de transformations $[T_p] \subset [T]$ appliquée aux points M, N *et* $[M'_p]$, $[N'_p]$ les suites engendrées par $[\tau_p] \subset [\tau]$ appliquée aux mêmes points.

Si les suites $[M_p]$, $[N_p]$ sont parallèles par rapport à $[\tau]$ quels que soient $[T_p]$, les suites $[M'_p]$, $[N'_p]$, sont parallèles par rapport à $[T]$.

c) Soient $[T]$, $[\tau]$, $[t]$ trois ensembles de transformations tel qu'il existe toujours $\tau \in [\tau]$, $t \in [t]$ qui transforment un point donné M de l'espace considéré en un autre point N, de même que $t^{-1} \in [t]$.

On note $[M_p]$, $[N_p]$ les suites de points engendrées par la suite de transformations $[T_p] \subset [T]$ appliquée aux points M, N, et $[M'_p]$, $[N'_p]$ la suite de points engendrée par $[\tau_p] \subset [\tau]$.

Si les suites $[M_p]$, $[N_p]$ sont parallèles par rapport à $[t]$, si les suites $[M'_p]$, $[N'_p]$ sont aussi parallèles par rapport à $[t]$ quels que soient $[\tau_p]$, alors $[M_p]$, $[N_p]$ sont parallèles par rapport à $[\tau]$.

La première condition donne

$$T_p\, t = t\, T_p$$

pour tout $t \in [t]$ et pour tout p.

La seconde condition donne

$$\tau_p\, t = t\, \tau_p$$

pour tout $t \in [t]$ et pour tout p. On a donc aussi

$$t^{-1}\, \tau_p = \tau_p\, t^{-1}\,.$$

Il résulte

$$T_p\, \tau_p = \tau_p\, T_p\,.$$

Mais les suites $[M'_p]$ $[N'_p]$, sont parallèles par rapport à $[t]$ quels que soient $[\tau_p] \subset [\tau]$, alors si $\tau \in [\tau]$, τ este un terme d'une certaine suite $[\tau_p]$. On a donc

$$T_p\, \tau = \tau\, T_p$$

pour toute transformation τ de $[\tau]$, d'où il résulte le parallèlisme des suites $[M_p]$, $[N_p]$ par rapport à $[\tau]$.

12°. Soit $[T]$ un ensemble de transformations commutatif tel qu'il existe toujours $T \in [T]$ qui transforme un point donné M de l'espace con-

sidéré en un autre point N, $[T_p]$ une suite de transformations qui appartiennent à $[T]$.

Les suites de points $[M_p]$, $[N_p]$ engendrées par la suite de transformations $[T_p]$, appliquée à M, N, sont parallèles par rapport à $[T]$, car il existe $T \in [T]$ qui trasforme le point M en N et $T_p T = T T_p$.

Exemple. Soient $[H]$ l'ensemble des homothéties du plan dont le centre este le point O, $[R]$ l'ensemble des rotations qui ont le point O comme centre et $[RH]$ l'ensemble des produits RH. Il y a une transformation RH qui transforme un point donée M en un autre point N. L'ensemble $[RH]$ est commutatif. Alors si $[M_p]$, $[N_p]$ sont les suites de points engendrées par une suite $[R_p H_p] \subset [RH]$, il y a une transformation RH qui transforme M_p en N_p $(p = 1, 2, \ldots)$.

13°. LES TRANSFORMATIONS D'UN ENSEMBLE $[T]$ CORRESPONDANTES PAR RAPPORT À UNE TRANSFORMATION τ.

Définition. Deux transformations T, T' de l'ensemble $[T]$ sont correspondantes par rapport à une transformation τ si deux points quelconques M, M' correspondants par τ sont transformés réspectivement par T, T' en des points M_1, M'_1 correspondants par τ.

Théorème. Pour que les transformations T, T' de l'ensemble $[T]$ soient correspondantes par rapport à une transformation τ, il faut et il suffit la condition

$$\tau T = T' \tau .$$

Si les transformatios T, T' sont correspondantes par rapport à τ on a

$$\tau = T' \tau T^{-1},$$

donc

$$\tau T = T' \tau .$$

Si cette équivalence est vraie, on déduit

$$\tau = T' \tau T^{-1},$$

donc la correspondance des transformations T, T' par rapport à τ.

Exemples. a) Soit $[H]$ l'ensemble des homothéties du plan, S la symétrie dont l'axe est la droite D.

Si H est l'homothétie de centre O ayant le nombre k comme rapport, sa correspondante par rapport à la symétrie considérée est l'homothétie H' dont le rapport est k et la centre est O', le symétrique de O par rapport à D,

b) Soit $[H]$ l'ensemble des homothéties de l'espace, a la transformation perspective — affine de l'espace, définie par le plan π, la direction Δ e le rapport λ. La correspondante par rapport à a d'une homothétie H dont le centre est O et le rapport k est une homothétie H' ayant comme centre le point O' obtenu en appliquant à O la transformaton a et le rapport k.

Définition. Un ensemble de transformations $[T]$ est symétrique par rapport à un autre ensemble de transformations $[\tau]$ si chaque transformation $T \in [T]$ a une transformation correspondante $T' \in [T]$ par rapport à $\tau \in [\tau]$, τ étant une transformation quelconque de $[\tau]$.

L'ensemble des homothéties planes est symétrique par rapport à l'ensemble des symétries planes définies par les droites du plan.

Notes. a) Soit $[T]$ un ensemble de transformations symétrique par rapport à l'ensemble $[\tau]$.

Si $\tau \in [\tau]$, on considère la suite $[T_p] \subset [T]$ et la suite $[T'_p]$ des transformations correspondantes de $[T_p]$ par rapport à τ.

En transformant un point quelconque M de l'espace considéré par τ, on obtient un point M'. Soient $[M_p]$, $[M'_p]$ les suites de points engendrées par les suites $[T_p]$, $[T'_p]$ appliquées respectivement aux points M, M'. La transformation τ applique la suite $[M_p]$ sur $[M'_p]$. Donc les suites de transformations correspondantes par rapport à une transformation τ engendrent des suites de points applicables par τ. C'est une extension du parallélisme des suites de points.

b) Si T, T' sont deux transformations correspondantes par rapport à τ on a

$$T' = \tau T \tau^{-1},$$

14°. *Propriétés.* Soit $[T]$ un groupe de transformations symétrique par rapport à l'ensemble $[\tau]$. Si $T \in [T]$, $T' \in [T]$ sont deux transformations correspondantes par rapport à $\tau \in [\tau]$, notons $(T^p)'$, $(T^{-1})'$ les transformations correspondantes de T^p, T^{-1}. On a :

$$(T^p)' = (T')^p, \quad (T^{-1})' = (T')^{-1}.$$

Nous avons

$$(T')^2 = (\tau T \tau^{-1})\ (\tau T \tau^{-1}) = \tau T^2 \tau^{-1} = (T^2)'.$$

Si

$$(T')^k = (T^k)',$$

alors

$$(T')^{k+1} = T'(T')^k = (\tau T \tau^{-1})\ (T^k)' = (\tau T \tau^{-1})\ (\tau T^k \tau^{-1}) = \\ = \tau T^{k+1} \tau^{-1} = (T^{k+1})'.$$

Pour justifier la seconde équivalence, on parte de

$$T' = \tau T \tau^{-1},$$

d'où

$$\tau^{-1}\ T' = T \tau^{-1},$$

ou

$$T^{-1}\ \tau^{-1}\ T' = \tau^{-1}, \quad T^{-1}\ \tau^{-1} = \tau^{-1}\ (T')^{-1}.$$

Donc

$$\tau\ T^{-1}\ \tau^{-1} = (T')^{-1}$$

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'.$$

15°. *On donne le groupe de transformations* $[T]$ *et l'ensemble* $[t]$, *symétriques par rapport à l'ensemble* $[\tau]$ *Supposons qu'il existe* $t \in [t]$

qui transforme un point quelconque M de l'espace considéré en N. Soient $[T_p] \subset [T]$, $[T'_p] \subset [T]$ *deux suites de transformations correspondantes par rapport à* $\tau \in [\tau]$. *En transformant deux points M, N, par* τ *on obtient les points M', N'.*

Si $[M_p]$, $[N_p]$, *les suites de points engendrées par* $[T_p]$ *appliquée aux points M, N, sont concourantes ou parallèles, alors les suites de points* $[M'_p]$, $[N'_p]$ *engendrées par* $[T'_p]$ *appliquée aux points M' N' sont aussi concourantes ou parallèles.*

a) Supposons les suites $[M_p]$, $[N_p]$ concourantes en $M_p \equiv N_q$. Alors, si t est la transformation qui transforme M en N, on a

$$t = T_q^{-1} T_p .$$

Soit t' la transformation correspondante de t par rapport à τ.
Alors

$$t' = \tau t \tau^{-1},$$

t' transforme le point M' en N'.

Mais

$$T'_p = \tau T_p \tau^{-1},$$

$$(T'_q)^{-1} = (T_q^{-1})' = \tau T_q^{-1} \tau^{-1}.$$

donc

$$(T'_q)^{-1} T'_p = \tau T_q^{-1} T_p \tau^{-1} = \tau t \tau^{-1} = t'.$$

Par conséquent les suites $[M'_p]$, $[N'_p]$ sont concourantes en $M'_p \equiv N'_q$.
b) Si les suites $[M_p]$, $[N_p]$ sont parallèles,

$$T_p t = t T_p.$$

Comme

$$T'_p t' = (\tau T_p \tau^{-1}) (\tau t \tau^{-1}) = \tau T_p t \tau^{-1} = \tau t T_p \tau^{-1} =$$
$$= (\tau t \tau^{-1}) (\tau T_p \tau^{-1}) = t' T'_p ,$$

les suites $[M'_p]$, $[N'_p]$ sont aussi parallèles.

La Chaire de Mathématique
Institut Polytechnique de Bucarest

О РЯДЕ ТОЧЕК, ПОЛУЧЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ НЕКОТОРОГО РЯДА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Краткое содержание)

Исследуются свойства ряда точек, полученных применением к двум точкам M, N ряда преобразований $[T_p]$.

ON THE SETS OF POINTS WHICH ARE FORMED WITH A SET OF TRANSFORMATIONS.

(Summary)

It is given a study of the sets of points which are formed with a set of transformations.

SUR LES SUITES DE POINTS OBTENUES PAR UNE SUITE DE TRANSFORMATIONS

(Résumé)

On étudie des propriétes des suites de points engendrées par une suite de transformations appliquée à deux points M, N de l'espace.

ÜBER DEN REIHEN VON PUNKTEN MIT EINER REIHE VON TRANSFORMATIONEN GEZEUGT WERDEN

(Zusammenfassung)

Man beweist die Eigenschaften der Reihen von Punkten die ausgemacht werden ob eine Reihe von Transformationen an zwei Punkten M, N aufgelegt wird.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 3

FIZICA

537.541

DAS SCHWINGUNGSSPEKTRUM DES FICHTENÖLS IN GEBIET VON 1 μ BIS 3, 7 μ

von DUMITRU BIRCA-GALĂŢEANU, LUCIA ALDEA und LELIA ARCAN

Vorliegende Arbeit hat die Untersuchung eines Öls durch ultrarote Absorptionsspektrum zum Gegenstand, welches aus Samen grosser Baumpflanzen, wie Fichte, gewonnen wurde. Fichtenöl ist, wie alle Pflanzenöle, ein Mischglizied. Wir verfolgen daher die Identifizierung der Grundschwingungen der Fettsäuren, mit denen das Glyzerin im Fitchtenöl verseift ist, wie auch die Erklärung der anderen Absorptionsbanden, die im Ultrarot auftreten.

Fichtenöl enthält einen kleinen Prozentsatz gesättigter Fettsäuren. Von ungesättigten Säuren sind am stärksten Linolsäure (75%) und Linolensäure. (12%) vertreten.

Das von uns benützte Fichtenöl wurde aus Fichtensamen mit Petroläther ausgezogen ; seine physikalischen Konstanten sind :

$$\varrho = 0{,}9285 \text{ g/cm}^3, \; n_D = 1{,}4902 \text{ bei } 20^0\text{C}.$$

Die experimentelle Untersuchung wurde mittels eines Spektrometers mit versilberten Spiegeln und Cornu-Quarzprisma [1] durchgeführt. Das benützte Zernicke Galvanometer ist an ein Vakuumthermoelement angeschlossen.

Für die Messungen wurden Absorptionsgefässe aus Glas oder aus zwischen Quarzplatten befestigten Zinkscheiben benützt. Die Dicke der Ölschicht variierte, wie aus der Figur ersichtlich, zwischen 5 mm im Spektralgebiet von 7500 cm^{-1} und 0,005 mm im Gebiet von 3000 cm^{-1}.

Die Ergebnisse der Messungen könen aus Fig. 1 ersehen werden. Die Absorptionskurven zeigen, dass Fichtenöl im untersuchten Spektralbereich drei intensive Absorptionsgebiete aufweist, und zwar bei $\sim 1{,}4\,\mu$, $\sim 1{,}7\,\mu$ und $3{,}4\,\mu$.

Mann bemerk, dass die stärkste Absorption bei 3000 cm^{-1} auftrit, wo drei Absorptionsbanden gefunden wurden.

Bei der Zuordnung der Absorptionsbanden muss in Betracht gezogen werden, dass — wie kompliziert auch immer die Molekeln eines Stoffes seien — die im betreffenden Stoff vorhandenen Atomgruppen charakteristische Grundschwingungen haben, die in den Spektren der diese Atomgruppen enthaltenden Moleküle auftreten und deren spektrale Lage in grösserem oder gleinerem Masse vom restlichen Bau des Moleküls beeinflusst wird.

Linol- und Linolensäure, mit denen das Glyzerin des Fichtenöls verseift, enthalten zahlreiche CH_2^- Gruppen:

Linolsäure: $CH_3(CH_2)_4—CH=CH—CH_2—CH=CH—(CH_2)_7—COOH$.

Linolensäure: $CH_3CH_2—CH=CH—CH_2—CH=CH—CH_2—$
$—CH=CH_2)_7—COOH$.

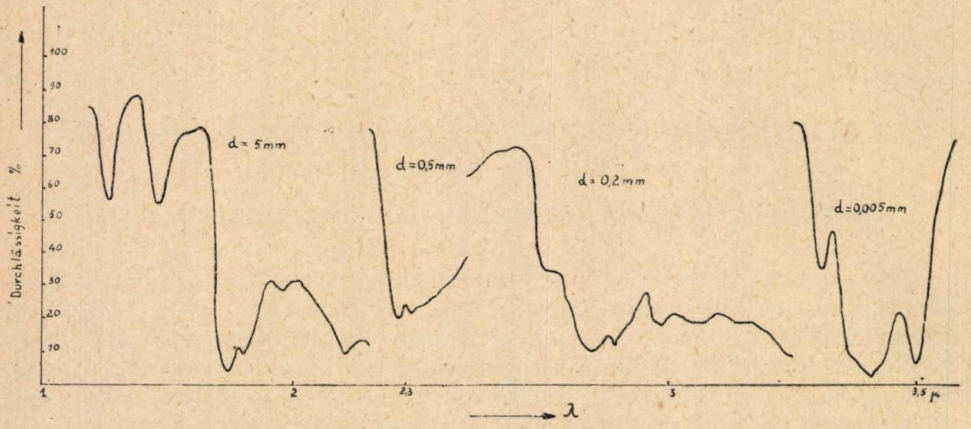


Fig 1.

Die drei intensiven Absorptionsbanden des 3000 cm^{-1} — Gebites müssen der CH_2^- Gruppe zugeordnet werden, und zwar die intensivste unter ihnen ($\nu_2 = 2925\ cm^{-1}$) der antisymmetrischen Valenzschwingung; die zweitstärkste ($\nu_1 = 2853\ cm^{-1}$) der symetrischen Valenzschwingung und die dritte der Oktave ($2\nu_3 = 3005\ cm^{-1}$) der Deformationsschwingung derselben Gruppe, deren Grunde bei etwa 7 μ liegt.

Aus der Figur ist ersichtlich, dass diese Bande, obwoh einer Oberschwingung zugehörig, recht stark ausgeprägt ist. Ihre grosse Intensität verdankt sie der Nähe der Grundschwingung ν_2, eine Erscheinung die unter dem Namen Fermi - Resonanz bekannt ist [2]. Die spektrale Lage der drei von uns gefundenen Banden des Fichtenöls unterscheidet sich ein wenig von der der entsprechenden Banden von drei früher untersuchten Pflanzenölen [3] und von Sonnenblumenöl und einigen Fettsäuren, die von der sowjetischen Arbeitsgruppe M. G. Batyschewa und Mitarbeiter untersucht wurden [4].

Wir betrachten die beiden intensiven Banden bei 1,7 μ als die ersten Oberschwingungen der CH_2 — Grupe im Gebiet von 3000 cm^{-1}.

$$2\nu_2 = 5820\ cm^{-1}$$

$$2\nu_1 = 5727\ cm^{-1}.$$

Die Zuordnung dieser Banden gründet sich auf ihre spektrale Lage und Intensität.

Die im Fichtenöl am stärksten vertretene Linolsäure enthält in ihrem Molekül zwei Doppelbindungen C = C der Kohlenstoffatome, während die Linolensäure drei solche Doppelbindungen aufweist; die spektrale Lage und Intensität der Bande $\nu = 5185\ cm^{-1}$ rechtfertigt ihre zuordnung als Oberschwingung der Valenzschwingung dieser Gruppe.

Tabelle der Absorptionsbanden des Fichtenöls

λ μ	ν cm^{-1}	Bandenzuordnung
1,207	8282	$3\nu_1$; CH_2
1,421	7044	C—C
1,720	5820	$2\nu_2$; CH_2
1,750	5727	$2\nu_1$; CH_2
1,932	5185	C=C
2,142	4671	
2,356	4244	
2,838	3523	
2 892	5457	
3,004	3328	
3,328	3005	$2\nu_3$; CH_2 (δ)
3,419	2925	ν_2 ; CH_2 (asymm)
3,505	2853	ν_1 ; CH_2 (symm)

Im Spektralgebiet zwischen 1 μ und 1,5 μ weist das Fichtenöl zwei intensive Banden bei 1,207 μ und bei 1,421 μ auf. Letzten glauben wir, einer Oberschwingung der C — C — Grundschwingung zuschreiben zu dürfen, die sie bei den von Ellis [5] untersuchten azyklischen Kohlenwasserstoffen nie fehlt. Was die 1,207 μ Bande anbetrifft, so kann sie der zweiten Oberschwingung $3\nu_1$ der symmetrischen Valenzschwingung der CH_2 — Gruppe zugeordnet werden. Die anderen in der Tabelle aufgeführten Banden sind Kombinationsbanden. Die Struktur dieses Ölmoleküls ist zu kompliziert, als dass man seine Schwingungsfrequenzen auf Grund eines Modells berechnen könnte; dies hat zur Folge, dass die Zuordnung der Kombinationsbanden weniger Wahrscheinlichkeit beanspruchen können. Bemerkenswert ist, dass im untersuchten Spektralbereich bei diesem Öl einige Banden auftreten, wie etwa die drei Banden bei 2,8 μ und 3 μ, die bei anderen Pflanzenölen fehlen. Im grossen und ganzen bestätigen die gefundenen Absorptionsbanden die durch chemische Methoden festgestellte Struktur.

Wir danken auch auf diesen Wege dem Akademiemitglied Prof. H. Hulubei, für die Überlassung der Apparatur des Laboratoriums für Atomphysik der Bukarester C. I. Parhon-Universität, sowie auch Ing. J. Cornea für die Bereitung des Öls.

II. Lehrstuhl für Physik.
Polytechnisches Institut Bukarest

SCHRIFTTUM

1. *D. Bircă-Gălățeanu* — ZS. f. Phys., Bd. 117, 589, 1941.
2. *G. Hersberg* — Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules; Seite 215; New-York, 1946.
3. *St. Vencov, D. Bircă- Gălățeanu și C. Gheorghiță-Oancea* — Bul. St. secția Mat. și Fiz. al Acad. R.P.R., nr. 2, pag. 391, 1956.
4. *M. G. Batișeva, L. A. Grauerman, L. G. Caranțevici, A. N. Mironova și K. S. Popov* — Isv. Ac. Nauc. SSSR, fiz. T XIV, nr. 4, 458, 1950.
5. *J. W. Fllis* — Phys. Rev. 27, 298, 1926.

СПЕКТР ВИБРАЦИИ СОСНОВОГО МАСЛА В СПЕКТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ОТ 1 μ ДО 3,7 μ

(Краткое содержание)

Автор исследовал спектр вибрации соснового масла в спектральной области от 1 μ до 3,7 μ. В этом интервале изучаемое вещество имеет три интенсивные полосы поглощения вокруг 1,4 μ, 1,7 μ, и 3,4 μ.

В спектральной области 3,4 μ имеются три интенсивные полосы поглошения, обусловленные вибраций группы CH_2. Полоса ν_1=2853 $см^{-1}$ приписываются валентным симетричным колебанием группы CH_2 полоса $\nu_2 = 2925$ $см^{-1}$ валентным асимметричным колеванием, и полоса $\nu_3 = 3005$ $см^{-1}$ октавой колебания при деформации той же группы, с основным колебанием бокруг 7 μ.

Две интенсивные полосы в области 1,7 μ обуслоблены гармониками $2\nu_1 = 5820$ $см^{-1}$ и $2\nu_2 = 5727$ $см^{-1}$.

Между 1 μ и 1,5 μ имеются 2 интенсивные полосы: та из них, которая имеет 7044 cm^{-1} обусловлена гармоникой основного валентного колебания группы C—C, вторая соответствующая 8282 $см^{-1}$ второй гармонике колебания ν_1.

Наиденные полосы поглощения указывают в общеи на молекулярную структуру полученного химическии путем соснового масла.

VIBRATION SPECTRUM OF PINE OIL WITHIN THE REGION 1 μ TO 3, 7 μ

(Summary)

Paper concerns the vibration pattern of pine oil within the region 1 μ — 3,7 μ. In this domain, the substance presents three regions of intense absorption situated at about 1,4 μ, 1,7 μ and 3,4 μ. Within the region beginning from 3,4 μ there are three intense bands attributed to the CH_2 group. The band ν_1=2853 cm^{-1} is attributed to the symetric stretching vibration of the CH_2 group, the band $\nu_2 = 2925$ cm^{-1} to the non-symmetric stretching vibration and the band $\nu_3 = 3005$ cm^{-1} to the octave of the bending vibration of the same group whose fundamental lies at about 7 μ.

The two intense bands in the region 1,7 μ are attributed to the harmonics $2\nu_1 = 5820$ cm^{-1} and $2\nu_2 = 5727$ cm^{-1}.

Between 1 μ and 1,5 μ there exist two intense bands; The band situated at 7044 cm^{-1} is attributed to a harmonic of the stretching fundamental vibration of the C—C group and the band situated at 8282 cm^{-1} to the second harmonic of the ν_1 vibration.

The absorption bands generally confirm the molecular structure established through chemical methods.

LE SPECTRE DE VIBRATION DE L'HUILE DE PIN DANS LA RÉGION DE 1 μ À 3,7 μ

(Résumé)

On a étudié le spéctre de vibration de l'huile de pin dans la region spéctrale depuis 1 μ jusqu'a 3,7 μ. Dans cette region la substance étudié présente trois regions d'absorption intense á 1,5 μ, 1,7 μ et 3,7 μ environ.

Dans la region spéctrale de 3,4 μ on trouve trois bandes intenses dues aux vibrations du group CH_2. La bande $\nu_1 = 2853\ cm^{-1}$ est due à la vibration symetriquè de valence du groupe CH_2, la bande $\nu_2 = 2925\ cm^{-1}$ à la vibration asymétrique de valence, et la bande $\nu_3 = 3005\ cm^{-1}$ à l'octave de la vibration de deformation du même groupe dont la fondamentale se trouve à7 μ environ.

Les deux bandes intenses de la region 1,7 μ sont dues aux harmoniques $2\nu_1 = 5820\ cm^{-1}$ et $2\nu_2 = 5727\ cm^{-1}$.

Entre 1 μ et 1,5 μ se trouvent deux bandes intenses: celle de 7044 cm^{-1} est attribuée a une harmonique de la vibration fondamentale de valence du groupe C—C et celle de 8282 cm^{-1} à la deuxiéme harmonique de la vibration ν_1.

Les bandes d'absorption obténues confirment en grand partie la structure moléculaire établie par les méthodes chimiques.

DAS SCHWINGUNGSSPEKTRUM DES FICHTENÖLS IN GEBIET VON 1 μ BIS 3,7 μ

(Zusammenfassung)

Es wurde das schwingungsspektrum des Fichtenöls im Spectralgebiet von 1,3 μ bis 3,7 μ untersucht. In diesem Gebiete weist der untersuchte Stoff drei starke Absorptionsgebiet auf ungefähr 1,4 μ 3,4 μ, und 1,7 μ.

Im Spektralgebiet von 3,4 μ, befinden sich drei starke Banden, die der Schwingung der CH_2 Gruppe zugeschriben werden. Der Bande $\nu_1 = 2853\ cm^{-1}$ wird der symmetrischen Valenzschwingung der CH_2 Gruppe zugeschriben; der Bande $\nu_2 = 2925\ cm^{-1}$ wirde der antisymetrischen Valenzschwingung und der Bande $\nu_1 = 3005\ cm^{-1}$ wird der Oktave der Deformationsschwingung der selben Gruppe desen Grundschwingung bei ungefähr 7 μ sich befindet, zugeschrieben. Die zwei starken Banden der Gegend 1,7 μ werden den Oberschwingung $\nu_1 = 5820\ cm^{-1}$ und $2\nu_1 = 5727\ cm^{-1}$ zugeschrieben.

Zwischen 1 μ und 1,5 μ befinden sich zwei starke Banden: der bei 7044 cm^{-1} wird einer Oberschwingung der Grundvalenzschwingung der Gruppe C—C und der bei 8282 cm^{-1} der zweiten Oberschwingung der Schwingung ν_1 zugeschrieben.

Die gefundenen Absorptionsbanden bestätigen im Grossen und Ganzen die durch chemische Methoden bestimmte Molekularstruktur.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 3

537.541

DIE LOKALE EMPFINDLICHKEIT BESTIMMTER PHOTOELEKTRISCHER ZELLEN FUR NATURLICHES UND POLARISIERTES LICHT

von ARIANA POPA ICHIMESCU

I. Einleitung

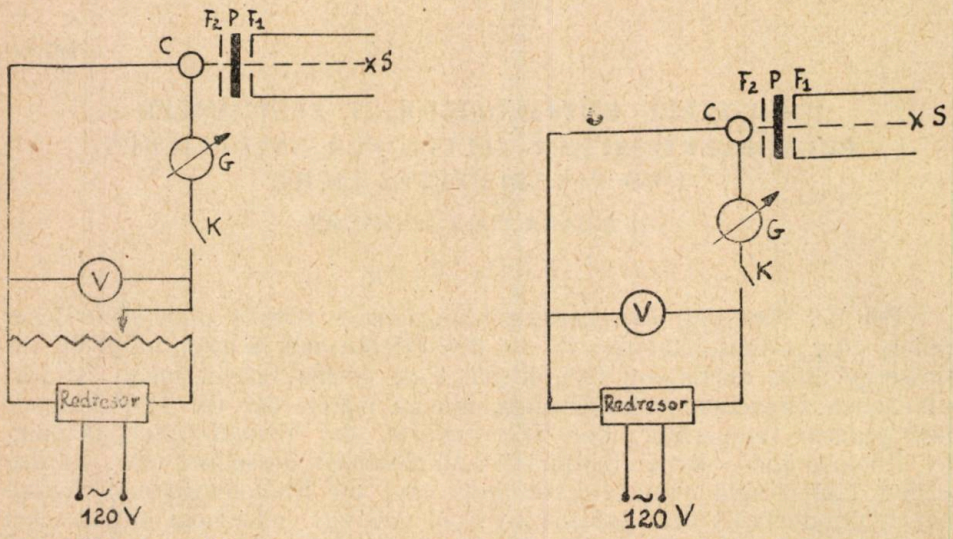
Bei der Messung der Lichtstrahlungsstärke mittels photoelektrischer Zellen oder -Multiplikatoren ist es des öfteren nur schwer möglich, die Messergebnisse nochmalig darzulegen. Eine solche Schwierigkeit ist verschiedenen Ursachen zuzuschreiben, als da wären der die Photokathode bedingenden Temperatur, der Trennschärfe, der Ermüdungserscheinung der Photokathode, der Einfallpunktempfindlichkeit derselben usw. In den letzten Jahren sind einige Forschungen über die Photomultiplikatorkathoden-Empfindlichkeit durchgeführt worden, und ein von einem ungarischen Forscher im Jahre 1955 veröffentlichter Aufsatz veranlasste uns, die Einfallpunktemfindlichkeit bestimmter, des öfteren für verschiedene physikalische Messungen eingesetzter industriemässig hergestellter photoelektrischer Zellen zu untersuchen.

Es ist allgemein bekannt, dass die Oberfläche einer Photokatode nicht in all ihren Punkten durchgängig gleich empfindlich ist. Die festgestellten Schwankungen sind insbesondere dem Umstande zuzuschreiben, dass die von dem Lichtstrom berührte Oberfläche kleiner als die Gesamtoberfläche der Kathode ist, und dass bei einer nochmaligen Messung die Lichstrahlen nicht mehr in denselben Punkt einfallen wie bei der ersten. Diese Wirkung wird aber bedeutend eingeschränkt und belanglos, falls den einfallenden Strahlen die Gesamtoberfläche der Kathode ausgesetzt wird. In einem solchen Falle gleichen sich die verschiedenen Empfindlichkeitsunterschiede aus, und das Gesamtergebnis wird nicht mehr von der localen empfindlichkeit der Kathode bedingt.

Alle, die photoelektrische Wirkung näher behandelnden Bücher weisen im allgemeinen darauf hin, dass man anlässlich der Lichtstärkemessung mittels photoelektrischer Zellen und um die von der localen empfindlichkeit verursachten Fehler zu vermeiden, die gesamte Kathodenoberfläche beleuchten soll. Wir konnten aber keinerlei Hinweise finden über Art und weise, wie diese Empfindlichkeit schwankt und über das Ausmass des Empfindlichkeitsunterschieds zwischen zwei beliebigen Punkten der Oberfläche. Wir haben uns also zum Ziel gesetzt, ein solches Studium mit einigen luftleeren und gasgefüllten Zellen verschiedener Bauart anzugreifen, um feststellen zu können, ob die für eine bestimmte Zelle erzielten Ergebnisse dieselbe Gültigkeit für eine andere gleicher Bauart haben.

Weiterhin wollten wir die Wirkung des polarisierten Lichts auf diese Zellen feststellen. Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass die von uns erzielten Ergebnisse rein qualitative sind.

I. Die *Schaltung* ist in der Abbildung zu sehen.



Für gasgefüllte Zellen Abb. 1 Für luftleere Zellen

Der 120 V-Netzstrom wird der Zelle durch einen stromkonstanthaltenden Gleichrichter zugeführt. Der Gleichrichter liefert Gleichstrom von 140 bis 295 V. Da für die gasgefüllten Zellen eine solche Spannung zu gross ist, haben wir eine Kompensatorschaltung angewandt. Im Stromkreis sind ausserdem ein $3{,}8.10^{-10}$ empfindliches Galvanometer von 30 000 Ohm inneren Widerstands und ein Schalter vorgesehen. Die Schwankungen des Galvanometers werden auf einer ungefähr 3 m vom Galvanometer fernen Skala abgelesen. Ein mit der Zelle parallelgeschaltetes Voltmeter gestattet die Ermittlung der Betriebsspannung. Gewöhnlich wird in den Stromkreis einer photoelektrischen Zelle auch ein starker Widerstand von mindestens 10 000 Ohm eingeschaltet, welcher den Strom einschränkt und die Zelle vor etwaigen Zerstörungen schützt. Bei unseren Versuchen war aber der Strom sehr schwach, und selbst bei den gasgefüllten Zellen war die Betriebsspannung ungefähr halb so gross wie die Brennspannung so dass wir von einem solchen Widerstand haben absehen können. Der Beleuchtungsapparat setzt sich aus einer von einer Projektionslampe stammenden Leuchtbirne zusammen. Das Licht dringt durch einen Spalt F_1, der ein enges Bündel begrenzt und das auf die Zelle möglicherweise störend wirkende Nebendlicht fernhält, durch ein Polaroid P welches sich auf einem eingeteilten Kreis drehen lässt, so dass der Vektor parallel oder senkrecht zur Einfallfläche schwanken kann und eine Blende F_2. Der Lichtfleck auf der Kathode hat einen Durchmesser von ungefähr 3 mm. Der Beleuchtungsapparat lässt sich in seiner Gesamtheit in verschiedenen Winkeln zur Zellnormale neigen.

III. *Messverfahren und erzielte Ergebnisse*

Folgende Zellen sind erforscht worden:

1. Gasgefüllte photoelektrische Zelle, Marke MVS 150, ungarisches Erzeugnis. Betriebsspannung 142 V, der einer vom Werk angegebenen Empfindlichkeit von $\approx 35 \frac{\mu A}{Lumen}$ entspricht.

2. Gasgefüllte photoelektrische Zelle. Marke „Original Pressler", Type 320 TUMU. Betriebsspannung 60 V und Gesamtempfindlichkeit 40 μ A/Lumen.

3. Zelle „Original Pressler", Type 320 TUMU, Betriebsspannung 60 V, die von uns im kernphysikalischen Laboratorium angewandt wird.

4. u. 5. sind zwei gleichartige luftleere Zellen „Original Pressler", Betriebsspannung 142 V, Empfindlickeit 2 μ A/Lumen.

Wie ersichtlich, haben wir für jede Zelle verschiedene Betriebsbedingungen gewählt, damit die Galvanometerschwankungen weder zu klein ausfallen noch die Skala überschreiten. Die Ermittlungen sind folgendermassen vorgenommen worden.

Die Photokathodenoberfläche ist Punkt für Punkt mit einem im Durchmesser 3 mm für die gasgefüllten und 4—5 mm für die luftleeren Röhren weiten Lichtspalt untersucht worden. Nicht unerwähnt soll bleiben, dass sowohl Arbeitsverfahren als erzielte Ergebnisse nicht dieselben für die zwei Arten Zellen waren, da bei den gasgefüllten, zufolge der Ionisierungsprozesse eine Verstärkung des photoelektrischen Stromes stattfindet, die ihrerseits eine grössere Gesamtempflindlichkeit zur Folge hat. So wurden für einen normalen Einfall 41 Punkte der Kathodenoberfläche untersucht, bei den gasgefüllten 24. In jedem Punkt schwankte der elektrische Vektor der einfallenden Welle einmal parallel und das andere Mal senkrecht zur Einfallebene. Die Zelle liess sich in zwei senkrechte, eingeteilte Richtungen bewegen. So zum Beispiel konnte sie vor dem Lichtspalt mit der ganzen Kathodenoberfläche bewegt werden, wobei die Messungen beliebig oft, selbst in grossen Zeitabständen, und von der Möglichkeit bedingt wiederholt werden konnten, dass genau derselbe Punkt getroffen werde. Auf diese Weise haben wir bestimmte Kurven aufstellen können, welche die Photokathodenempfindlichkeit einer waage- oder senkrechten Richtung entlang bei normalem Einfall und bei unpolarisiertem licht wiedergeben.

Jeder Punkt der Kurve stellt das Mittel zahlreicher Ermittlungen dar, und selbst wenn die Zahlenangaben nicht übereinstimmen — was bereits hervorgehoben worden ist — bleibt der Gang der Kurve, unbeachtet der Anzahl der Ermittlungen, unverändert.

Abb. 2, 3 und 4 zeigen diese Kurven für drei beliebige Richtungen, für eine waagerechte, welche durch das Zellenzentrum läuft, und für zwei senkrechte.

Aus der Abb. 2 ist ersichtlich, dass den ersten zwei Zellen, das Zentrum etwas weniger empfindlich als die Ränder sind. Der Unterschied zwischen zwei Punkten, z. B. bei der Zelle 1 zwischen einem im Zentrum und dem anderen am Rand, beträgt ungefähr 40%, wogegen bei der Zelle 2 50%. Bei den luftleeren Zellen betragen die Unterschiede zwischen den empfindlicheren und den weniger empfindlichen Teilen 15—20%, was ach dem Umstande zuzuschreiben ist, dass die Gesamtem-

pfindlichkeit der luftleeren Zelle geringer als bei der Gasgefüllten ist, sodass auch die Galvanometerschwankungen geringer waren. Es soll aber unterstrichen werden, dass die Empfindlichkeit nicht gleichmässig auf die Kathodenoberfläche verteilt ist, und dass bestimmte, zwischen zwei oder mehreren Zellen zum Vorschein kommende Ähnlichkeiten einem reinen Zufall zuzuschreiben sind. Auch bei den senkrechten Stellungen sieht man, dass die Einfallpunktempfindlichkeitsunterschiede der luftleeren Zellen viel geringer sind, was zusätzlich dem Umstande zuzuschreiben ist, dass der eingefallene Lichtpunkt auf der Kathodenoberfläche grösser ist d. h. ungefähr 5 mm. Dieser Umstand mag um so mehr die Tatsache beweisen, dass je besser die Zelloberfläche beleuchtet wird, desto kleiner die Schwankungen der localen empfindlichkeit sind.

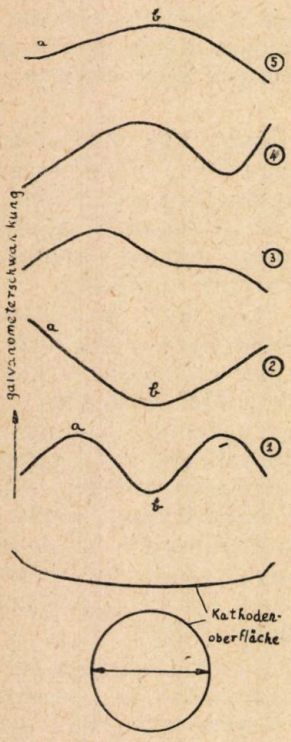


Abb. 2.

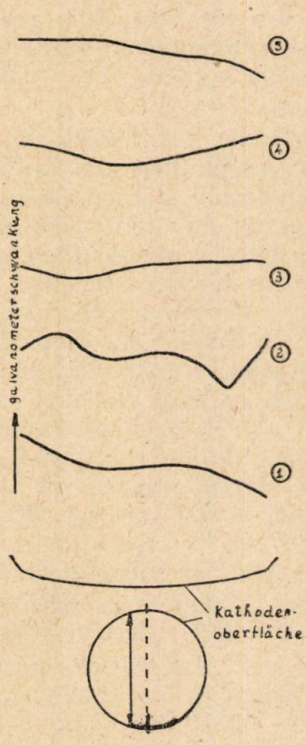


Abb. 3.

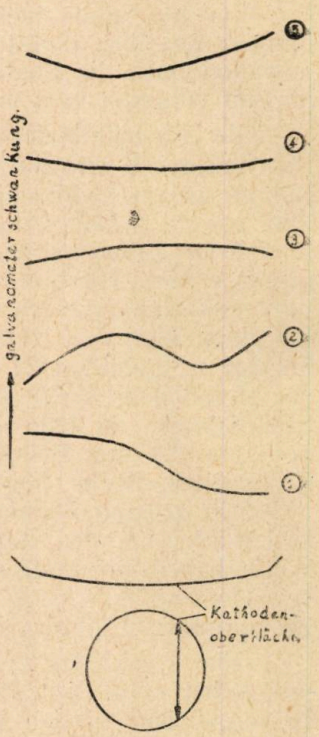


Abb. 4.

Was die Zellen derselben Bauart anbelangt, sind die Ergebnisse auch verschieden: die localen empfindlichkeitsschwankungen einer Zelle ähneln nicht denjenigen anderer Zellen derselben Bauart und derselben Erzeugung. Je grösser aber der Lichtpunkt ist, desto mehr gleichen sich die Unterschiede aus, so dass die Empfindlichkeit nach einer gleichmässigen Verteilung auf die gesamte Kathodenoberfläche strebt, was sehr gut bei den Zellen 4 und 5 beobachtet werden kann.

Bezüglich der Polarisationsrichtung des Lichts haben wir auch bei normalem Einfall untersucht, ob irgend ein Unterschied zwischen den

zwei Richtungen, der parallelen und der senkrechten zur Einfallebene, festzustellen sind. Einige kleine Unterschiede konnten immerhin festgestellt werden, doch übersteigen dieselben nicht die bei Messungen üblichen Fehlergrössen, d. h. 2—3%, sodass wir nicht behaupten können, dass es irgend einen Unterschied gibt. Je weiter der Lichteinfallwinkel wird, desto mehr kommen die Unterschiede zwischen den zwei Vektoren zum Vorschein. In der Abb. 5 haben wir die bei polarisiertem Licht für einen Einfallwinkel von 40° gewonnenen Kurven eingezeichnet.

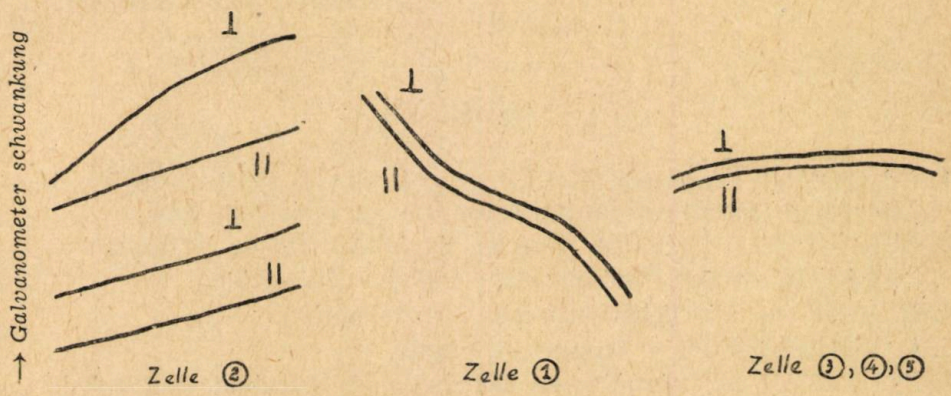


Abb. 5.

Man kann in allen Fällen beobachten, dass, wenn der Leuchtvektor auf einer zur Einfallebene senkrechten Ebene schwankt, die Ablenkung des Galvanometers grösser ist, d. h., dass der Photostrom stärker ist. Bei der gasgefüllten Zelle 2 ist die Ablenkung für den Fall II 86% der senkrechten Ablenkung, bei den anderen Zellen ist der Prozentsatz höher, und zwar 95% bei der Zelle 1 und 97% bei den Zellen 3, 4 und 5. Die von uns erzielten Ergebnisse entsprechen den von verschiedenen Verfassern untersuchten Literaturangaben, welche Verfasser für verschiedene Forschungszwecke, nicht aber für industriemässige Erzeugnisse, besondere Zellen gebaut haben; demnach sind die Unterschiede zwischen den zwei Vektoren nicht so gross (40%) — (60%). Diese Unterschiede lassen sich durch den Umstand erklären, dass wenn der elektrische Vektor parallel zur Kathodenoberfläche schwankt, aus der Metalloberfläche Elektronen herausgerissen werden, wogegen, wenn der elektrische Vektor sich in senkrechter Lage befindet, je grösser seine Neigung ist, desto mehr die senkrechte Komponente in das Metall eindringt.

Folgerungen

Aus den erzielten Ergebnissen lässt sich ohne weiteres schliessen, dass die Empfindlichkeit nicht gleichmässig auf der Oberfläche verteilt, dass sie rein zufällig ist und dass sie bei Zellen gleicher Bauart und gleichen Erzeugerwerks sich nicht wiederholen lässt. Diese Ergebnisse liessen sich vielleicht durch folgende Umstände erklären: 1) durch das technisch bedingte ungleichmässige Niedersetzen der Alkalischicht auf

den Zellgrund, oder, 2) durch die verschiedenen Schichtstärken), 3) durch gleiche Stärke, und ungleichmässiges Niedersetzen, 4) durch Reflexion auf der Glasoberfläche. Jedenfalls könnte man vielleicht diese Umstände nur durch einen Versuch erläutern, diese Zellen im Laboratorium herzustellen und alsdann die Empfindlichkeit, bezogen auf die Bedingungen, zu velchen die photoelektrische Schicht sich niedersetzt, zu untersuchen.

I Lehrstuhl für Physik
Polytechnisches Institut Bukarest

SCHRIFTTUM

1. KAPȚOV — Fenomene electrice în gaze și vid. (Elektrische Erscheinungen in Gasen und im luftleeren Raum). [Ed. Teh. 1955].
2. SURUGUE — Technique générale du laboratoire de physique.
3. B. LANGE — Die Photoelemente und ihre Anwendung.
4. R. POHL — Die lichtelektrischen Erscheinungen.
5. F. KOHLRAUSCH — Praktische Physik.
6. ZS. NARAY — Determinarea distribuției de sensibilitate a catodei la fotomultiplicatori. (Ermittlung der Empfindlichkeitsverteilung bei Photomultiplikatoren). (Acta phys. Acad. Sci. Hung., Fasc. 3, 1955.
7. R. POHL — Asupra efectului fotoelectric la Platin și Cupru în lumină polarizată ultravioletă. (Über die photoelektrische Wirkung bei Platin un Kupfer unter ultraviolettem, polarisiertem Licht). (Verh. d. D. Phys. Ges., 1909).
8. ANWERS UND KERSCHBAUM — Asupra celulelor fotoelectrice cu strat de baraj. (Über die photoelktrischen Sperrschichtzellen). (Ann. phys. 7 (1930 129).
9. BERGMANN UND PELTZ — Cercetări asupra fotoelementelor cu Selen. (Forschungen über Selenphotoelemente). (Z. für techn. Phys. 18 (1937) 177).

МЕСТНАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КЛЕТОК ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ И ПОЛЯРИЗОВАННОМ СВЕТЕ

(Краткое содержание)

Была исследоваиа местная чувствительность некоторых промышленных фотоэлектрических клеток при естественном и поляризованном свете. Известно, что тогда, когда не освешена вся поверхность фотокатода, результаты не могут быть воспроизводимыми из-за местных

разностей чувствительности. Мы исследовали лишь количественно местные чувствительности фотокатода у нескольких промышленных клеток разных типов, а также и у двух однотипных клеток. Из Полученных результатов видно, что чувствительность распределена неравномерно по поверхности фотокатода, является совсем случайной и не боспроизводится у однотипных клеток и у клеток одинаково изготовления. Исследовалось также и влияние поляризованного света на местную чувствительность фотокатода и результаты вполне соответствуют с результатами остальных авторов, а именно: чем больше увеличиваем угол падения света, тем более выявляются разности между двумя векторами.

THE LOCAL SENSITIVITY OF SOME PHOTOCELLS IN NATURAL AND POLARISED LIGHT

(Summary)

The local sensitivity of some photocells has been measured by exploring with a thin beam of light the photocatode surface. It has been found that the sensitivity varies irregularly from point to point for a given cell. Two identical cells have different local sensitivity. When the light beam is polarised, the sensitivity depends on the angle made by the photocathode and the plane of vibration of the electric vector of incident beam.

LA SENSIBILITÉ LOCALE DES QUELQUES CELLULES PHOTOÉLECTRIQUES EN LUMIÈRE NATURELLE ET POLARISÉE

(Résumé)

On a mesuré la sensibilité locale des quelques cellules photoélectrique en explorant la surface sensible a l'aide d'un faisceau lumineux très mince. On troûve que la sensibilité varie d'un point a l'autre d'une manière tout a fait irrégulière pour une même cellule ; pour deux cellules identiques la sensibilité locale n'est pas la même pour les mêmes points d'incidence. En lumière polarisée la sensibilité depend de l'angle fait par la photocathode avec le plan de vibration du vecteur électrique du faisceau incident.

DIE LOKALE EMPFINDLICHKEIT BESTIMMTER PHOTOELEKTRISCHER ZELLEN FUR NATURLICHES UND POLARISIERTES LICHT

(Zusammenfassung)

Es wurde die lokale empfindlichkeit bestimmter, industriemässig hergestellter photoelektrischer Zellen, bei natürlichem und polarisiertem Licht erforscht. Bekanntlich, wenn nicht die gesamte Photokatodenoberfläche bleuchtet wird, lassen sich wegen der locale empfindlichkeitsunterschiede die Ergebnisse nicht wiederholen. Wir haben bei einigen industriemässig hergestellten Zellen verschiedener Typen und bei zwei Zellen der gleichen Type, die locale empfindlichkeit nur qualitativ untersucht. Die erzielten Ergebnisse lassen erkennen, dass die Empfindlichkeit auf der Photokatode nicht gleichmässig verteilt ist, dass sie rein zufällig ist, und das sie bei Zellen gleicher Type und gleichen Erzeugerwerks sich nicht wiederholen lässt.

Ausserdem wurde auch der Einfluss des polarisierten Lichts auf die locale empfindlichkeit der Photokatode untersucht, und die Ergebnisse entsprechen denjenigen der anderen Verfasser, d.h. je weiter der Lichteinfallwinkel ist, desto mehr treten die Unterschiede zwischen den zwei Voktoren hervor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 3

MECANICA

UNE GENERALISATION DE LA LOI DES AIRES *)

par ALEXANDRE STOENESCO et MIHAIL ATANASIU

I. *Introduction.*

Un problème important de la mécanique classique est celui du mouvement d'un point matériel M sous l'action d'une force centrale. On démontre dans ce cas que la trajectoire du point est *plane* et l'on établit *la loi* bien connue *des aires : la vitesse aréolaire du point mobile est constante.* Sous une autre forme cette loi s'exprime ainsi : *le moment cinétique du point mobile M par rapport a O est constant.*

Selon la première expression :

$$\Omega = \frac{1}{2}\bar{r} \times \bar{v} = \frac{1}{2}\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \bar{C} \qquad (1)$$

où :

$\bar{r} = \overline{OM}$;

$\bar{v} = \dot{\bar{r}}$ = vitesse de M

$\bar{\Omega}$ = vitesse aréolaire

$|\bar{\Omega}|$ = aire balayée par le rayon vecteur OM dans l'unite de temps

$\bar{C}$ = vecteur constant.

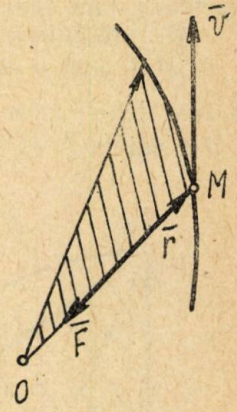


Fig. 1.

Selon la seconde expression :

$$\bar{k} = \bar{r} \times (m\bar{v}) = 2m\bar{C} = \bar{C}_1 \qquad (2)$$

où $\bar{k}$ est le moment cinétique du point par rapport a O, m la masse du point, $\bar{C}_1$ un vecteur constant.

Dans ce qui suit, nous essaierons de généraliser cette loi pour le cas d'une *force quelconque* et notamment *en remplaçant le centre fixe O par un pôle mobile A.* Pour le moment nous étudierons le problème dans le plan, en attendant de le généraliser aussi dans l'espace ultérieurement, à une autre occasion.

*) Communication présentée à la III-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest (le 27—28 juin 1957).

Enoncé du problème : on connaît le mouvement plan d'un point matériel M sous l'action d'une force *quelconque*. Déterminer dans le plan *un pôle mobile A* tel que *la loi des aires soit respecteé*. On considérera seulement les cas suivants :

a) le pôle mobile *A* se trouve sur une direction connue passant par *M*,

b) le pôle mobile *A* décrit une courbe connue.

II. *Vitesse aréolaire d'un vecteur variabile dans un plan.*

Considérons le vecteur variable $\bar{p} = \overline{AM}$. Nous nommerons *vitesse aréolaire* d'un vecteur *variable dans un plan* un vecteur ayant les caractéristiques suivantes :

1) le *module* égal à l'aire balayée par un vecteur dans l'unité de temps ;

2) la *direction* perpendiculaire au plan où varie le vecteur ;

3) le *sens* choisi de manière que la *circulation* sur le contour de la surface élémentaire balayée en un temps élémentaire dans le sens de *A* vers *M* soit dirigée *de droite à gauche* (ou bien sur la portion de contour qui limite l'aire maximum).

(En partant de la définition de la vitesse aréolaire d'un vecteur on peut évidemment passer à la definition de l'accélération aréolaire d'un vecteur ; mais nous présenterons cette dernière dans un autre ouvrage).

On présentera l'epression de la vitesse aréolaire d'un vecteur variable $\bar{p} = \overline{AM}$. Soit $\bar{p} = \overline{AM}$ et $p_1 = \overline{A_1M_1}$ les positions successives du vecteur $\bar{p}$ aux temps t et $t_1 = t + dt$. Soient $\bar{v}_A$ et $\bar{v}_M$ les vitesses au temps t des points A et P sur les courbes respectives et $\bar{r}_A$ et $\bar{r}_M$ les vecteurs de position de ces mêmes points par rapport à un point fixe *O*. La surface élémentaire d*S* balayée dans le temps d*t* est :

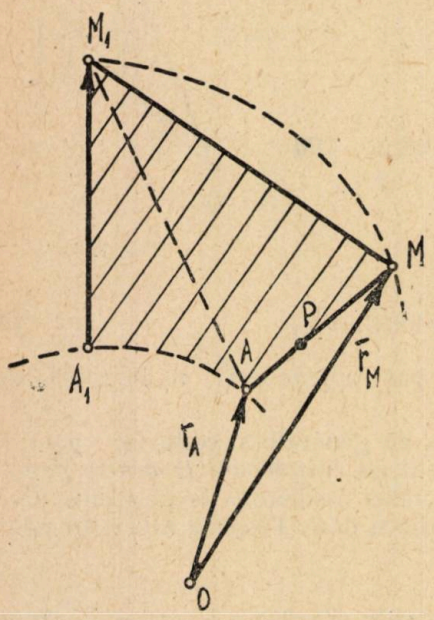


Fig. 2.

$$d\bar{S} = \frac{1}{2}\overline{AM} \times \overline{MM_1} + \frac{1}{2}\overline{AM_1} \times \overline{AA_1}.$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, il résulte :

$$\overline{MM_1} = \bar{v}_M\, dt; \qquad \overline{AM_1} = \bar{p} + \bar{v}_M\, dt$$

$$\overline{AA_1} = \bar{v}_A\, dt.$$

Il en résulte pour la vitesse aréolaire $\bar{\Omega}$ du vecteur $\bar{p}$ la valeur :

$$\bar{\Omega} = \dot{\bar{S}} = \frac{d\bar{S}}{dt} = \frac{1}{2}\bar{p} \times (\bar{v}_A + \bar{v}_M) \quad (3)$$

ou bien :

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}\bar{p} \times (\dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_M). \quad (4)$$

Pour P, milieu de vecteur $\overline{AM}$, le vecteur de position et sa vitesse sont :

$$\bar{r}_p = \frac{\bar{r}_A + \bar{r}_M}{2}\,; \quad \bar{v}_p = \dot{\bar{r}}_p = \frac{\bar{v}_A + \bar{v}_M}{2}$$

et par conséquent :

$$\bar{\Omega} = \bar{p} \times \bar{v}_p = \bar{p} \times \dot{\bar{r}}_p. \tag{5}$$

Cas particuliers de la vitesse aréolaire d'un vecteur.

a) $\bar{v}_A = 0$, le vecteur $\bar{p}$ tourne autour de son extremité fixe A (nous sommes dans le cas du mouvement central classique) tandis que :

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}\bar{p} \times \bar{v}_M$$

nous retrouvons donc la formule (1).

b) $\bar{v}_A = \bar{v}_M$, le vecteur $\bar{p}$ a un mouvement de translation, en restant paralèlle à lui-même et d'une grandeur invariable, tandis que ses extremités A et M décrivent des courbes identiques.

$$\bar{\Omega} = \bar{p} \times \bar{v}_A = \bar{p} \times \bar{v}_M.$$

Si $\bar{v}_A = \bar{v}_M =$ constant, les extremités A et M du vecteur $\bar{p}$ décrivent deux droites parallèles.

c) $\bar{v}_A = -\bar{v}_M$ le vecteur $\bar{p}$ tourne autor de son milieu P, qui reste fixe, tandis que ses extremités A et M decrivent deux courbes symétriques par rapport à P et que

$$\bar{\Omega} = 0$$

d) $\bar{v}_A \times \bar{v}_M = 0$, le vecteur $\bar{p}$ se déplace de manière que, à chaque moment, les tangentes aux trajectoires décrites par ses extremités A et M soient parallèles $(\bar{v}_A \parallel v_M)$

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}\bar{p} \times (\bar{v}_A + \bar{v}_M)$$

e) $\bar{v}_A + \bar{v}_M = 2\bar{v}_p = \lambda \bar{p}$ (λ scalaire), le vecteur $\bar{p}$ varie de manière que la vitesse de son milieu ait la direction de $\bar{p}$.

Il résulte :

$$\bar{\Omega} = 0.$$

Observation. Dans un autre ouvrage nou montrerons que pour généraliser la notion de vitesse aréolaire dans l'espace nous sommes obligés de distinguer deux aspects de cette notion, étant donné que si nous la considérons comme un vecteur elle ne représente plus l'aire balayée, tandis que si elle représente cette aire, elle perd son caractère vectoriel.

III. *Généralisation de la loi des aires pour des mouvements plans quelconques.*

a) Considérons connu et donné par son vecteur de position le mouvement plan d'un point matériel M:

$$\overline{OM} = \bar{r}_M(t)$$

(O un point fixe dans le plan)
et une direction connue passant par M et donnée par un vecteur unitaire $\bar{u}$:

$$\bar{u} = \bar{u}(t); \quad |\bar{u}| = 1.$$

Nous nous proposons de déterminer la courbe décrite par un pôle mobile A situé sur la direction donnée par $\bar{u}$ de manière que la loi des aires soit satisfaite. L'inconnue du problème est donc:

$$\overline{OA} = \bar{r}_A(t)$$

en posant la condition que la vitesse aréolaire du vecteur $\bar{p} = \overline{AM}$ soit une constante C, nous obtenons, en utilisant la relation (4):

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} p \times (\dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_M) + \bar{C}. \tag{6}$$

Mais :

$$\bar{p} = p\bar{u} = \bar{r}_M - \bar{r}_A$$

$$\bar{r}_A = \bar{r}_M - p\bar{u}; \quad \dot{\bar{r}}_A = \dot{\bar{r}}_M - \dot{p}\bar{u} - p\dot{\bar{u}}. \tag{7}$$

En introduisant ces valeurs dans (6), en simplifiant est en groupan les termes, nous obtenons l'équation suivante du second degré en p:

$$(\bar{u} \times \dot{\bar{u}})\, p^2 - 2\,(\bar{u} \times \dot{\bar{r}}_M)\, p + 2\bar{C} = 0 \tag{7'}$$

qui nous donne la valeur de p.

En notant par k un vecteur unitaire perpendiculaire au plan de variation de $\bar{p}$, nous avons:

$$\bar{u} \times \dot{\bar{u}} = \dot{u}\bar{k}; \quad \bar{u} \times \dot{\bar{r}}_M = v_{MP}\bar{k}; \quad \bar{C} = C\bar{k}$$

(v_{MP} composante de la vitesse $\bar{v}_M$ perpendiculaire à $\bar{p}$).

L'équation (7) peut donc être mise sous une forme plus simple:

$$\dot{u}p^2 - 2v_{MP} \cdot p + 2C = 0. \tag{7'}$$

Une fois p détermine, la trajectoire décrite par le pôle mobile A sera donnée par la relation:

$$\bar{r}_A = \bar{r}_M - p\bar{u} = \bar{r}_A(t). \tag{8}$$

Posons maintenant la condition que le moment cinétique M par rapport à A soit constant ; nous obtenons une relation *diférente* en général de (6), notamment :

$$\bar{k} = \bar{p} \times (m\bar{v}_M) = m\bar{p} \times \dot{\bar{r}}_M = mp\bar{u} \times \dot{\bar{r}}_M = \bar{C}_1 \tag{9}$$

($\bar{C}_1$ vecteur constant $= C_1 \bar{k}$).

D'où :

$$p = \frac{\bar{C}_1}{m(\bar{u} \times \dot{\bar{r}}_M)} = \frac{C_1}{mv_{MP}} \tag{10}$$

c'est-à-dire une valeur différente de celle donnée par (7). La courbe décrite par le pôle A sera donc, elle aussi, différente de celle qui correspond à la vitesse aréolaire constante.

L'équation de cette courbe est également donnée par la relation (8), dans laquelle p a la grandeur exprimée dans (10).

Il est sûrement intéressant d'étudier le cas où ces courbes coincident, c'est-à-dire le cas ou le critérium de la vitesse aréolaire (formule 6) et le critérium du moment cinétique (formule 9) donnent résultats identiques.

Dans ce cas nous devons avoir simultanément :

$$\frac{1}{2}\bar{p} \times (\dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_M) = \bar{C} \quad \text{et} \quad \bar{p} \times \dot{\bar{r}}_M = \frac{\bar{C}_1}{m}. \tag{11}$$

En multipliant la première relation par le scalaire $\frac{C_1}{m}$, la seconde par C et ne effectuant la soustraction, nous obtenons :

$$\bar{p} \times \left[\frac{C_1}{2m} \dot{\bar{r}}_A - \left(C - \frac{C_1}{2m} \right) \dot{\bar{r}}_M \right] = 0.$$

Ou bien, notant :

$$\lambda = \frac{2mC}{C_1} - 1$$

$$\bar{p} \times (\dot{\bar{r}}_A - \lambda \dot{\bar{r}}_M) = 0. \tag{12}$$

Etant donné que les courbes décrites par M et A sont suposées distinctes $\bar{p} \neq 0$, l'équation (12) a deux solutions :

$$\dot{\bar{r}}_A - \lambda \dot{\bar{r}}_M = 0, \quad \text{d'où} \quad \bar{r}_A = \lambda \bar{r}_M - \bar{a}$$

($\bar{a} = \overline{OO_1} =$ un vecteur constant il résulte de là que les courbes décrites par M et A sont deux courbes semblables de centres O et O_1 leur rapport de proportionnalité étant λ). De plus nous avons :

$$\bar{p} = \bar{r}_M - \bar{r}_A = (1 - \lambda)\bar{r}_M - \bar{a}$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{p}}{p} = \frac{(1-\lambda)\bar{r}_M - \bar{a}}{\sqrt{[(1-\lambda)\bar{r}_M - \bar{a}]^2}}. \tag{13}$$

Pour $\bar{a} = 0$, les points O et O_1 coïncident et les deux courbes ont un même centre d'homothénie. En supposant $\lambda = 0$; $r_A = \bar{a} =$ constant, par conséquent le point A est fixe et nous sommes dans le cas du mouvement central classique.

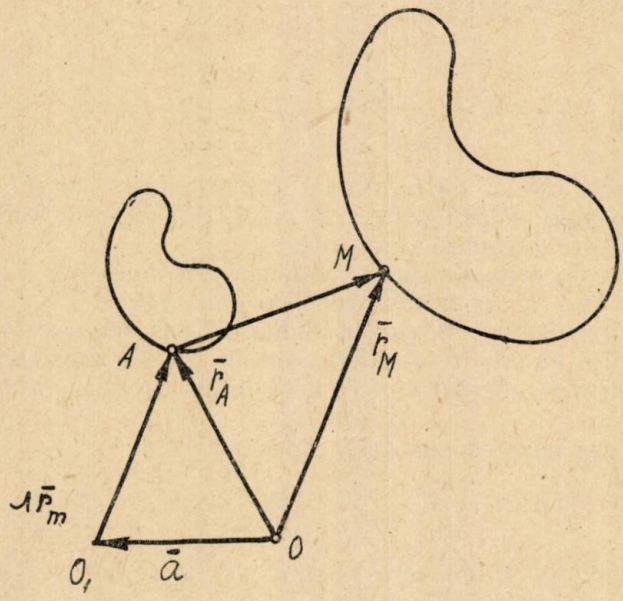


Fig. 3.

2) La seconde solution de l'équation (12) est donnée par l'expression du parallélisme existant entre les deux vecteurs du produit, ce qui revient à :

$$\dot{\bar{r}}_A - \lambda \dot{\bar{r}}_M = \eta \bar{p} = \eta (\bar{r}_M - \bar{r}_A) \qquad (\eta \text{ scalaire})$$

D'où :

$$\dot{\bar{r}}_A = \lambda \dot{\bar{r}}_M + \eta (\bar{r}_M - \bar{r}_A). \tag{14}$$

Mais de (11) :

$$\frac{\dot{\bar{r}}_A - \lambda \dot{\bar{r}}_M}{\eta} \times \dot{\bar{r}}_M = \frac{\bar{C}_1}{m}$$

$$\eta = m \frac{\dot{\bar{r}}_A \times \dot{\bar{r}}_M}{\bar{C}_1}. \tag{15}$$

Les équations (14) et (15) résolvent le problème, car elles nous donnent $\bar{r}$ et η ; $\bar{p}$ et $\bar{u}$ peuvent ensuite être déduits des relations :

$$\bar{p} = \bar{r}_M - \bar{r}_A = p\bar{u} \tag{16}$$

En multipliant (16) vectoriel par le vecteur :

$$\dot{\bar{p}} = \dot{p}\bar{u} + p\dot{\bar{u}} = \dot{\bar{r}}_M - \dot{\bar{r}}_A$$

nous obtenons :

$$\bar{p} \times \dot{\bar{p}} = p^2 \bar{u} \times \dot{\bar{u}} = 2\bar{p} \times \bar{r}_M - \bar{p} \times (\bar{r}_M + \bar{r}_A).$$

D'où, en tenant compte de (11) :

$$\bar{u} \times \dot{\bar{u}} = \frac{2}{p^2}\left(\frac{\bar{C}_1}{m} - \bar{C}\right)$$

$$\bar{u} \times \dot{\bar{u}} = \frac{2m(\bar{C}_1 - m\bar{C})}{C_1^2} (\bar{u} \times \dot{\bar{r}}_M)^2 \qquad (17)$$

et scalairement :

$$\dot{u} = \frac{2m(C_1 - mC)}{C_1^2} v_{MP}^2$$

c'est-à-dire une équation différentielle du 1-er degré en u (la relation 17 pouvait être obtenue directement en introduisant dans 7 la valeur de p donnée par 10).

Pour $\eta = 0$, le cas (2) devient le cas (1).

b) Reprenons maintenant le problème de la généralisation de la loi des aires pour le cas où l'on donne le mouvement d'un point M par son vecteur de position $\overline{OM} = \bar{r}_M = \bar{r}_M(t)$ et la courbe du pôle mobile A donnée par $\overline{OA} = \bar{r}_A = \bar{r}_A(\theta)$, où θ est un paramètre.

Nous nous proposons de déterminer la loi horaire du mouvement du pôle A de manière que la loi des aires soit satisfaite.

Posant la condition que la vitesse aréolaire Ω soit constante, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\bar{p} \times (\dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_M) = \bar{C}.$$

Mais :

$$\dot{\bar{r}}_A = \frac{d\bar{r}_A}{d\theta} \cdot \dot{\theta}.$$

Donc :

$$(\bar{r}_M - \bar{r}_A) \times (\dot{\bar{r}}_M + \frac{d\bar{r}_A}{d\theta} \cdot \dot{\theta}) = 2\bar{C} \qquad (18)$$

c'est-à-dire une equation différentielle du 1-er degré en θ.

La solution de cette équation permet de déterminer la loi horaire du pôle A.

Posant la contidion que le moment cinétique soit constant on obtient l'équation algébrique en θ :

$$(\bar{r}_M - \bar{r}_A) \times \dot{\bar{r}}_M = \frac{\bar{C}_1}{m} \tag{19}$$

dont la solution résout le probleme, en donnant cependant une solution différente de (18).

Pour $\bar{r}_A$ = constant, $\dot{\bar{r}}_A = 0$, nous sommes dans le cas du mouvement central clasique.

La Chaire de Mécanique
Institut Polytechnique de Bucarest

ОБОБЩЕНИЕ ЗАКОНА ПЛОШАДЕЙ

(Краткое содержание)

Представляетсиа обобшение закона плошадей от движения точки в случае подвижного полюса.

A GENERALISATION OF THE LAW OF AREAS

(Summary)

One presents a generalisation of the law of areas from the movement of the point, in the case of the mobile pole.

UNE GENERALISATION DE LA LOI DES AIRES

(Résumé)

On présente une généralisation de la loi des aires en partant du mouvement du point dans le cas du pôle mobile.

EINE VERALLGEMEINERUNG DES FLÄCHENGESETZES

(Zusammenfassung)

Es wird eine Verallgemeinerung des Flächengesetzes von der Bewegung des Punktes im Falle des beweglichen Poles angegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 3

CONSIDERATIONS SUR LE CALCUL DES PIVOTS *)

par MIHAIL ATANASIU

1. INTRODUCTION

Le pivot ou le tourillon axial est un organe de machine qui sert à l'appui des essieux et des arbres dans la construction des véhicules et des machines.

Du point de vue mécanique, le pivot est une liaison continue, généralement unilatérale, qui permet aux deux corps se trouvant en contact un mouvement relatif de rotation autour d'un axe fixe sans possibilité de déplacement dans l'un des sens sur cet axe.

Dans une première approximation, les principes théoriques qui se trouvent à la base du calcul élémentaire des tourillons axials, — de même que dans la mecanique théorique, — ne prennet pas en considération les lois valables dans la couche intermédiaire d'huile comme milieu liquide entre le tourillon et le coussinet, mais ils utilisent les lois applicables aux corps rigides.

Il est évident que dans ces conditions le problème est statiquement indéterminé ; pour lever l'indétermination on admet une série d'hypothèses concernannt la manière dont la pression de contact est répartie à la surface du pivot. Le probleme étant, en général, axialement symetrique, les résultats sont uniquement fonctions de la distance à l'axe de symétrie du pivot.

Dans ce qui suit, en employant les mêmes principes de calcul, on étudie le cas général du pivot formé par le contact de deux surfaces de révolution dans différentes hypothèses de répartition de la pression de contact, en determinant la valeur du moment résultant des forces du frottement sec par rapport a l'axe du pivot comme fonction du coefficient de frottement, les forces extérieurement appliquées et les caractéristiques géometriques des surfaces de contact (fig. 1). On effectue ensuite, à l'aide du calcul variationnel, l'analyse critique des expressions du moment résultant des forces de frottement par rapport à l'axe du pivot, ainsi que celle de la pression de contact.

2. NOTATIONS

C_1, C_2 — les corps se trouvant en contact
Σ — la surface de révolution de contact entre C_1 et C_2
Δ — axe de la surface Σ
$\bar{u}$ — vecteur unitaire de l'axe Δ

*) Communication présentée à la III-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest (le 27—28 juin 1957).

$\bar{r}$ — vecteur de position d'un point de Σ

$\bar{n}$ — vecteur unitaire de la normale intérieure en un point quelconque de Σ

$\bar{t}$ — vecteur unitaire de la tangente en un point quelconque d'un cercle parallèle de Σ orienté inversement à la tendance de deplacement relatif du corps C_1 par rapport a C_2

$d\bar{S}$ — élément de surface sur Σ déterminé par deux meridiens et deux parallèles infiniment voisins

dA — élément de superficie correspondant

ϱ, φ, z — les coordonées cylindriques des points de Σ

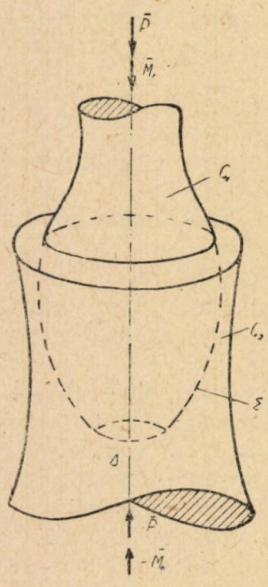


Fig. 1

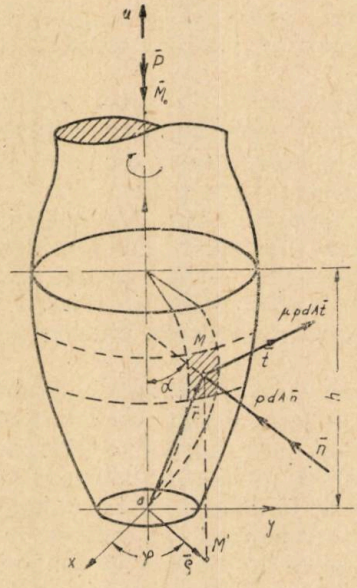


Fig. 2

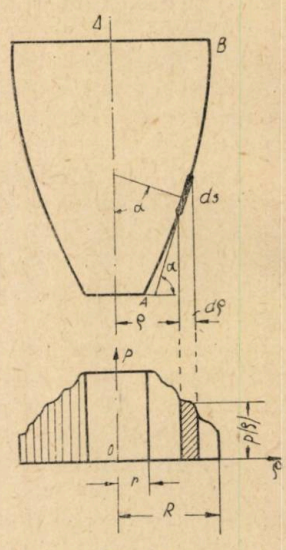


Fig. 3

ϱ_G, z_G — les coordonnées du centre de gravité de la courbe meridienne de la surface Σ

$z = z(\varrho)$ — équation de la courbe méridienne de la surface Σ

ds — l'élément d'arc de la courbe méridienne

α — angle de la normale en un point de Σ avec l'axe Δ

$\bar{P}$ — résultante des forces extérieures appliquée au corps C_1 ($-\bar{P}$ est appliquées au corps C_2) que l'on admet dirigée le long de Δ

$\bar{M}_0$ — moment résultant des forces extérieures appliquées au corps C_1 par rapport à un point quelconque de l'axe Δ ($-\bar{M}_0$ est appliqué au corps C_2) que l'on admet dirigé le long de Δ

p — pression de contact entre les corps C_1 et C_2

μ — coefficient de frottement sec de glissement entre les corps C_1 et C_2

$\overline{Mp}$ — moment résultant des forces de frottement sec entre les corps C_1 et C_2 apliqué a C_1 ($-\overline{M}p$ est appliqué a C_2) dirigé le long de Δ

q — coefficient du frottement de pivotement

I_Δ — moment d'inertie géometrique de l'arc de courbe méridiennese trouvant en contact : $I_\Delta = \int_B^A \varrho^2 \, ds$ (fig. 3)

J_Δ — moment d'intertie de l'arc de courbe méridienne se trouvant en en contact et ayant la masse de l'unité de longueur p (ϱ) :

$$J_\Delta = \int_B^A p(\varrho)\, \varrho^2 \, ds$$

S_Δ — moment statique de l'aire déterminée par la courbe $p = \mathbf{p}(\varrho)$, les ordonnées $\varrho = r$ et $\varrho = R$ et l'axe $O\varrho$ par rapport à l'axe Δ:

$$S_\Delta = \int_r^R p(\varrho)\, \varrho \, ds$$

s_Δ — moment statique de la courbe méridienne de la surface Σ par rapport, à l'axe Δ: $S_\Delta = \int_r^R \varrho \, ds = \varrho_G \, l$ (l = longeur de la courbe méridienne).

3. HYPOTHÈSES ET PRÉCISIONS

a. Les forces exterieures appliquées à chacun des deux corps se trouvant en contact, se réduisent en un point quelconque O de l'axe Δ à une force resultante — P et à un moment resultant $\overline{M}_0$ dirigés le long de Δ.

b. Le contact le long de la surface est unilatéral ; les deux corps ont un seul degré de liberté relative : la rotation autours de l'axe Δ, l'un pouvant être éventuellent fixe.

Afin de maintenir le contact, la force extérieure $\overline{P}$ sera dirigée de manière qu'elle presse les deux corps l'un contre l'autre.

c. Le coefficient du frottement sec de glissement est indépendent de la position du point considéré sur Σ ou bien, — dans le cas du mouvement, — de la vitesse relative de celui-ci par rapport au point correspondant sur l'autre corps.

d. On supposera que les forces de frottement transmises entre les deux corps ont la direction de la tangente aux cercles parallèles de Σ ; on néglige les forces de frottement ayant la direction de la tangente au méridien, forces qui apparaîtraient à cause des petits déplacements axials provenant des déformations élastiques des deux corps. D'ailleurs, ainsi que l'on peut aisément observer, ces forces n'influenceraient pas la valeur du moment résultant des forces de frottement par rapport a l'axe Δ, étant donné qu'elles sont contenues dans les plans méridiens de la surface Σ.

e. On étudierea l'équilibre limite ou la rotation relative uniforme autour de l'axe Δ, la tendance de déplacement relatif (ou le mouvement relatif) s'effectuant dans le sens indiqué sur la fig 2.

f. Sur la base des hypothèses ci-dessus, — réalisées assez bien en pratique, — les réactions transmises au corps C_1 par le corps C_2 sont

distribuées continûment sur la surface Σ de sorte que, en un point quelconque $M(\bar{r})$ il existe:

— une réaction normale $p\mathrm{d}\bar{S} = p\mathrm{d}A\bar{n}$

— une réaction tangentielle $\mu p \,|\, \mathrm{d}\bar{S} \,|\, \bar{t} = \mu p \mathrm{d}A\bar{t}$.

g. On considérera $z'(\varrho) > O$ et continue et $p = p(\varrho, \varphi)$ continue et définie sur Σ.

4. CALCUL DU MOMENT RÉSULTANT DES FORCES DE FROTTEMENT PAR RAPPORT A L'AXE Δ

a. Cas général

Les équations d'équilibre du corps C_1 sont:

$$(\Sigma X = 0) \qquad \bar{P} + \int_{\Sigma} p\mathrm{d}\bar{S} + \mu \int_{\Sigma} p\mathrm{d}A\bar{t} = 0 \tag{1}$$

$$(\Sigma M_0 = 0) \qquad \bar{M}_0 + \int_{\Sigma} \bar{pr} \times \mathrm{d}\bar{S} + \mu \int_{\Sigma} \bar{pr} \times \bar{t}\mathrm{d}A = 0 \tag{2}$$

Pour résoudre le problème proposé il suffit de retenir seulement les projections de ces équations sur l'axe Δ; avec les notations de la figure 2 on obtient :

$$P = \bar{u} \int_{\Sigma} p\bar{n}\mathrm{d}A \tag{1'}$$

$$M_0 = \mu \int_{\Sigma} p\varrho \mathrm{d}A \tag{2'}$$

parce que $\bar{u}\,\bar{r}\,\bar{n} = o$ et $\bar{u}\,\bar{r}\,\bar{t} = \bar{u}\,\bar{\varrho}\,\bar{t} = \varrho$.

Etant donné que :

$$\mathrm{d}A = \varrho\, ds\, \mathrm{d}\varphi$$

$$\bar{u}.\,\bar{n} = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} = \frac{\mathrm{d}p}{ds}$$

les relations (1') et (2') s'écrivent :

$$P = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_r^R p(\varrho, \varphi)\, \varrho \mathrm{d}\varrho \tag{1''}$$

$$M_0 = \mu \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_r^R p(\varrho, \varphi)\, \varrho^2 \sqrt{1 + z'^2}\, \mathrm{d}\varrho \tag{2''}$$

La condition de l'équilibre est exprimée alors par la relation :

$$Mp \leqslant Mo \tag{3}$$

b. Cas particuliers

Dans les calculs pratiques on admet pour la fonction $p = (\varrho, \varphi)$ a des expressions simples qui conduisent à des valeurs de Mp vérifiées d'une façon satisfaisante du point de vue expérimental.

On examinera la forme des relations (1″) et (2″) pour quelques pareilles expressions usuelles.

1. $p = p(\varrho)$ (pression indépendante de l'angle φ).

C'est la plus importante des hypothèses concernant l'expression de p; elle a à la base la symétrie géometrique et mécanique du pivot. On obtient :

$$P = 2\pi \int_r^R p(\varrho)\, \varrho\, d\varrho = 2\pi S_\triangle$$

$$Mo = 2\pi\mu \int_{AB} p(\varrho)\, \varrho^2 \sqrt{1 + z'^2}\, d\varrho = 2\pi\mu \int_{AB} p(\varrho)\, \varrho^2\, ds = 2\pi\mu J_\triangle$$

En divisant membre à membre et en tenant compte de (3) il résulte :

$$Mp \leqslant qP$$

où

$$q = \mu \frac{J_\triangle}{S_\triangle}$$

Il est à remarquer que $S_\triangle$ ne dépend pas de la forme de la surface Σ mais uniquement de la forme de la fonction $p = p(\varrho)$; $J_\triangle$ dépend de la forme de la fonction $p = p(\varrho)$ autant que de la forme de la courbe méridienne du pivot $z = z(\varrho)$. En choisissant pour $p = p(\varrho)$ l'expression :

$$p(\varrho) = p_0\, \varrho^\alpha$$

où p_0 est une constante positive, on obtient :

$$Mp \leqslant \mu(\alpha + 2) \frac{\int_r^R \varrho^{\alpha+2} \sqrt{1 + z'^2}\, d\varrho}{R^{\alpha+2} - r^{\alpha+2}} P$$

On observe que Mp est indépendant de p_0.

Deux cas particuliers de cette relation sont employés couramment dans la technique :

I. *Le cas* $\alpha = 0$ qui conduit a $p(\varrho) = p_0 =$ constant, constitue la plus simple des hypothèses admises ; elle sert au calcul de Mp uniquement dans une première approximation parce que, à cause de l'usure et des déformations des deux corps en contact, elle ne reste pas valable pendant le fonctionnement du pivot, même si à l'état neuf, — grace à un finissage correct de celui-ci, elle peut etre admise. On obtient :

$$Mp \leqslant 2\mu \frac{I_\triangle}{R^2 - r^2} P$$

II. *Le cas* $\alpha = -1$ qui conduit a $p(\varrho) = \frac{p}{\varrho}$ constitue une hypothèse plus exacte que la précédente ; elle a à la base la proportionnalité de l'usure du pivot à la pression et à la vitesse. On obtient :

$$Mp \leqslant \mu \frac{\int_r^R \varrho \sqrt{1+z'^2}\, d\varrho}{R-r} P$$

ou :

$$Mp \leqslant \mu \frac{\varrho_G l}{R-r} P$$

2. $p = p(z')$ (la pression dépend uniquement de l'inclinaison locale de la courbe méridienne). Cette hypothèse tient compte du comportement réel du pivot pendant son fonctionnement, c'est-à-dire de l'usure et des déformations des deux corps en contact. Elle a à la base l'idée que la pression de contact entre les deux corps est proportionnelle a l'usure du pivot et que cette dernière est d'autant plus grande que la normale au point considéré a une direction plus approchée de l'axe du pivot. Etant donné que $z' = z'(\varrho), p = p[z'(\varrho)] = p(\varrho)$ et ce cas revient au cas 1 (l'équation de la courbe meridienne $z = z(\varrho)$ est donnée).

Dans ce cas l'on choisit généralement la fonction

$$p(z') = \frac{p_0}{\sqrt{1+z'^2}}$$

ou $p_0 = p(0) =$ constant.

Cette hypothèse correspond le mieux aux déterminations expérimentales courantes en ce qui concerne l'usure des pivots ; elle a à la base la constante du rapport entre le travail mécanique qui produit la chaleur et celui qui produit l'usure.

En tenant compte de cette hypothèse, la pression p est maximum (egale a p_0) sur la direction d'action de la force P et elle diminue dans la zone périphérique du pivot, car en général $z'(\varrho)$ est une fonction décroissante, a l'exception du cas $z'(\varrho) =$ constant (pivot conique).

Pour les calculs pratiques on a synthétisé dans un tableau les cas le plus fréquemment recontrés dans la technique.

c. *Extrêmes du moment résultant des forces de frottement.*

Relativement à l'étude des extrêmes du moment résultant des forces de frottement se posent les problèmes suivants de calcul variationnel :

A. Déterminer la forme de la courbe méridienne du pivot $z = z(\varrho)$ de sorte que pour la pression $p = p(\varrho, z, z')$ donnée la fonctionnelle :

$$M(\varrho, z, z') = 2\pi\mu \int_r^R p\, \varrho^2 \sqrt{1+z'^2}\, d\varrho$$

soit minimum à condition que :

$$\int_r^R p\varrho\, d\varrho = \frac{P}{2\pi}, \qquad z(r) = z_1, \qquad z(R) = z_2.$$

B. Déterminer l'expression de la pression $p = p\ (\varrho, z, z')$ de sorte que, pour une certaine courbe méridienne du pivot $z = z\ (\varrho)$ donnée, la fonctionnelle :

$$M\ (\varrho, z, z') = 2\pi\mu \int_r^R p\,\varrho^2 \sqrt{1 + z'^2}\ d\varrho$$

soit minimum, à condition que :

$$\int_r^R p\varrho\, d\varrho = \frac{P}{2\pi}, \qquad p\,(r) = p, \qquad p_1(R) = p_2.$$

Dans ce qui suit, on indiquera la solution de ces problèmes dans les cas pratiques :

Cas A. $\alpha)\ p = p_0$

$\beta)\ p = \dfrac{p_0}{\varrho}$

$\gamma)\ p = \dfrac{p_0}{\sqrt{1 + z'^2}}$

ou p_0 est une constante et :

Cas B. $\alpha)\ z = z_0$ (pivot plan)

$\beta)\ z = \alpha\varrho$ (pivot conique)

$\gamma)\ z = \sqrt{a^2 - \varrho^2}$ (pivot sphérique de rayon a) ou $z_0, a,$ sont des constantes.

A. α. Il résulte que :

$$p = p_0$$

$$M = 2\pi\mu\, p_0 \int_r^R \varrho^2 \sqrt{1 + z'^2}\, d\varrho$$

à condition que :

$$p_0 \int_r^R \varrho\, d\varrho = \frac{P}{2\pi}, \qquad z\,(r) = z_1, \qquad z\,(R) = z_2$$

On observe que la seconde intégrale a pour valeur :

$$p_0 \frac{R^2 - r^2}{2} = \frac{P}{2\pi}$$

donc les extrêmes de M, — si ils existent, — ne sont pas liés.

L'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial H}{\partial z'}\right) - \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

où :

$$H = 2\pi\mu\, p_0\, \varrho^2 \sqrt{1 + z'^2}$$

Il résulte que :

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0\,; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\frac{\partial H}{\partial z'}\right) = 0\,; \quad \frac{\partial H}{\partial z'} = C \text{ (constant)}$$

cest-à-dire :

$$2\pi\mu p_0 \varrho^2 z' \,(1 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} = C$$

d'où :

$$z' = \frac{A}{\sqrt{\varrho^4 - A^2}}$$

où :

$$A = \frac{C}{2\pi\mu p_0} = \text{(constant)}$$

Par intégration on obtient :

$$z = A\int \frac{\mathrm{d}\varrho}{\sqrt{\varrho^4 + A^4}} + B$$

B étant une constante ; l'intégrale est du type elliptique.

A. β. Il résulte que :

$$p = \frac{p_0}{\varrho}$$

$$M = 2\pi\mu p_0 \int_r^R \varrho \sqrt{1 + z'^2}\, \mathrm{d}\varrho$$

à condition que :

$$p_0 \int_r^R \mathrm{d}\varrho = P, \qquad z(r) = z_1, \qquad z\,(R) = z_2.$$

On observe que :

$$p_0 \int_r^R \mathrm{d}\varrho = p_0\,(R - r) = P$$

donc les extrêmes de M, — si ils existent, — ne sont pas lies.

L'équation d'Euler :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\frac{\partial H}{\partial z'}\right) - \frac{\partial H}{\partial z'} = 0$$

où :

$$H = 2\pi\mu p_0 \varrho \sqrt{1 + z'^2}$$

donne :

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\frac{\partial H}{\partial z'}\right) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial z'} = C \text{ (constant)}$$

c'est-à-dire :

$$2\pi\mu p_0 \varrho z' (1 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} = C$$

$$z' = \frac{A}{\sqrt{\varrho^2 - A^2}}$$

où A a la même valeur que ci-dessus.

Les extrêmes sont données par :

$$z = A \int \frac{\mathrm{d}\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - A^2}} + B = A \ \operatorname{arg\,sh} \frac{\varrho}{A} + B$$

B étant une constante

Les valeurs des constantes résultent des conditions aux limites :

$$z(r) = z_1 = A \operatorname{arg\,sh} \frac{r}{A} + B$$

$$z(R) = z_2 = A \operatorname{arg\,sh} \frac{R}{A} + B$$

A. γ. L'on a :

$$p = \frac{p_0}{\sqrt{1 + z'^2}}$$

$$M = 2\pi\mu p_0 \int_r^R \varrho^2 \, \mathrm{d}\varrho = 2\pi\mu p_0 \frac{(R^3 - r^3)}{3}$$

M est une constante ; la première condition devient :

$$\int_r^R p\varrho \, \mathrm{d}\varrho \frac{\varrho}{\sqrt{1 + z'^2}} \mathrm{d}\varrho = \frac{P}{2\pi p_0}$$

équation intégrale du type Fredholm de la I-ère espèce en $z' = z'(\varrho)$.

B. α. L'on obtient :

$$z = z_0 = \text{constant}$$

$$M = 2\pi\mu \int_r^R p\varrho^2 \, \mathrm{d}\varrho$$

à condition que :

$$\int_r^R p\varrho\, d\varrho = \frac{P}{2\pi}, \qquad p(r) = p_1, \qquad p(R) = p_2$$

On cherche l'extrême de la fonctionnelle

$$I = \int_r^R (2\pi\mu p\varrho^2 + \lambda p\varrho)\, d\varrho$$

L'équation d'Euler est :

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial H}{\partial p'}\right) - \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

où :

$$H = p\varrho\ (2\pi\mu\varrho + \lambda)$$

Il résulte que :

$\frac{\partial H}{\partial p'} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial p} = O$ H est indépendant de p : $H = g(\varrho)$

$$p = \frac{g(\varrho)}{\varrho(2\pi\mu\varrho + \lambda)}$$

et :

$$\int_r^R \frac{g(\varrho)}{2\pi\mu\varrho + \lambda}\, d\varrho = \frac{P}{2\pi}$$

équation intégrale du type Fredholm de la I-ère espèce en $g(\varrho)$.

B. β. Il résulte que :

$$z = \alpha\varrho$$

$$M = 2\pi\mu \int_r^R p\varrho^2 \sqrt{1+\alpha^2}\ d\varrho$$

à condition que :

$$\int_r^R p\varrho\, d\varrho = \frac{P}{2\pi}, \qquad p(r) = p_1, \qquad p(R) = p_2.$$

On cherche l'extrême de la fonctionnelle :

$$I = \int_r^R (2\pi\mu p\varrho^2 \sqrt{1+\alpha^2} + \lambda p\varrho)\, d\varrho$$

L'équation d'Euler est :

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial H}{\partial p'}\right) - \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

où :

$$H = p\varrho(k\varrho + \lambda), \qquad k = 2\pi\mu\sqrt{1+\alpha^2}$$

On arrive à :

$$\frac{\partial H}{\partial p'} = 0, \text{ donc } \frac{\partial H}{\partial p} = 0, \; H \text{ est indépendant de } p \qquad H = g(\varrho).$$

$$p = \frac{g(\varrho)}{\varrho(k\varrho + \lambda)}$$

et :

$$\int_r^R \frac{g(\varrho)}{\varrho(k\varrho + \lambda)} \, d\varrho = \frac{P}{2\pi}$$

équation intégrale du type Fredholm de la I-ère espèce en $g(\varrho)$.

B. γ. Dans ce cas :

$$z = \sqrt{a^2 - \varrho^2}, \qquad z' = -\frac{\varrho}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}$$

$$M = -2\pi\mu a \int_r^R p\,\varrho^2 \frac{d\varrho}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}$$

à condition que :

$$\int_r^R p\,\varrho\,d\varrho = \frac{P}{2\pi}, \qquad p(r) = p_1, \quad p(R) = p_2$$

On cherche l'extrême de la fonctionelle :

$$I = \int_r^R \left(-\frac{2\pi\mu a p \varrho^2}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}} + \lambda p \varrho \right) d\varrho$$

L'équation d'Euler est :

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\partial H}{\partial p'}\right) - \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

où :

$$H = \frac{-2\pi\mu a p \varrho^2}{\sqrt{a^2 - \varrho^2}} + \lambda p \varrho$$

$$\frac{\partial H}{\partial p'} = 0, \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \qquad H \text{ est indépendant de } p\text{: } H = g(\varrho).$$

$$p = \frac{g(\varrho)\sqrt{a^2 - \varrho^2}}{\varrho(\lambda\sqrt{a^2 - \varrho^2} - 2\pi\mu a \varrho)} \, d\varrho = \frac{P}{2\pi}$$

et :

$$\int_r^R \frac{g(\varrho)\sqrt{g^2 - \varrho^2}}{(\Lambda\sqrt{a^2 - \varrho^2} - 2\pi\mu a \varrho)} \, d\varrho = \frac{P}{2\pi}$$

également une équation intégrale du type Fredholm de la I-ère espèce.

Grandeur du moment résultant des forces de frottement pour quelques cas de pivots

No.	Pivot et figure	Hypothèses pour p	$S_\Delta = \int_r^R p\rho\, d\rho$	$I_\Delta = \int_r^R p\rho^2\, ds$	$M_p = \mu \frac{I_\Delta}{S_\Delta} P$
1			$p = \frac{p_0}{\sqrt{1+z'^2}}$	$\frac{p_0}{3}(R^3 - r^3)$	$\frac{2}{3}\mu P \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$
			$p = \frac{p_0}{\rho}$	$\frac{p_0}{2}(R^2 - r^2)$	$\frac{\mu P}{2}(R + r)$
			$p = p_0$	$\frac{p_0}{3}(R^3 - r^3)$	$\frac{2}{3}\mu P \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$
2			$p = \frac{p_0}{\sqrt{1+z'^2}}$	$\frac{p_0}{3}(R^3 - r^3)$	$\frac{2}{3}\frac{\mu P}{\sin\alpha}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$
			$p = \frac{p_0}{\rho}$	$\frac{p_0}{2\sin\alpha}(R^2 - r^2)$	$\frac{\mu P}{2\sin\alpha}(R + r)$
			$p = p_0$	$\frac{p_0}{3\sin\alpha}(R^3 - r^3)$	$\frac{2}{3}\frac{\mu P}{\sin\alpha}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$
3			$p = \frac{p_0}{\sqrt{1+z'^2}}$	$\frac{p_0}{3}(R^3 - r^3)$	$\frac{\mu P a}{3}\frac{R^3 - r^3}{[(a^2 - r^2)^{3/2} - (a^2 - R^2)^{3/2}]}$
			$p = \frac{p_0}{\rho}$	$a\,p_0[\sqrt{a^2 - r^2} - \sqrt{a^2 - R^2}]$	$\mu P a \frac{\sqrt{a^2 - r^2} - \sqrt{a^2 - R^2}}{R - r}$
			$p = p_0$	$\frac{p_0 a}{2}\left\{ r\sqrt{a^2 - r^2} - R\sqrt{a^2 - R^2} + \arccos\frac{\sqrt{a^2 - R^2}\sqrt{a^2 - r^2} + Rr}{a^2}\right\}$	$\frac{\mu P a}{R^2 - r^2}\left[r\sqrt{a^2 - r^2} - R\sqrt{a^2 - R^2} + \arccos\frac{\sqrt{a^2 - R^2}\sqrt{a^2 - r^2} + Rr}{a^2}\right]$
			$p = \frac{p_0}{\sqrt{1+z'^2}}$	$\frac{p_0}{a}[(a^2 - r^2)^{3/2} - (a^2 - R^2)^{3/2}]$	$\frac{p_0}{2}(R^2 - r^2)$
			$p = \frac{p_0}{\rho}$	$p_0(R^2 - r^2)$	$\frac{p_0 \sin\alpha}{2}(R^2 - r^2)$
			$p = p_0$	$\frac{p_0}{2}(R^2 - r^2)$	$\frac{p_0}{2}(R^2 - r^2)$

5. *Conclusions*

Le frottement de pivotement intervient souvent dans la technique, en conditionnant le fonctionnement d'une série d'organes de machines et de mécanismes ; voici quelques cas où il est nécessaire de déterminer le moment des forces de frottement par rapport à l'axe du pivot :

— dans le calcul du couple transmis par les couplages axials de friction (embrayages à plaques annulaires, coniques etc.) ;

— dans le calcul du couple de freinage capable et dans le dimensionnement des freins plans et coniques utilisés dans différentes machines d'élévation et de transport ;

— dans l'évaluation des pertes de puissance et dans l'efectuation du calcul à l'échauffement des tourillons axials plans, coniques, sphériques des arbres de machines ;

— dans la détermination du couple nécessaire à la rotation des boulons et des écrous etc.

En tenant compte de ces applications techniques ainsi que du fait que, en général, l'exposition de ces résultats est effectuée sur les cas particuliers les plus fréquents, nous estimons que ce qui précède peut constituer une synthèse et une généralisation utiles servant de point de départ pour des recherches expérimentales, des calculs de piots ayant des formes plus compliquées (elliptique, hyperbolique, pivot ayant la courbe méridienne formée de plusieurs portions d'équations différentes, pivots pour lesquels on prend en considération le frottement fluide etc.).

La chaire de Mécanique
Institut Polytechnique de Bucarest

СООБРАЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ТРЕНИЯ ВРАШЕНИЯ

(Краткое содержание)

Определяется результирующий момент M_p сил трения относительно оси симметрии для общего случая симметрической пяты (формулы 1″ и 2″).

Указывается способ расчёта краев функций M_p.

Для практических расчётов дана таблица со значениями для M_p.

CONSIDERATIONS IN CONNECTION WITH THE CALCULATION OF PIVOTS

(Summary)

One determinantes the resultant moment Mp of the rubbing forces in relation with the axis of symmetry for the general case of the pivot of revolution (the 1" and 2" formulas).

One indicates the mode of calculation of the extremals of the functional Mp

For the practical calculations, one gives a table containing the values of Mp.

CONSIDERATIONS SUR LE CALCUL DES PIVOTS

(Résumé)

On détermine le moment résultant *Mp* des forces de frottement par rapport à l'axe de symétrie, pour le cas général du pivot de révolution (formules 1" et 2").

On indique le mode de calcul des extrêmales de la fonctionnelle *Mp*.

Pour les calculs pratiques on donne un tableau des valeurs de *Mp*.

BETRACHTUNGEN ÜBER DIE BERECHNUNG DES REVOLUTIONSZAPFEN

(Zusammenfassung)

Es wird das resultierende Moment *Mp* der Reibunskräfte in Verhältnis zur Symmetrieachse für den allgemeinen Fall des Revolutionszapfen berechnet (formel 1" und 2").

Es wird die Berechnungsweise der functionellen Extremalien *Mp* angegeben. Für pratische Berechnungen enthält eine Tabelle die verschiedenen Werte des *Mp*.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 3

HIDRAULICA

MOUVEMENTS UNIDIMENSIONNELS ET NON-PERMANENTS DES FLUIDES COMPRESSIBLES, DANS LE CAS DES PETITES VARIATIONS DE PRESSION, AVEC DES APPLICATIONS AU COUP DE BELIER*)

par MIRCEA-DIMITRIE CAZACU

INTODUCTION

1. Le présent travail est consacré à l'étude des phénomènes transitoires, qui se produisent dans un milieu fluide parfaitement elastique et barotrope, $p = p(\varrho)$, à cause de la propagation des perturbations de pression avec la vitesse c du son, dans l'espace unidimensionnel du fluide.

Sur la vitesse de propagation de l'onde de pression, on fait d'ordinaire l'hypothèse qu'elle soit constante, ce qui correspond au cas des petites variations de densité, voire de pression. En effet, du développement de $p(\varrho)$ on déduit :

$$p(\varrho) \approx p(\varrho_0) + (\varrho - \varrho_0)\, p'(\varrho_0), \quad \text{pour} \quad |\varrho - \varrho_0| < \varepsilon,$$

et par conséquent,

$$c^2 = p'(\varrho) \approx p'(\varrho_0) = \text{const.}$$

2. Le système d'équations différentielles aux dérivées partielles, qui régit le phénomène unidimensionnel de propagation de l'onde de pression, particulièrement le phénomène du coup de bélier, est constitué par deux équations (l'équation de mouvement et celle de continuité) du premier ordre, avec deux fonctions de deux variables : $v(x,t)$ — la vitesse et $y(x,t)$ — la pression exprimée en mètres hauteur de fluide, x étant l'espace et t le temps :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -\frac{c^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Ce système est obtenu dans les hypothèses suivantes :
— la conduite est supposée horizontale, ou le fluide n'est pas lourd,

*) Résumé de la dissertation de candidat ès-sciences techniques.

— le mouvement considéré est lent, c'est-à-dire on ne tient pas compte de la vitesse v du fluide dans la conduite, et
— le fluide est considéré idéal, en négligeant les pertes de charge le long de la conduite.

D'ordinaire, ce système est réduit à un autre système du deuxième ordre, qui présente l'avantage de la séparation des fonction v et y dans ses deux équations, qui ont la forme du d'alembertien égal à zéro.

$$\begin{aligned} \Box y &= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \\ \Box v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Pour l'équation du type hyperbolique du sistème (0.2), on connaît diverses et très variées méthodes de résolution, en commençant par les travaux de d'Alembert (1747) et Euler (1748), puis de D. Bernoulli (1753) et Lagrange. Plus tard, en 1807, à l'aide des séries trigonométriques, Fourier ouvre une nouvelle perspective de résolution du problème. Un demi-siècle plus tard, en 1860, Riemann [1] reprend le problème de la propagation des ondes de pression sous un aspect plus profond du point de vue physique.

Ultérieurement, le grand nombre de recherches n'a pas réussi à épuiser ce problème, à cause de sa complexité en ce qui concerne les conditions aux limites très variées, imposées par la pratique.

Dans la suite, nous exposerons quelques procédés mathématiques pour la résolution du système (0.1) à l'aide des fonctions de variable complexe ou réelle.

CHAPITRE I.

1. Dans cette étude nous partons du système d'équations aux dérivées partielles (0.1), dans lequel nous changerons à l,aide des constantes dimensionnelles, une variable et une fonction de la manière suivante:

$\tau = ct$ [L], l'espace qui mesure l'écoulement du temps à l'échelle de la vitesse de propagation du son c.

$h = \frac{cv}{g} = \frac{\varrho cv}{g}$ [L], l'hauteur qui correspond à la pression sonique ϱcv.

D'une façon plus générale, nous considérerons les deux systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} &= \frac{\partial h}{\partial x}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{\partial h}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} &= -\frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Le ressemblance des systèmes (1.1) ou (1.2) avec les relations de monogéneité Cauchy-Riemann, a suggéré l'idée de traiter le problème par l'intermédiaire des fonctions de variable complexe.

2. Soit (x,τ) le plan de la variable complexe $z = x + i\tau = \varrho\, e^{i\theta}$, et notons par

$$f(z, \bar{z}) = y(x, \tau) + i\, h(x, \tau) \tag{1.3}$$

la fonction complexe de variable z et sa conjuguée $\bar{z}$.

Nous désignerons par *fonction sonique,* toute fonction réelle qui vérifie l'équation (0.2) de d'Alembert. Deux fonntions soniques sont appelées *conjuguées,* si elles satisfont a l'une des relations (1.1) ou (1.2). Les relations (1.1) ou (1.2) seront nommées *conditions d'hyperbolicité* ou *de sonicité positives respectivement négatives,* le rapport d'entre elles étant analogue à celui des conditions de monogéneité Cauchy-Riemann et d'anti-monogéneité de Calugareano [2].

Une fonction complexe définie par (1.3), dont la partie réelle et imaginaire vérifient (1.1) ou (1.2), sera nommée fonction polygène du type sonique positif respectivement négatif. Remarquons toutefois, que seulement les fonctions polygènes du type sonique négatif représentent les mouvements en question.

C'est pour cela, que nous les appelerons aussi potentiels soniques et les désignerons encore par

$$\pi(z, \bar{z}) = f^{-}(z, \bar{z}) = \overline{f^{+}(z, \bar{z})}.$$

Elles sont les conjuguées des fonctions polygènes du type sonique positif, qui nous serviront pour les transformations pseudoconformes, dont l'importance sera mise en évidence dans le chap. II, 1, c.

A l'étude du spectre du mouvement dans le plan physique (x, τ), il sera souvent nécessaire de figurer les familles suivantes de courbes :

— courbes isobares, $y(x,\tau) = \text{const.}$,

— courbes isotaches, $h(x, \tau) = \text{const.}$, et

— les trajectoires des particules du milieu fluide, qui sont données par l'équation différentielle :

$$dx = v\,dt = \frac{g}{c^2}\, h(x, \tau)\, d\tau.$$

3. Pour mieux connaître la nature intime des fonctions polygènes du type sonique positif ou négatif, nous exposerons quelques-unes de leurs propriétés.

a. La dérivée en un point, calculée pour une fonctions polygène du type sonique, dépend de la direction considérée dans l'opération du passage à la limite. En supposant $y(x, \tau)$ et $h(x, \tau)$ différentiables, nous avons :

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_0 = [(y_x \cos\theta + y_\tau \sin\theta) + i\,(h_x \cos\theta + h_\tau \sin\theta)]\, e^{-i\theta} \tag{1.4}$$

ou, en tenant compte de relations (1.1) respectivement (1.2)

$$\left(\frac{df^+}{dz}\right)_\theta = y_x + y_\tau\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)} = (y_x + y_\tau \sin 2\theta) + i y_\tau \cos 2\theta \qquad (1.5)$$

$$\left(\frac{df^-}{dz}\right)_\theta = y_x\, e^{-2i\theta} + y_\tau\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = y_x \cos 2\theta - i\,(y_x \sin 2\theta + y_\tau). \qquad (1.6)$$

Étant à son tour une valeur complexe, la dérivée fait correspondre à un point du plan (x, τ), dans lequel elle fut calculée, une courbe dans le plan (y', y'') de la dérivée. Par les relations (1.5) et (1.6) on voit

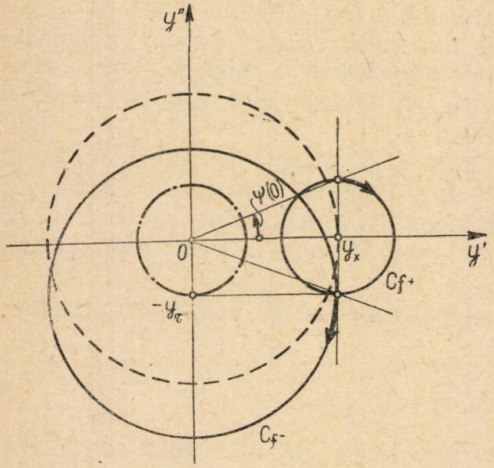


Fig. 1.

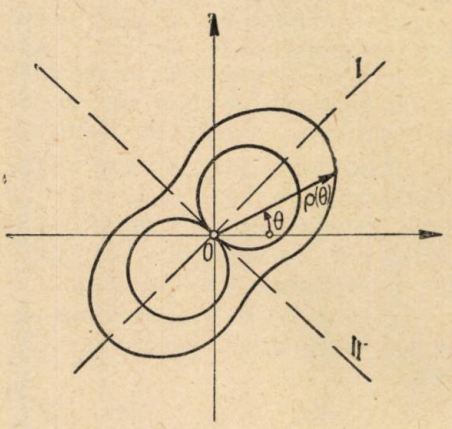


Fig. 2.

que ces courbes sont des cercles orthogonaux [3]. Dans la figure 1 *) nous avons représenté les cercles de Kasner et les sens de parcours en fonction de l'angle θ, pour les cas particuliers suivants :

α) lorsqu'on a seulement $y_\tau = 0$ (ligne interrompue), f^+ est monogène et f^- antimonogène.

β) lorsqu'on a seulement $y_x = 0$ (ligne-point), a lieu la situation inverse.

γ) enfin lorsque $y_x = \pm y_\tau$. les cercles C_{f+} et C_{f-} sont orthogonaux en origine, ayant le même rayon, et le jacobien de la transformation

$$J = \begin{vmatrix} y_x & y_\tau \\ h_x & h_\tau \end{vmatrix} \qquad (1.7)$$

est égal à zéro.

De (1.5) et (1.6) on observe que ces dérivées ont la période $\theta = \pi$. En représentant leurs module en fonction de l'angle θ, l'extrémité du vecteur $\varrho(\theta)$, décrira en général une quartique bicirculaire (fig. 2), où

$$\varrho^2 = \left|\left(\frac{df}{dz}\right)_\theta\right|^2 = y_\tau^2 + y_x^2 + 2 y_x y_\tau \sin 2\theta.$$

*) De même que pour la figure suivante, le dessin fut rédigé pour y_x et y_τ positifs.

Les maximums du module de la dérivée sont situés sur la bissectrice I ou II, suivant que $y_x y_\tau > 0$ respectivement $y_x y_\tau < 0$, et les minimums sur l'autre bissectrice. Dans le cas γ nous avons :

$$\varrho = 2 \left| y_x \cos\left(\frac{\pi}{4} \mp \theta\right) \right|,$$

et la quartique dégénère en deux cercles, tangents en origine à la bissectrice II respectivement I, ayant les centres sur l'autre bissectrice.

Des formules (1.5) et (1.6) on peut encore déduire la variation de l'argument ψ de la dérivée d'une fonction polygène du type sonique, en dépendance de la direction θ. Nous avons respectivement

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{y_\tau \cos 2\theta}{y_x + y_\tau \sin 2\theta}, \tag{1.8}$$

et

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{y_\tau + y_x \sin 2\theta}{y_x \cos 2\theta}. \tag{1.9}$$

En particulier, lorsque les conditions de monogénéité sont vérifiées, nous avons $\psi = \text{const.} \neq \psi(\theta)$, et lorsque les conditions d'anti-monogénéité sont vérifiées, nous avons $\psi = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ respectivement $\psi = -2\theta$, à un multiple de π près (fig. 1).

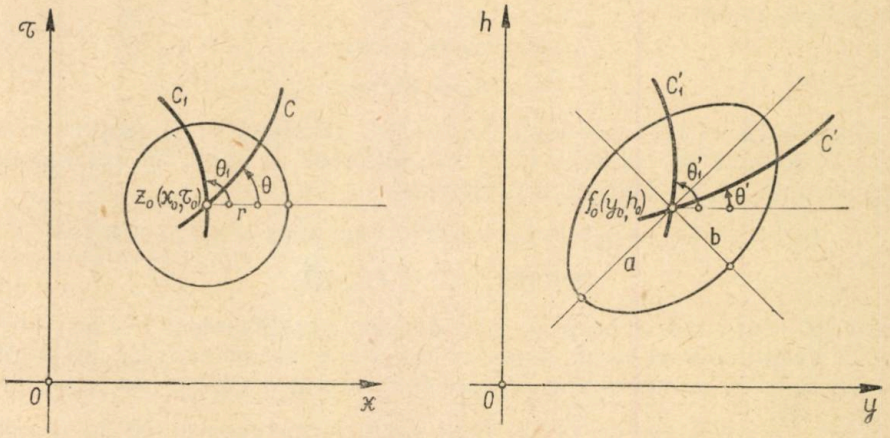


Fig. 3.

b) Voyons maintenant les propriétés infinitésimales d'une transformation définie par une fonction poligène du type sonique. Cette transformation établit une correspondance entre les points du plan physique (x, τ) et ceux du plan de la fonction (y, h), de telle sorte qu'au point $z_0\ (x_0, \tau_0)$ correspond le point $f_0(y_0, h_0)$ (fig. 3).

Les fonctions soniques $y\,(x, \tau)$ et $h\,(x, \tau)$ admettant des dérivées au moins du deuxième ordre, peuvent être développées autour du point z_0, en nous limitant seulement aux termes linéaires. La transformation de ces

deux plans au voisinage de ce point est infinitésimalement équivalente à la transformation afine suivante :

$$\begin{aligned} y - y_0 &= y_x (x - x_0) + y_\tau (\tau - \tau_0) \\ h - h_0 &= h_x (x - x_0) + h_\tau (\tau - \tau_0), \end{aligned} \tag{1.10}$$

ou en complexe, sous la forme différentielle :

$$df = f'_0(z_0)\, dz. \tag{1.11}$$

Soient c et c_1 deux arcs de courbe, qui passent par le point z_0 et qui par la fonction $f(z, \bar{z})$ se transforment respectivement dans les arcs c' et c'_1 (fig. 3). De (1.11) nous obtenons :

$$\theta' = \psi(\theta) + \theta, \tag{1.12}$$

où $\psi(\theta) = \arg f'_0(z_0)$, et nous pouvons calculer

$$\theta'_1 - \theta' = \theta_1 - \theta + \psi(\theta_1) - \psi(\theta),$$

d'où on voit en général, que l'angle de ces deux courbes ne se conserve pas, exceptant les directions orthogonales $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, ce qu'on peut démontrer aisément, en partant de la relation $\psi(\theta_1) = \psi(\theta)$ et (1.8) ou (1.9).

En considérant dans le plan physique un cercle infinitésimal de centre z_0 et rayon r

$$\begin{aligned} x - x_0 &= r \cos\vartheta \\ \tau - \tau_0 &= r \sin\vartheta, \end{aligned}$$

on observe de (1.10) que, dans le cas des relations (1.1) respectivement (1.2) et lorsque le jacobien (1.7) est différent de zéro, lui correspondra dans le plan (y, h) l'ellipse infinitésimale

$$\begin{aligned} (y_x^2 + y_\tau^2)\,[(y - y_0)^2 + (h - h_0)^2] \mp 4 y_x y_\tau (y - y_0)(h - h_0) = \\ = r^2 (y_x^4 + y_\tau^4 - 2 y_x^2 y_\tau^2), \end{aligned}$$

ayant les demi-axes a, $b = r\,|\,y_x \pm y_\tau\,|$ dirigées parallèlement aux bissectrices I et II, et qui devient cercle dans les cas α et β susmentionnés au point a.

Le sens de parcours sur l'ellipse infinitésimale dépend du signe de la dérivée $\frac{d\theta'}{d\theta}$, calculée de (1.12), donc exclusivement du signe du jacobien. Dans le cas $y_x = \pm y_\tau$, lorsque $J=0$, l'ellipse dégénère dans le double-segment de son grand axe, et lorsque $y_x = y_\tau = 0$ nous avons une situation analogue à celle d'une fonction monogène, ayant la dérivée nulle dans ce point.

c. Voyons maintenant les propriétés générales d'une transformation, définie par une fonction polygène du type sonique.

Dans les régions du plan (x, τ) où $J \neq 0$, la transformation définie par $f(z, \bar{z})$ est localement biunivoque et bicontinue, en conformité au théorème des fonctions implicites. Dans ces régions la transformation est

intérieure au sens de Stoïlow [4], c'est-à-dire elle transforme des points intérieurs dans des points intérieurs, et aucun continuum dans un point.

Puisque le jacobien d'une transformation, définie par une fonction polygène du type sonique, peut s'annuler même dans des régions, la transformation ne sera pas en général intérieure. Nous insisterons un peu sur cette propriété, en montrant en même temps son sens physique (voir aussi le chap. II, 1, c).

α) Voyons premièrement la forme des fonctions polygènes du type sonique, qui ont $J=0$ dans une région.

En éliminant le cas $y_x = y_\tau = 0$, quand les fonctions se reduisent à des constantes, nous avons $y_x = \pm y_\tau$, d'où par intégration $y = \Phi(x \pm \tau)$, et donc

$$f^{\pm}(z, \bar{z}) = (1+i)\,\Phi(x \pm \tau) + \text{const.} \tag{1.13}$$

Dans ce cas, la région entière du plan (x, τ) se transforme au plan (y, h) dans une parallèle à l'une de ces deux bissectrices, de sorte que chaque parallèle à l'autre bissectrice passe dans un point (fig. 4).

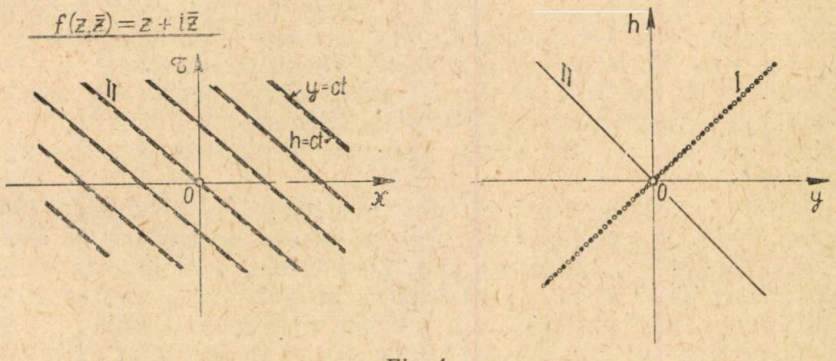


Fig. 4.

β) Par la suite, nous utiliserons la propriété suivante des caractéristiques :

Sur toute parallèle à la bissectrice I ou II, nous avons respectivement $y_x \mp y_\tau = \text{const.}$ En considérant, par exemple, une parallèle à la première bissectrice, on a en effet sur cette droite $\tau = x + k$:

$$\frac{d}{dx}[y_x(x, x+k) - y_\tau(x, x+k)] = y_{x^2} - y_{\tau x} + y_{x\tau} - y_{\tau^2} = \underset{x,\,\tau}{\square}\, y = 0.$$

γ) Étant donnée une fonction polygène du type sonique, pour laquelle une corbe $y(x, \tau) = \text{const.}$ coïncide dans le plan (x, τ) à une courbe $h(x, \tau) = \text{const.}$, alors tout le long de cette courbe nous aurons $J = 0$, ce qu'on voit aisément en écrivant l'égalité des pantes des deux courbes.

Il devient clair maintenant, l'interprétation physique de la propriété d'une transformation, définie par une fonction polygène du type sonique, de ne pas être intérieure. S'il existe une courbe dans le plan (x,τ), qui par une transformation non-intérieure sonique se transforme dans un point du plan (y, h), alors elle correspondra en même temps à une courbe

de pression et vitesse constante, tout le long de laquelle nous aurons $J=0$, vu les propositions susdites. D'autre part, puisque ce continuum se transformera dans un point, nous aurons dans le plan (y, h)

$$ds^2 = dy^2 + dh^2 = (y_x^2 + y_\tau^2)(dx^2 + d\tau^2) + 4y_x y_\tau\, dx\, d\tau = 0,$$

et parce que le long de ce continuum $J=0$, il résultera

$$ds^2 = 2y_x^2 (dx \pm d\tau)^2 = 0, \quad \text{suivant que } y_x = \pm y_\tau . \tag{1.14}$$

Analysons les deux possibilités :

— le cas $dx \pm d\tau = 0$. En considérant par exemple dans les relations (1.14) les signes supérieurs, l'arc de courbe en question sera parallèle à la deuxième bissectrice, et sur toute droite parallèle à la première bissectrice qui passera par les points de notre arc, nous aurons $J = \pm (y_x + y_\tau)(y_x - y_\tau) = 0$ vu l'alinéa β du point c. Par conséquent, dans ce cas, la courbe qui se tranforme dans un point est parallèle à l'une des bissectrices, le jacobien étant nul dans une région, et la fonction ayant la forme (1.13).

— le cas $y_x = 0$. Cette supposition entraîne $y_\tau = h_x = h_\tau = 0$ tout le long de l'arc de courbe qui se transforme dans un point. Évidemment, nous pouvons mener par les points de cet arc des droites parallèles à la bissectrice I ou II, et en conformité avec le même alinéa β du point c, nous aurons de nouveau $J=0$ dans une région, toutes les conclusions susmentionnées restant valables. Des propriétés des fonctions (1.13) résulte de plus, que cet arc de courbe est une droite parallèle à l'une des bissectrices.

δ) Nous montrerons par la suite, que lorsqu'on a, pour une fonction polygène du type sonique, $J=0$ sur une courbe quelconque et non dans une région, alors la courbe est une ligne brisée, dont les segments sont parallèles aux bissectrices. En effet, parce qu'on a sur la courbe $J=0$, sur ces différentes portions nous aurons soit $y_x + y_\tau = 0$, soit $y_x - y_\tau = 0$. Mais, la portion sur laquelle par exemple $y_x + y_\tau = 0$, sera parallèle à la deuxième bissectrice, car dans le cas contraire il résulterait $J=0$ dans une région, vu le même alinéa β du point c.

d. Nous montrerons maintenant le comportement des fonctions polygènes du type sonique en liaison avec leur propriété de former un système fermé. Effectuons sur la fonction polygène du type sonique (1.3) la transformation $F = \varphi + i\psi$. Nous aurons :

$$F[f(z, \bar{z})] = \varphi[y(x, \tau),\ h(x, \tau)] + i\psi[y(x, \tau),\ h(x, \tau)],$$

et en calculant les expressions :

$$\begin{aligned}
\varphi_x &= \varphi_y y_x + \varphi_h h_x \\
\varphi_\tau &= \varphi_y y_\tau + \varphi_h h_\tau \\
\psi_x &= \psi_y y_x + \psi_h h_x \\
\psi_\tau &= \psi_y y_\tau + \psi_h h_\tau ,
\end{aligned}$$

nous établirons les résultats suivants, qui peuvent être mis, du point de vue mnémotechnique, en liaison avec la règle des signes de la multiplication :

α) En partant d'une fonction polygène du type sonique positif, nous obtiendrons de même une fonction polygène du type sonique, positif ou negatif, suivant que la transformation qu'on fait sur elle est donnée par une fonction polygène du type sonique positif respectivement négatif.

β) En partant d'une fonction polygène du type sonique négatif, nous obtiendrons de même une fonction polygène du type sonique, négatif ou positif, suivant que la transformation qu'on fait sur elle est donnée par une fonction polygène du type sonique positif respectivement négatif.

Étudions maintenant la possibilité de transformer une fonction polygène du type sonique négatif en une fonction monogène. On devra vérifier les relations de Cauchy — Riemann

$$\varphi_x - \psi_\tau = \varphi_y y_x + \varphi_h h_x - \psi_y y_\tau + \psi_h h_\tau = 0$$
$$\varphi_\tau + \psi_x = \varphi_y y_\tau + \varphi_h h_\tau + \psi_y y_x + \psi_h h_x = 0,$$

qui deviennent dans le cas des potentiels soniques

$$\begin{aligned} y_x(\varphi_y + \psi_h) - y_\tau(\varphi_h + \psi_y) &= 0 \\ y_x(\psi_y - \varphi_h) + y_\tau(\varphi_y - \psi_h) &= 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

En éliminant le cas banal, quand la fonction transformée ou celle qui définit la transformation se reduisent à des constantes complexes, le déterminant du système (1.15) étant différent de zéro dans une région, ou ayant tous les éléments identiquement nuls, nous aurons le déterminant égal à zéro à cause de la proportionalité des coefficients des équations (1.15). Alors n'importe quelle équation du système (1.15) nous donnera la condition de compatibilité entre $\pi(z, \bar{z})$ et $F(\pi)$. Plus exactement, en nous fixant soit sur $\pi(z, \bar{z})$, soit sur $F(\pi)$, l'autre fonction sera déterminée par une équation différentielle aux dérivées partielles du deuxième ordre, déduite de (1.15). Pareillement, on peut vérifier aisément, que l'inverse d'une fonction polygène du type sonique est également une fonction polygène du type sonique, de même signe.

e. Les fonctions polygène du type sonique, ayant la partie réelle et imaginaire fonctions de x et τ, peuvent être exprimées à l'aide de la substitution de G. Calugareano [2]

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$
$$\tau = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

en fonction seulement de z et $\bar{z}$, ce qui justifie la notation adoptée en (1.3). Nous démontrerons maintenant la propriété intéressante des fonctions polygènes du type sonique d'être harmoniques par rapport aux variables z et $\bar{z}$. Calculons pour cela la dérivée aréolaire introduite par D. Pompeiu [5]

$$\mathfrak{D}[f(z, \bar{z})] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{df}{dz}\right)_{\theta=0} - \left(\frac{df}{dz}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} =$$
$$= \frac{1}{2}[(y_x - h_\tau) + i(y_\tau + h_x)], \tag{1.16}$$

et la dérivée moyenne ou symétrique

$$\mathfrak{D}[f(z,\bar{z})] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{df}{dz}\right)_{\theta=0} + \left(\frac{df}{dz}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{2}(f_x - if_y) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}[(y_x + h_\tau) + i(h_x - y_\tau)]. \tag{1.17}$$

Tenant compte de (1.1) et (1.2), on voit aisément, que nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^+}{\partial z} &= \frac{\partial f^-}{\partial \bar{z}} = y_x \\ \frac{\partial f^+}{\partial z} &= -\frac{\partial f^-}{\partial \bar{z}} = iy_\tau, \end{aligned} \tag{1.18}$$

qui sont les relations de Cauchy — Riemann, et par conséquent

$$\underset{z,\bar{z}}{\Delta} f(z,\bar{z}) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} = 0. \tag{1.19}$$

f. A propos de cela, rappelons les expressions des formules intégrales de D. Pompeiu [6] pour les fonctions polygènes, qui généralisent les formules intégrales de Cauchy du cas monogène.

Soit $f(z, z)$ une foncion polygène du type sonique définie dans le domaine fermé D, ayant comme frontière une courbe simple, fermée et rectifiable C. Puisque $f(z, \bar{z})$ est évidemment de classe C^1, en appliquant la formule de Green et en tenant compte de (1.16), nous avons :

$$\int_C f(z,\bar{z})\,dz = \int_C y\,dx - h\,d\tau + i\int_C h\,dx + y\,d\tau = 2i\iint_D \mathfrak{D}[f(z,\bar{z})]\,dx\,d\tau. \tag{1.20}$$

En appliquant maintenant cette formule à la fonction $\dfrac{f(\zeta,\bar{\zeta})}{\zeta - z}$, relativement au domaine D, de qui nous extrayons un petit cercle de centre z et rayon tendant vers zéro, à l'intérieur duquel la fonction considérée a un pôle, nous aurons :

$$f(z,\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta,\bar{\zeta})}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\mathfrak{D}[f(\zeta_\sigma,\bar{\zeta}_\sigma)}{\zeta_\sigma - z}\,d\sigma, \tag{1.21}$$

où ζ décrit la frontière C, et ζ_σ est un point quelconque de D, autour duquel on considère l'aire élémentaire $d\sigma$.

Dans notre cas, polygène — sonique, nous devrons remplacer en (1.20) et (1.21) l'expression de la dérivée aréolaire de (1.18) sous le signe de l'intégrale du domaine, qui met en évidence le caractère polygène de $f(z, \bar{z})$.

CHAPITRE II

En utilisant les propriétés que nous avons exposées plus haut, nous examinerons divers procédés d'étudier les mouvements lents, unidimensionnels et non-permanents des fluides compressibles, quand la vitesse de la propagation du son reste constante. Globalement, on peut diviser ces méthodes en deux grands groupes :

— méthodes indirectes,

— méthodes directes.

1. La méthode indirecte consiste à obtenir des potentiels soniques $\pi(z, \bar{z})$ par divers procédés et puis à étudier les mouvements non-permanents qu'ils définissent, par l'intermédiaire des fonctions y et h, qui donnent les valeurs de la pression et de la vitesse en tout point et à chaque moment.

a. Le premier procédé pour construire un potentiel sonique est le suivant : en déterminant une fonction réelle $y(x, \tau)$, comme solution de l'équation de d'Alembert, et en considérant cette fonction comme partie réelle d'un potentiel sonique $\pi(z, \bar{z})$ nous pouvons obtenir sa conjuguée sonique, et donc le potentiel complexe du mouvement, par l'intégration d'une différentielle totale exacte

$$h(x, \tau) = \int dh + \text{const.} = -\int (y_\tau \, dx + y_x \, d\tau) + \text{const.},$$

la fonction $h(x, \tau)$ étant uniforme pour des domaines simplement connexes.

b. Une autre méthode pour obtenir des potentiels soniques s'appuie sur leur propriété d'être harmoniques relativement à z et $\bar{z}$ (chap. I, 3, e). On distingue deux cas, suivant qu'on part d'une fonction harmonique réelle $P(\xi, \eta)$, ou d'une fonction monogène $F(\zeta) = P(\xi, \eta) + iQ(\xi, \eta)$, où $\zeta = \xi + i\eta$:

α) Soit $P(\xi, \eta)$ une fonction harmonique réelle. Par la substitution

$$\begin{aligned} \xi &= z = x + i\tau \\ \eta &= \bar{z} = x - i\tau, \end{aligned} \tag{2.1}$$

nous obtenons :

$$P(z, \bar{z}) = p(x, \tau) + iq(x, \tau),$$

où p et q sont deux fonctions soniques réelles par rapport à x et τ, parce qu'on voit aisément que

$$\underset{z, \bar{z}}{\Delta} P = \frac{1}{2}\left(\underset{x, \tau}{\square} p - i \underset{x, \tau}{\square} q\right) = 0.$$

β) Soit $F(\zeta) = P(\xi, \eta) + iQ(\xi, \eta)$ une fonction monogène. Par la même substitution (2.1), nous avons :

$$\begin{aligned} P(z, \bar{z}) &= p(x, \tau) + iq(x, \tau) \\ Q(z, \bar{z}) &= r(x, \tau) + is(x, \tau), \end{aligned}$$

et après quelques calculs

$$\pi(z, \bar{z}) = P(z, \bar{z}) - \overline{Q(z, z)} = P(z, \bar{z}) - Q(\bar{z}, z)$$
$$f(z, \bar{z}) = P(z, \bar{z}) + \overline{Q(z, \bar{z})} = P(z, \bar{z}) + Q(\bar{z}, z). \tag{2.2}$$

Remarquons toutefois que $\pi(z, \bar{z})$ et $f(z, \bar{z})$ sont imaginaires conjuguées, seulement lorsque $P(z, z)$ est pur réel et $Q(z, \bar{z})$ pur imaginaire, ce qui a lieu pour $q(x, \tau) = r(x, \tau) = 0$. Mais, en général (2.2) définit deux potentiels soniques et deux fonctions polygènes soniques positives, les autres deux fonctions pouvant être obtenues aussi des relations (2.2) par le changement de z et $\bar{z}$ entre eux, car elles représentent les conjuguées imaginaires des deux premières fonctions.

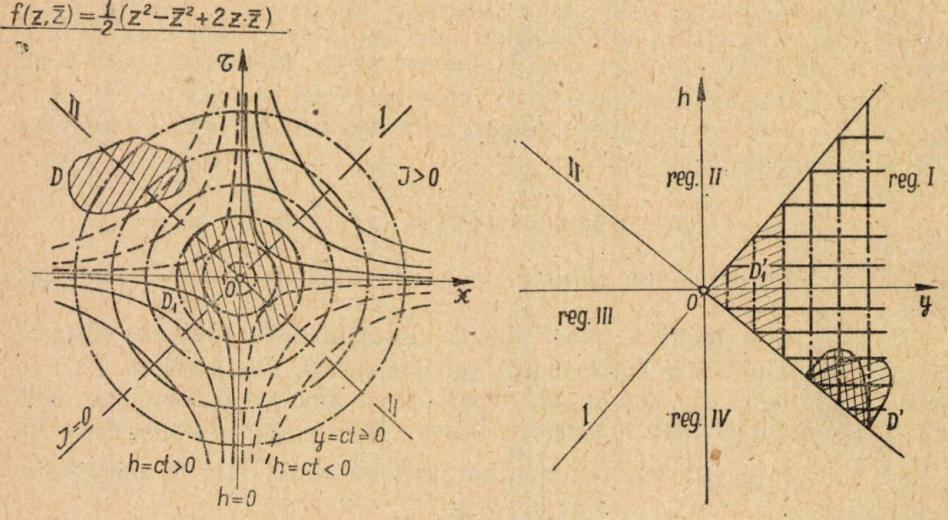


Fig. 5.

c. Une autre méthode pour obtenir des potentiels soniques est basée sur la propriété des fonctions polygènes du type sonique de constituer un système fermé (cap. I, 3, d). En connaissant un potentiel sonique quelconque, nous pouvons obtenir un autre, en effectuant sur lui une transformation donnée par une fonction polygène du type sonique positif. Cette transformation est intérieure, exceptant le cas $J=0$ et $ds=0$ (chap. I, 3, c, α et γ). Nous remarquons que la propriété intéresante du jacobien de ne s'annuler que sur des parallèles aux bissectrices (chap. I, 3, c, δ), conduit à la représentation du plan (x,τ) seulement sur certaines portions du plan (y, h), limitées par des parallèles aux bissectrices, et couvertes un nombre fini ou infini de fois (fig. 5 et 6).

Pour mieux poursuivre la transformation du plan (x, τ) dans le plan (y, h) nous suggérons le procédé intuitif suivant: on doit plier le plan (x, τ) le long des lignes $J=0$ jusqu'à ce, qu'à l'intérieur du domaine plié il n'y ait pas de telles lignes, que sur sa frontière. Il devient clair maintenant la

deuxième propriété caractéristique d'une transformation non-intérieure (chap. I, 3, c), à savoir de transformer des points ou des ensembles de points intérieurs d'un domaine en points ou ensembles de points de la frontière. Cette deuxième caractéristique résulte naturellement de la propriété d'une fonction sonique réelle d'avoir son maximum ou minimum même dans l'intérieur du domaine de définition.

$$f(z,\bar{z}) = -i\left[\cos\frac{\pi}{2l}(\bar{z}+z)\,ch\frac{\pi}{2l}(\bar{z}-z) - \sin\frac{\pi}{2l}(\bar{z}+z)\,sh\frac{\pi}{2l}(\bar{z}-z)\right]$$

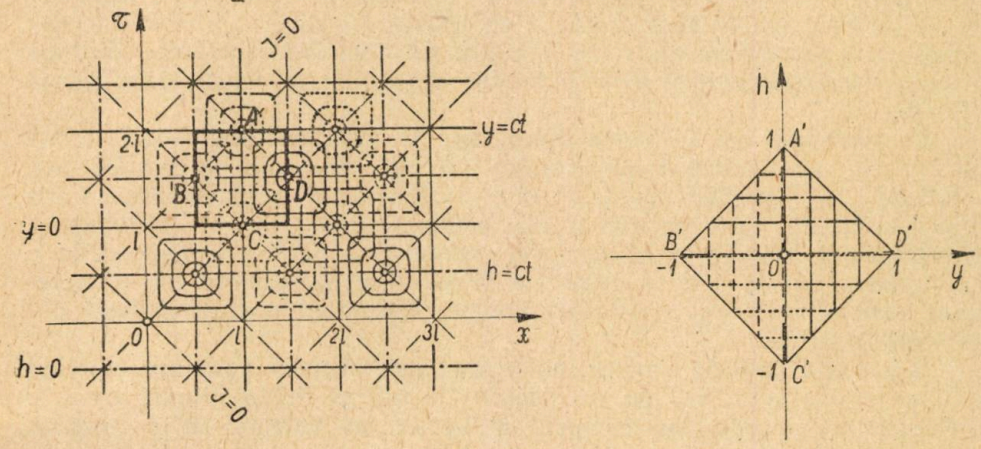


Fig. 6.

Le cas $J=\infty$ doit être analysé séparément, puisque la transformation sonique ne remplit pas des conditions de regularité. Même pour les fonctions polygènes soniques multiformes on peut avoir la permutation des déterminations quand on traverse certaines courbes, mais cette question ne présente pas la même importance qu'aux fonctions monogènes, comme d'ailleurs l'étude de la transformation à l'infini.

Parmi les transformations géometriques simples du plan, les transformation suivantes sont soniques: les translations, les homothéties, les rotations d'angle $\frac{k\pi}{2}$, les symétries par rapport aux axes des coordonées et par rapport aux deux bissectrices.

d) Enfin, une dernière méthode pour obtenir des potentiels soniques est basée sur la propriété des fonctions polygènes du type sonique d'être monogènes par rapport à la variable hypercomplexe $\zeta = x + j\tau$, ou $j^2 = +1$, et donc de pouvoir être exprimées analytiquement par rapport à cette variable. Dans le cas des potentiels soniques on a:

$$\pi(z,\bar{z}) = F(\bar{\zeta}) = F(x - j\tau).$$

Cette manière de traiter les systèmes d'équations aux dérivées partielles, introduit en 1934 par Sobrero, fut approfondi et développé chez nous par l'académicien Gr. Moisil, M. Roşculeţ, C. Drîmbă et d'autres [7].

2. La méthode directe consiste à obtenir la solution d'un mouvement non-permanent quelconque, donné par certaines conditions déterminantes. Sur cette question nous insisterons plûs loin, au sens que le problème soit correctement posé.

a. Le domaine canonique de référence D, du plan physique, sera en général un rectangle, puisque du point de vue pratique ce qui nous intéresse c'est l'évolution dans l'intervalle temporel $[0, \tau]$ des pressions et des vitesses sur une portion limitée $[0, l]$ d'un milieu élastique (fluide dans une conduite, corde vibrante, etc). Dans certains cas, lorsque les perturbations de pression partent ou se reflètent aux bouts de l'intervalle $[0, l]$ le domaine D sera partagé en sous — domaines, limités par des lignes caractéristiques sur certains côtés. Ce domaine peut être réduit au triangle caractéristique et aussi à l'entier demi-plan supérieur, dans le cas illimité.

Le problème qui intéresse d'ordinaire la physique mathématique est de trouver une solution particulière précise, de toute la variété des solutions, qui correspondent à une catégorie de phénomènes. Cette solutions devra correspondre à un phénomène donné et suffisament déterminé par certaines conditions de contour (aux limites et temporelles). Le problème de la détermination de la solution particulière est correctement posé, s'il existe une solution unique, dépendant continuellement des données imposées.

b. Le problème de contour, qu'on met correctement pour une fonction sonique réelle $y(x, \tau)$, en considérant le milieu fluide illimité, c'est le problème de Cauchy, qui consiste à donner les valeurs de la fonction $y(x, 0) = y_0(x)$ et de sa dérivée normale $\frac{\partial y}{\partial \tau}(x, 0) = Y_0(x)$ pour un certain moment, par exemple l'instant initial. Dans ce cas la solution a été donnée par d'Alembert, pour $y_0(x)$ et $Y_0(x)$ fonctions arbitraires de classe C^2 respetcivent C^1, sous la forme

$$y(x, \tau) = \frac{y_0(x-\tau) + y_0(x+\tau)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-\tau}^{x+\tau} Y_0(\alpha)\, d\alpha. \tag{2.3}$$

Elle est valable dans le demi-plan supérieur et peut être prolongée dans le plan entier, pour $y_0(x)$ et $Y_0(x)$ fonctions analytiques [8]. Le même probleme peut être traité à l'aide du calcul opérationnel [9], qui permet d'exprimer la solution sous une forme intégrale, en utilisant pour cela le procédé préconisé par Riemann [1]. Lorsque l'opérateur est précisément le d'alembertien, la fonction de Riemann est partout égale à l'unité, et la solution prend la forme (2.3) dans les mêmes conditions initiales.

Considérons simultanément les fonctions soniques réelles $y(x, \tau)$ et $h(x, \tau)$, pour lesquelles nous supposons pour le moment des conditions Cauchy différentes

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= y_0(x); \qquad \frac{\partial y}{\partial \tau}(x, 0) = Y_0(x) \\ h(x, 0) &= h_0(x); \qquad \frac{\partial h}{\partial \tau}(x, 0) = H_0(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Les deux solutions, ayant la forme (2.3) devront vérifier, dans le domaine D, les conditions de hyperbolicité (1.2). Ainsi, on peut démontrer que les données (2.4) ne sont pas arbitraires toutes les quatre, mais qu'elles doivent vérifier les relations

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= -H_0(x) \\ h_0'(x) &= -Y_0(x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Autrement dit, les conditions de sonicité (1.2) doivent être vérifiées de même sur la frontière du domaine. Nous voyons à la fois, que le problème de trouver le potentiel sonique $\pi(z, \bar{z})$ est correctement posé dans l'un des cas suivants :

α) On donne, pour $\tau = 0$, la partie réelle et imaginaire, c'est-à-dire la fonction complexe d'une seule variable réelle $\pi(x, x) = y_0(x) + ih_0(x) = \pi_0(x)$.

β) On donne les dérivées partielles de la partie réelle ou imaginaire, pour le moment $\tau = 0$:

$$y_x'(x, 0) = -h_\tau'(x, 0) = \frac{\partial \pi}{\partial \bar{z}}(x, x)$$

$$y_\tau'(x, 0) = -h_x'(x, 0) = i\,\frac{\partial \pi}{\partial \bar{z}}(x, x)$$

γ) On donne les conditions initiales de Cauchy pour la partie réelle ou imaginaire.

Nous indiquerons le procédé d'obtenir le potentiel sonique $\pi(z, \bar{z})$ dans le cas α, auquel on peut réduire les cas β et γ, à une constante arbitraire près. En faisant la substitution

$$\begin{aligned} \mu &= x - \tau \\ \nu &= x + \tau \end{aligned} \tag{2.6}$$

il résulte de (2.3) et (2.5)

$$\pi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}\left\{\pi_0(\mu) + \pi_0(\nu) + i\left[\overline{\pi_0(\mu)} - \overline{\pi_0(\nu)}\right]\right\}, \tag{2.7}$$

et en introduisant les notations :

$$F_1(\mu) = \pi_0(\mu) + i\,\overline{\pi_0(\mu)} = (1+i)\left[y_0(\mu) + h_0(\mu)\right]$$

$$F_2(\nu) = \pi_0(\nu) - i\,\overline{\pi_0(\nu)} = (1-i)\left[y_0(\nu) - h_0(\nu)\right],$$

la formule (2.7) peut s'écrire sous une forme analogue à la solution de d'Alembert du cas réel

$$\pi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}\left[F_1(\mu) + F_2(\nu)\right]. \tag{2.8}$$

c. Considérant maintenant le cas plus compliqué du milieu limité, on peut avoir les deux types suivants de problèmes mixtes [8] [9], pour déterminer une fonction sonique réelle $y(x, \tau)$:

α) Les conditions aux limites sont homogènes $y(0, \tau) = y(l, \tau) = 0$, le mouvement ayant lieu en vertu des données initiales de Cauchy $y(x, 0) = y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial \tau}(x, 0) = Y_0(x)$. Ce problème mixte, qui est connu encore sous le nom de problème stationnaire, à cause du caractère de périodicité du mouvement imprimé par les conditions de réflexion aux extrémités, nous le désignons du premier type.

β) Les données initiales de Cauchy sont homogènes $y(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial \tau}(x, 0) = 0$, et les conditions aux limites sont des fonctions quelconques $y(0, \tau) = y_1(\tau)$ et $y(l, \tau) = y_2(\tau)$. Ce problème mixte nommé encore non-stationnaire, parce que le mouvement qu'il définit n-a pas le caractère de périodicité temporelle, nous le désignons du deuxième type. Pour ce deuxième problème on peut donner comme conditions aux limites non seulement les valeurs de la fonction $y(x, \tau)$, mais aussi celles de sa dérivée normale $\frac{\partial y}{\partial x}$, ou une combinaison linéaire entre elles.

Du point de vue théorique ces deux types de problèmes mixtes ne sont pas essentiellement distincts, n'importe lequel d'entre eux pouvant être réduit à l'autre, en ajoutant une fonction sonique arbitraire, ayant l'effet désiré sur les données de contour. Remarquons toutefois, que certaines méthodes pour trouver la solution du d'alembertien sont spécifiques, par leur construction, au problème mixte du premier ou du deuxième type. Ainsi, la méthode de la séparation des variables de Bernoulli [10], nommée encore la méthode de Fourier [9], ou la deuxième méthode de Poisson [11], est adéquate au problème du premier type, donnant la solution à l'aide des fonctions propres, seulement dans certaines conditions aux limites. La méthode des ondes progréssives ou des caractéristiques de d'Alembert [9] et la méthode générale de Cauchy, sous la forme de la première métode de Poisson [11] ont pu être appliquées aussi dans le cas du problème mixte du premier type, quoiqu'elles fussent établies initialement pour le milieu illimité. La méthode des caractéristiques peut être utilisée de même dans le cas du problème mixte du deuxième type, à cause de la linéarité de l'équations de d'Alembert, et par conséquent de la possibilité de superposer les solutions relatives à des conditions non-homogènes seulement à une seule limite. Dans ce dernier cas la solution a la forme d'une somme de termes, en fonction des phases de l'évolution du phénomène [9].

Remarquons aussi, relativement au problème mixte du deuxième type, le procédé de Tcharnyi [12], analogue à celui de la séparation des variables, qui utilise la représentation des fonctions, donnant les valeurs aux limites, par les intégrales Fourier de leurs fonctions spectrales. Nous observons encore que le problème mixte du deuxième type pour l'équation homogène de d'Alembert peut être reduit à un problème mixte du premier

type relativement à une équation non-homogène, en ajoutant à la fonction inconnue une fonction déterminée à l'aide des conditions aux limites [9].

Dans les cas pratiques, comme on verra plus loin quand nous formulerons exactement le problème du coup de bélier sous son aspect le plus général, les deux problèmes interviennent simultanément en diverses phases du phénomène. Nous désignons ce problème mixte composé, du troisième type, sa correctitude étant due à la linéarité du d'alembertien et aux observations susmentionnées.

d. Dans la théorie des équations aux dérivées partielles on rencontre, à côté du problème de Cauchy, un autre problème de contour essentiellement distinct du premier, le problème de Dirichlet [13]. Ce problème est spécifique aux équations du type elliptique, où l'unicité des solutions et leur continuité, par rapport aux données de contour, sont assurées par la propriété des solutions d'avoir leur maximum ou minimum sur la frontière du domaine de définition. On a étudié depuis longtemps le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles du type hyperbolique, et on a montré en divers cas particuliers qu'il n'est pas correctement posé [14] [8] [15].

Dans le cas des potentiels soniques complexes on peut voir aisément que le problème de Dirichlet n'est pas possible en général. On peut déduire l'expression d'un potentiel sonique dans un point z de l'intérieur du domaine D, limité par la courbe jordanienne C, de la formule intégrale de Pompeiu (1.21) en tenant compte des relations (1.16) et (1.2).

$$\pi(z,\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\pi(\zeta,\bar{\zeta})}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{y'_x(\zeta_\sigma)}{\zeta_\sigma - z}\,d\sigma.$$

Nous observons que le premier terme du deuxième membre de cette identité est représenté par une intégrale de contour qui résoudrait en principe*) le problème de Dirichlet, mais le deuxième introduit l'empreinte de son insolubilité.

e. Parmi les méthodes directes, avec des grandes possibilités pratiques d'application, qui permettent toujours d'obtenir approximativement la solution numérique, il y a aussi la méthode des réseaux, connue encore en tant que méthode des différences finies ou de la relaxation. Elle fut proposée en 1925 par L. A. Lusternique pour les équations du type elliptique [16], et nous l'appliquerons ici pour les équations du type hyperbolique. Notons par :

$$y(x,\tau);\ y(x+\delta,\tau);\ y(x-\delta,\tau);\ y(x,\tau+\delta);\ y(x,\tau-\delta)$$

les valeurs d'une fonction sonique au centre (x, τ) et aux sommets d'un carré, dont les côtés sont parallèles aux caractéristiques et ont la longueur égale à $\delta\sqrt{2}$. En supposant que la fonction $y(x,\tau)$ a, dans le domaine D

*) On sait que la fonction définie par cette intégrale ne tend pas en général vers les valeurs admises initialement sur le contour.

considéré, des dérivées bornées jusqu'au quatrième ordre, nous avons d'après Taylor

$$y(x+\delta,\tau)=y(x,\tau)+\delta\cdot y'_x(x,\tau)+\frac{\delta^2}{2}y''_x(x,\tau)+\frac{\delta^3}{6}y'''_x(x,\tau)+$$
$$+\frac{\delta^4}{24}y^{IV}_x(\tilde{x},\tau)$$

$$y(x-\delta,\tau)=y(x,\tau)-\delta\cdot y'_x(x,\tau)+\frac{\delta^2}{2}y''_x(x,\tau)-\frac{\delta^3}{6}y'''_x(x,\tau)+$$
$$+\frac{\delta^4}{24}y^{IV}_x(\approx{x},\tau)$$

$$y(x,\tau+\delta)=y(x,\tau)+\delta\cdot y'_\tau(x,\tau)+\frac{\delta^2}{2}y''_\tau(x,\tau)+\frac{\delta^3}{6}y'''_\tau(x,\tau)+$$
$$+\frac{\delta^2}{24}y^{IV}_\tau(x,\tilde{\tau})$$

$$y(x,\tau-\delta)=y(x,\tau)-\delta\cdot y'_\tau(x,\tau)+\frac{\delta^2}{2}y''_\tau(x,\tau)-\frac{\delta^3}{6}y'''_\tau(x,\tau)+$$
$$+\frac{\delta^4}{24}y^{IV}_\tau(x,\approx{\tau}),$$

où

$$x<\tilde{x}<x+\delta$$
$$x-\delta<\approx{x}<x,$$

et pareillement pour $\tilde{\tau}$ et $\approx{\tau}$.

On voit aisément que pour un réseau suffisamment fin on peut négliger les termes en δ^4, et l'équation $\underset{x,\tau}{\square}\, y=0$ est équivalente à l'égalité

$$y(x+\delta,\tau)+y(x-\delta,\tau)=y(x,\tau+\delta)+y(x,\tau-\delta). \tag{2.9}$$

Cette relation nous suggère l'aspect spécifique du réseau, qui se présente dans ce cas comme dans la fig. 7. Sa particularité permet d'effectuer le calcul d'un seul passage, la première approximation déterminant complètement et définitivement les valeurs cherchées. En considérant premièrement le cas du milieu limité, nous observons que la méthode résout le problème mixte combiné (du type I+II), sous la forme la plus générale, c'est-à-dire on doit connaître les données du contour dans les points noircis et hachurés. Les dernières valeurs peuvent être aisément calculées en connaissant la dérivée normale $\frac{\partial y}{\partial \tau}(x,0)$ au moment initial. Il est à remarquer, que le segment $[0,\ l]$ doit être partagé en un nombre entier de portions $n=\frac{l}{2\delta}$. De même on voit que le problème de Dirichlet est possible pour un contour rectangulaire, dont le rapport des côtés a la forme $\frac{l}{\tau}=\frac{2n}{2m+1}$, n et m étant des nombres entiers.

La méthode des réseaux, présentée plus haut, s'applique dans le cas du milieu illimité pour les conditions initiales de Cauchy. La solution s'obtient exclusivement dans le triangle caractéristique, lorsqu'on donne les valeurs initiales seulement sur sa base.

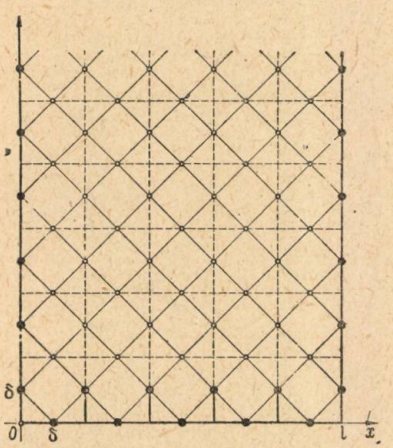


Fig. 7.

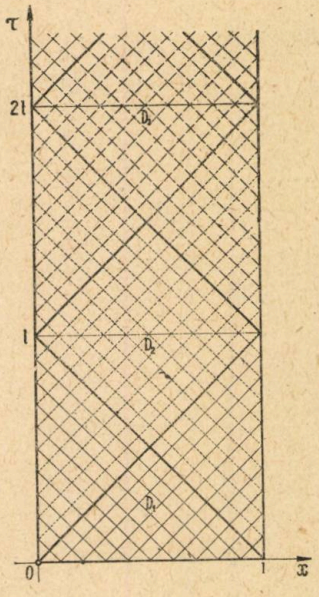


Fig. 8.

f. Dans la suite, nous présentons une autre méthode directe, qui permet de trouver analytiquement la solution exacte, dans le cas du problème mixte du troisième type. Nous la désignons méthode des caractéristiques, parce qu'elle est basée sur la propriété des caractéristiques (chap. I, 3, c, β) :

$$\begin{aligned} &y'_x - y'_\tau = C_1 = \text{const.}, \text{ sur une parallèle à la bissectrice I, et} \\ &y'_x + y'_\tau = C_2 = \text{const.}, \text{ sur une parallèle à la bissectrice II.} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Elle nous permet de déterminer dans le domaine entier D les valeurs des dérivées partielles y'_x et y'_τ, et donc la solution par une intégration d'une différentielle totale exacte, par conséquent indépendante du chemin

$$y(x, \tau) = y_1(\tau) + \int_0^x y'_x(x', \tau)\, dx' = y_0(x) + \int_0^\tau y'(x, \tau')\, d\tau'. \tag{2.11}$$

On devra calculer les dérivées partielles successivement dans les sous-domaines D_1, D_2,..., D_n,... du domaine D (fig. 8). Dans la première étape nous déterminos $y'_x(0, \tau)$ et $y'_x(l, \tau)$ pour $0 \leqslant \tau \leqslant l$:

$$y'_x(l, \tau) = y'_0(l - \tau) - Y_0(l - \tau) + y'_2(\tau)$$

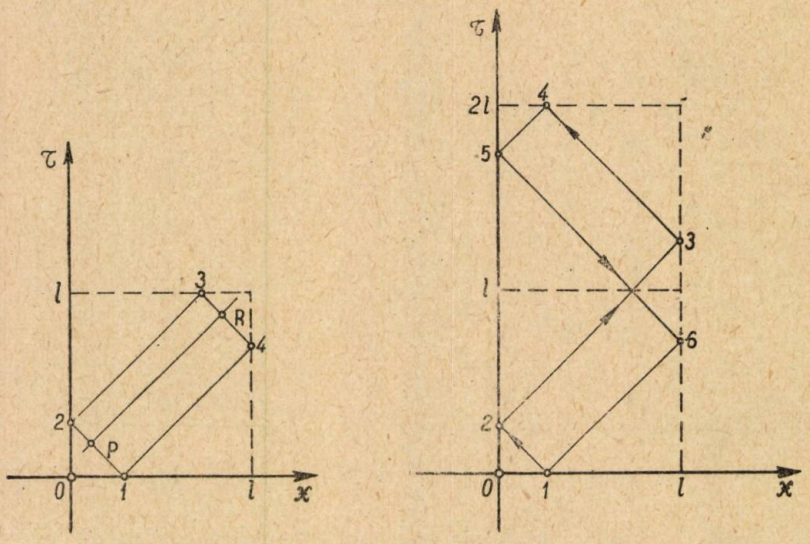
$$y'_x(0, \tau) = y'_0(\tau) + Y_0(\tau) - y'_1(\tau),$$

et les dériveés partielles dans le domaine D_1, le triangle caractéristique du point $(1+i)\ l/2$:

$$y'_x = \frac{C_1 + C_2}{2}; \qquad y'_\tau = \frac{C_2 - C_1}{2},$$

où, avec (2.6).

$$C_1 = y'_0(\mu) - Y_0(\mu); \qquad C_2 = y'_0(\nu) + Y_0(\nu). \tag{2.13}$$



a) Fig. 9. b)

Ainsi nous connaissons les valeurs des constantes C_1 et C_2 de l'étape suivante. Dans la n-ième étape du calcul nous déterminons, pour $(n-1)\,l \leqslant \tau \leqslant nl$, les valeurs :

$$y'_x(l, \tau) = y'_x(0, \tau - l) - y'_1(\tau - l) + y'_2(\tau)$$

$$y'_x(0, \tau) = y'_x(l, \tau - l) + y'_2(\tau - l) - y'_1(\tau).$$

Les expressions des dérivées partielles en D_n ont la même forme (2.11), dans laquelle

$$\begin{aligned} C_1 &= y'_x(0, -\mu) - y'_1(-\mu) = y'_x(l, l-\mu) - y'_2(l-\mu) \\ C_2 &= y'_x(0, \nu) + y'_1(\nu) = y'_x(l, \nu - l) + y'_2(\nu - l). \end{aligned} \tag{2.14}$$

A l'aide des mêmes relations (2.10) on peut déterminer, seulement par sommation algébrique, les valeurs de la fonction $y(x, \tau)$ pour $\tau = nl$, n-nombre naturel. Soit 1, ... 4 un rectangle, ayant les côtés parallèles aux caractéristiques (fig. 9, a). La variation de la fonction y sur $\overline{12}$ et sur $\overline{43}$ est la même, car sa dérivée calculée dans la direction $\overline{12}$, en n'importe quel point de la caractéristique $P\,R$, a la même valeur

$\frac{dy}{ds} = y'_x - y'_\tau = \text{const}$. Donc $y_2 - y_1 = y_3 - y_4$, ou encore $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$,

et par conséquent on aura :

$$y_3 = y(x, l) = -y_0(l-x) + y_1(l-x) + y_2(x) \qquad (2.15)$$

En général pour n'importe quel contour polygonal, inscrit dans le domaine D, ayant les côtés parallèles aux caractéristiques (fig. 9 b), en conservant un sens de parcours dans le numérotage des sommets, nous aurons :

$$\Sigma y_p = \Sigma y_i, \qquad (2.16)$$

où y_p et y_i sont les valeurs de la fonction aux sommets paires respectivement impaires.

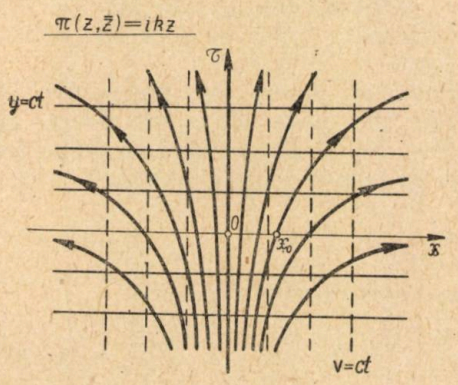


Fig. 10. Détente sonique.

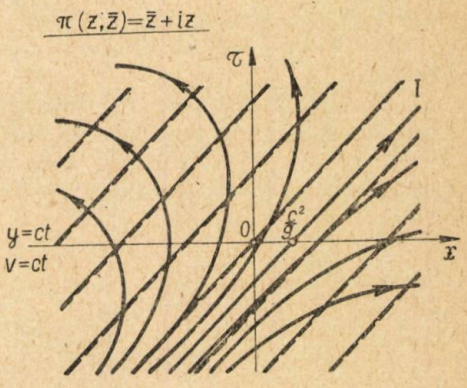


Fig. 11. Onde plane directe.

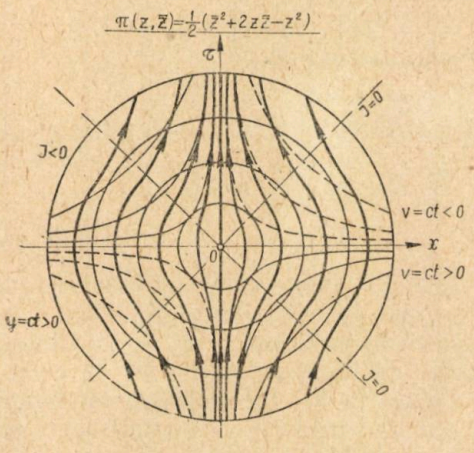


Fig. 12. Oscillation simple.

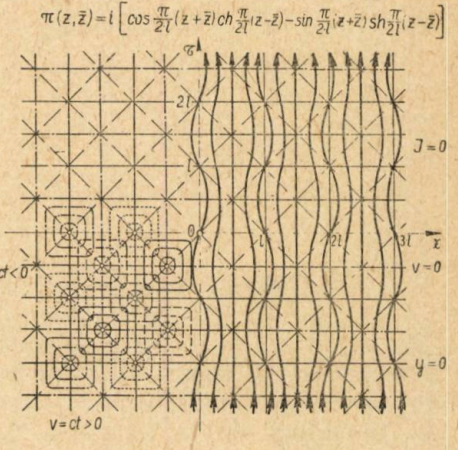


Fig. 13. Onde périodique.

3. Dans la suite nous donnons comme exemple quatre spetres de mouvements non-permanents et unidimensionnels, definis par des potentiels complexes

CHAPITRE III

1. Nous approfondons maintenant l'étude des mouvements non-permanents qui ont lieu dans une conduite, munie à l'un de ses bouts d'une vanne, dont l'ouverture diminue en temps d'après une loi quelconque, et à l'autre d'un réservoir assez grand. Nous nous rapporterons spécialement au phénomène du coup de bélier, dont l'intéret est relevé par l'importance de ses applications dans l'hydraulique pratique et surtout dans l'hydrotechnique. Ce phénomène se produit a la fermeture relativement rapide de la vanne, ce qui entraîne l'arrêt de la masse entière du fluide dans la conduite. Il a été étudie par de nombreux et très variés procédés analytiques et graphiques, parmi lesquels nous citons: les travaux de Joukovsky (1898) [17], la méthode du système d'équations récurrentes d'Alliévi (1901) [18], les constructions graphiques de Bergeron (1931) [19], la méthode des différences finies de Morozov (1934) [20] etc.

2. L'étude intime du développement en temps du phénomène du coup de bélier, impose la considération des deux effets physiques, qui décident sur les conditions aux limites, et de l'approfondissement desquels dépend la résolution correcte du problème général proposé.

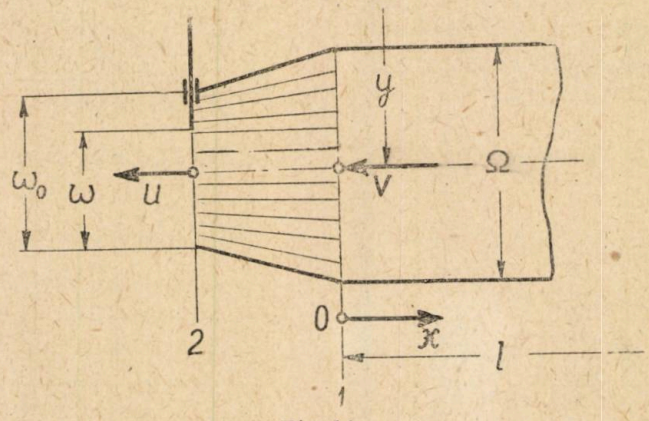


Fig. 14.

a. Le premier effet se produit dans le tronçon relativement court, qui relie le début de la conduite (la section 1) à la vanne (la section 2) (fig. 14). Il s'agit d'étudier la variation de la pression, voire de la vitesse, dans la section initiale 1 d'une conduite de longuer infinie et de caractéristiques constantes, en supposant connue la loi de variation en temps de l'ouverture de la vanne $\omega(t)$. Dans ce tronçon le mouvement est supposé avoir lieu dans les circonstances particulières suivantes:

— le tronçon 1—2 este horizontal, ou la pesanteur du fluide n'influence pas l'écoulement,
— le mouvement est unidimensionnel,
— le fluide est incompressible,

— on néglige les pertes de charge linéaires et locales, et
— à chaque moment le mouvement est supposé permanent, en négligeant de l'équation de Bernoulli le terme $\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\, ds$.

En ce qui concerne ce premier effet, nous donnons deux lois de variation de la pression outre la loi d'Alliévi, qui nous servira de comparaison.

α) De la première équation du sytème d'équations récurentes d'Alliévi, on a :

$$\zeta^2 - 1 = 2W(1 - \psi\zeta), \tag{3.1}$$

où par exemple, on a supposé : $\omega_0 = \Omega$, donc $\zeta_0 = \psi_0 = 1$, $\zeta^2 = \frac{y}{y_0}$, $\psi(t) = \frac{\omega(t)}{\Omega}$ — la fonction arbitraire de la fermeture de la vanne, et $W = \frac{cv_0}{2gy_0} = \frac{\varrho c v_0}{2p_0}$ — la constante d'Alliévi. Remarquons tutefois, que dans ce cas $\omega_0 = \Omega$, la constante d'Alliévi est l'inverse du nombre de Mach $W_0 = \frac{c}{v_0} = \frac{1}{M_0}$. Ainsi, de l'équation (3.1) on obtient

$$\zeta = -W_0\psi \pm \sqrt{W_0^2\psi^2 + 1 + 2W_0} = \sqrt{\frac{y}{y_0}},$$

et en prenant le signe positif devant le radical, puisqu'on ne peut pas dépasser le saut maximum

$$y_{max} - y_0 = Y_0 = \frac{cv_0}{g}, \tag{3.2}$$

il résulte

$$\frac{y}{y_0} = 1 + 2W_0 + 2W_0\psi(W_0\psi - \sqrt{1 + 2W_0 + W_0^2\psi^2}). \tag{3.3}$$

À cause des relations

$$y - y_0 = F(t)$$

$$v - v_0 = -\frac{g}{c}F(t), \tag{3.4}$$

qui sont valables dans le cas du coup de bélier direct, pour la section 1 de la conduite, nous déduisons de même la variation de la vitesse pendant la fermeture

$$\frac{v}{v_0} = \psi(\sqrt{1 + 2W_0 + W_0^2\psi^2} - W_0\psi). \tag{3.5}$$

β) La première méthode, que nous proposons tient compte, dans le tronçon 1—2, du terme cinétique $\frac{v^2}{2g}$, négligé dans la méthode d'Alliévi. Ainsi, d'après Bernoulli nous avons

$$y+\frac{v^2}{2g}=\frac{u^2}{2g}, \tag{3.6}$$

et l'équation de la continuité du milieu fluide nous donnne

$$\psi(t)=\frac{\omega(t)}{\Omega}=\frac{v}{u}. \tag{3.7}$$

De (3.7), (3.6), (3.4), et en tenant compte de (3.2), nous obtenons enfin :

$$\frac{y}{y_0}=1+2W_0+2W_0\frac{\psi}{1-\psi^2}\left[W_0\psi-\sqrt{W_0^2\psi^2+2W_0(1-\psi^2)+(1-\psi^2)}\right] \tag{3.8}$$

$$\frac{v}{v_0}=\frac{\psi}{1-\psi^2}\left[\sqrt{W_0^2\psi^2+2W_0(1-\psi^2)+(1-\psi^2)}-W_0\psi\right].$$

γ) La deuxième méthode proposée essaie de corriger les valeurs de la vitesse et de la pression du mouvement permanent du tronçon 1—2, par une succesion infinie de corrections. Son rôle est de relever sous une autre forme le terme $\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\,ds$ de l'équation de Bernoulli pour le mouvement non-permanent, qui a été négligé pour le tronçon.

Supposons établi le mouvement permanent du fluide dans une conduite assez longue. Alors pour $\psi_0=\frac{\omega_0}{\Omega}=1$, nous $u_0=\sqrt{2g\,y_0}=v_0$. En réduisant maintenant un peu l'ouverture de la vanne à $\omega=\psi\omega_0$, nous supposerons pour le moment que la vitesse u_0, à la sortie de la vanne, reste constante, mais dans la section 1 de la conduite la vitesse v_0 baisse, à cause de la loi de continuité du fluide, à la valeur $v_1=\psi u_0$. Ce décroissement de la vitesse donne naissance dans la section 1 de la conduite à un augmentation de pression $\Delta y_1=-\frac{c}{g}(v_1-v_0)$, qui devra se propager le long de la conduite vers le réservoir avec la vitesse du son, parce que le fluide est considéré compressible dans la conduite. dès la section 1. Mais, supposons pour le moment le temps arrêté, et voyons qui se passe encore dans le tronçon 1—2. En supposant ce tronçon assez court, cette surpression changera la vitesse u_0 de la manière suivante :

$$u_1=\sqrt{2g(y_0+\Delta y_1)}.$$

La vitesse u_1 à la sortie de la vanne entraînera, par la continuité du fluide, une nouvelle vitesse dans la section 1 de la conduite $v_2=\psi u_1$,

qui donnera une nouvelle variation de pression, et ainsi de suite. Pour la n-ième étape, les formules de récurrence sont :

$$\begin{aligned} v_n &= \psi\, u_{n-1} \\ \Delta y_n &= \frac{c}{g}(v_{n-1} - v_n) \\ u_n &= \sqrt{2g\left(y_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i\right)} \approx u_0\left(1 + \frac{g}{u_0^2}\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i\right)^{*)}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

d'où on obtient aisément :

$$\begin{aligned} v_n &= \psi\, v_0\left\{1 + W_0(1-\psi)\left[1 + \sum_{i=1}^{n-2}(-W_0\,\psi)^i\right]\right\} \\ \Delta y_n &= \frac{cu_0}{g}(1-\psi)\,(-W_0\,\psi)^{n-1} \\ u_n &\approx u_0\left\{1 + W_0(1-\psi)\left[1 + \sum_{i=1}^{n-1}(-W_0\,\psi)^i\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

En considérant la série infinie des corrections, pour $n \to \infty$, nous obtenons les valeurs $y = y_\infty$ et $v = v_\infty$ de la pression et de la vitesse au commencement de la conduite (section 1), quand on a varié la fermeture de la vanne de la valeur ψ_0 à la valeur ψ. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{y}{y_0} &= 1 + 2W_0\frac{1-\psi}{1+W_0\,\psi} \\ \frac{v}{v_0} &= \psi\frac{1+W_0}{1+W_0\,\psi}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dans la figure 15 nous avons représenté comparativement les valeurs données par ces trois méthodes, en utilisant comme critérium de comparaison le nombre de Mach, calculé pour le mouvement permanent au commencement de la fermeture de la vanne. Il est à remarquer, que les différences des valeurs données par les trois méthodes diminuent en même temps que les valeurs du nombre de Mach, de façon que pour le cas usuel des conduites forcées, elles ne sont trop grandes. En vue d'estimer les différences entre les pressions maximums fournies par la loi d'Alliévi et notre deuxième loi, dont les valeurs sont les plus écartées, appliquées au mêmes cas d'un coup de bélier tout entier et correspondant au nombre de Mach, $M_a = 0{,}1$, qui est assez grand, nous avons obtenu les résultats représentés par les courbes de la figure 16. La différence maximum des pressions atteint en ce cas extrême vingt-trois pour cent. Remarquons encore, que pour obtenir la solution dans le cas de notre deuxième loi de

*) Nous avons considéré seulement les deux premiers termes du développement du radical, si tant est que les variations de pression Δy_i sont assez petites.

variation des pressions, nous avons dû utiliser la méthode des caractéristiques, une autre méthode quelconque étant impropre à ce calcul, vu sa particularité.

b. Le deuxième effet consiste dans le mode de réflexion, aux extrémités de la conduite, des ondes de pression, qui se propagent avec la vitesse du son le long de la conduite. Le résultat de cette réflexion est

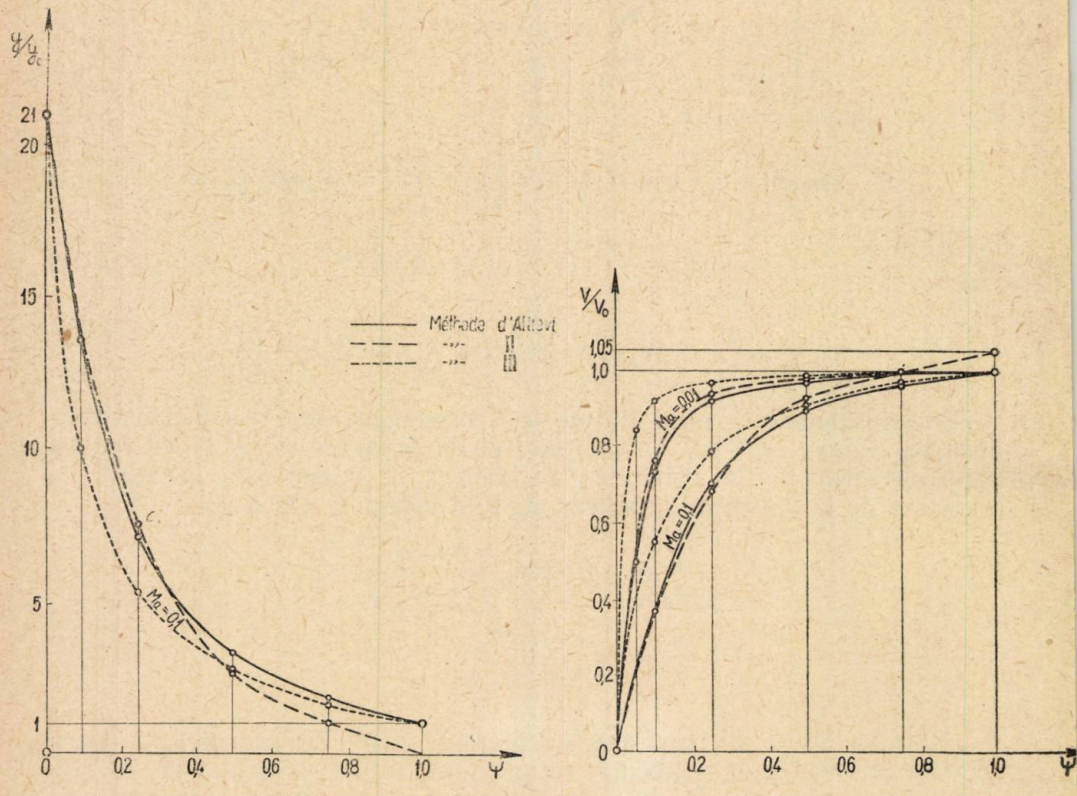


Fig. 15.

exprimé par le rapport entre la surpression de l'onde réfléchie et celle de l'onde incidente, nommé coefficient de réflexion et désigné par $\mu(\omega)$. Celui-ci est une fonction continue et monotone de la section d'ouverture de la vanne ω, ayant la valeur -1 à l'extrémité ouverte de la conduite (au réservoir) et $+1$ au début de la conduite (à la vanne fermée). On peut supposer par des considérations physiques, que la dérivée $\mu'(\omega)$ est aussi une fonction continue.

Remarquons toutefois, que pour les conduites forcées de haute chute on a sensiblement $\mu \approx 1$ à la vanne, ce qui est d'ordinaire supposé, mais qui constitue une vraie approximation en d'autres cas de coups de bélier.

3. Eu égard à ces considérations, on peut établir aisément les conditions de contour au cas du problème mixte du troisième type, en se donnant la loi temporelle de fermeture de la vanne, et en considérant le

schéma simple, selon lequel apparaissent les ondes réfléchies aux deux extrémités de la conduite.

Évidemment nous nous rapporterons au coup de bélier indirect $\left(t_i > t_r = \frac{2l}{c}\right)$ et pour plus grande généralité du schéma hydraulique proposé (réservoir — conduite — vanne), nous admettrons par exemple la variation en temps du niveau d'eau au réservoir selon une loi quelconque $y_2(\tau)$ imposée par le fonctionnement de l'installation extérieure, ce qui présente de même un certain intérêt pratique.

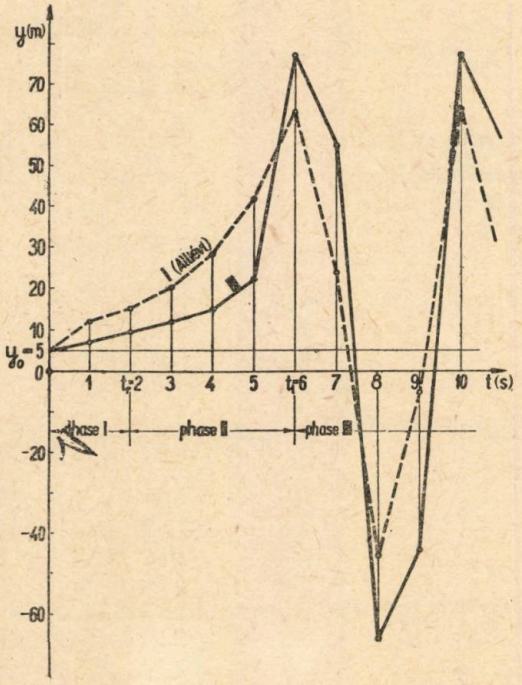


Fig. 16.

Nous supposons encore, que jusqu'à la manoeuvre de la vanne, il y a dans la conduite un mouvement permanent de vitesse v_0 et pression y_0, mais nous remarquons que le calcul peut s'effectuer plus simplement avec les surpressions, en considérant la valeur y_0 comme une constante additive.

On peut diviser rationnellement le phénomène du coup de bélier susmentionné en trois phases distinctes :

a. Dans la première phase $(0 < \tau < l)$, outre la loi de variation du niveau au réservoir $y_2(\tau)$ on doit considérer la variation de la pression à la vanne $y_1(\tau)$ qui résulte de la loi de sa fermeture, le problème posé étant un problème mixte du deuxième type, à une constante près.

b. Dans la deuxième phase $(l < \tau < \tau_i = ct_i)$ on obtient les valeurs initiales $y_0(x,l)$ et $h_0(x,l)$ de la résolution de la première phase. Au réservoir la loi de variation de la pression $y_2(\tau)$ demeure valable plus loin, parce

que toutes les ondes de surpression se réflètent ici en changeant de signe et en conservant la valeur absolue, et donc la résultante de l'onde incidente et de celle réfléchie $[1 + \mu_2(\tau)]\ y_i(\tau)$ est égale à zéro, puisque $\mu_2(\tau) = -1$. A la vanne on doit superposer la variation de la pression causée par la fermeture de la vanne $y_1(\tau)$ avec toutes les ondes incidentes et leurs réfléchies, dont les résultantes diffèrent de zéro. La deuxième phase pose en ces conditions de contour un problème mixte combiné du troisième type.

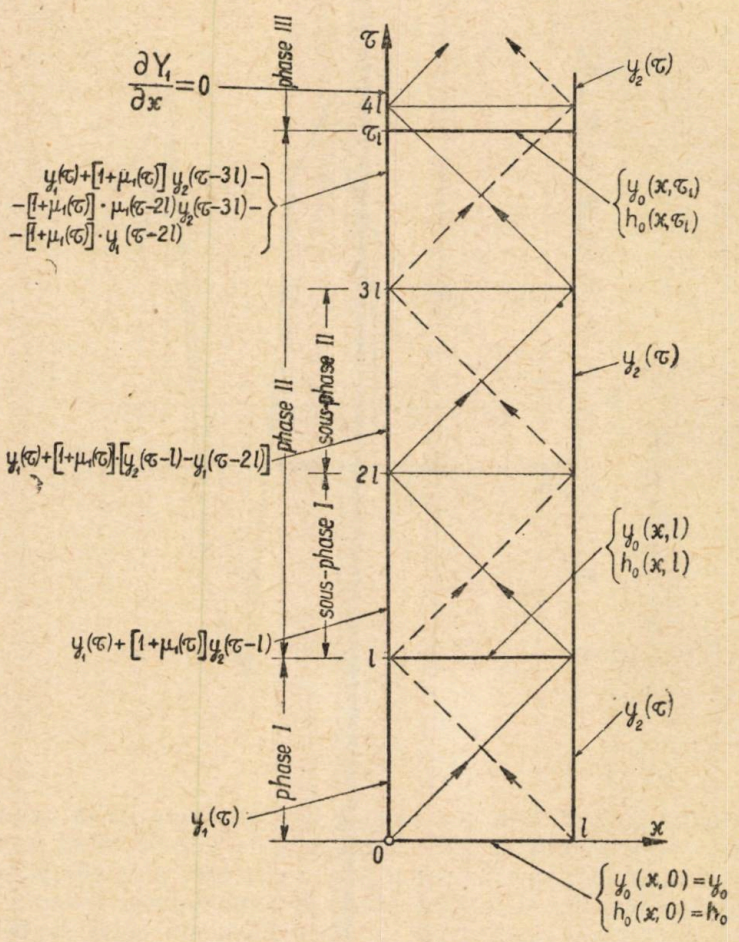


Fig. 17.

c. Dans la troisième phase du phénomène du coup de bélier indirect ($\tau > \tau_i$) on a : au réservoir la même fonction $y_2(\tau)$, comme valeurs initiales $y_0(x, \tau_i)$ et $h_0(x, \tau_i)$ calculées de la dernière sous-phase de la deuxième phase, et à la vanne fermée $y_1(\tau) = \frac{cv_0}{g} = \text{const.}$ et $\mu_1(\tau) = 1$, donc $\frac{\partial Y_1}{\partial x} = 0$, $Y_1(\tau)$ étant la valeur totale de la pression à la vanne. Dans

cette phase il s'agit de nouveau d'un problème mixte combiné du type I+II.

Dans la figure synoptique 17 on voit les données de contour pour un coup de bélier indirect quelconque.

4. Pour prouver la correctitude des données de contour, considérées de la manière que nous ayons exposée plus haut, nous avons calculé par la méthode des caractéristiques (chap. II, 2, f) un tel coup de bélier, le phénomène étant supposé en toute sa complexité susmentionnée. Nous avons cherché seulement la répartition des pressions le long de la conduite aux moments $\tau = nl$ (n — nombre entier). Cette répartition, vu la relation (2.15) et les figures 17 et 18, a la forme suivante :

$$y_0^n(x) = y(x, nl) = -y_0^{n-1}(l-x) + Y_1(\tau) + y_2[(n-1)l + x], \quad (3.12)$$

où $Y_1(\tau)$ est la valeur de la pression à la vanne dans la sous-phase $n-1$ de la phase II, et qui diffère d'une sous-phase à l'autre par l'adjonction d'une nouvelle onde réfléchie qui vient du résservoir, en provenant alternativement de la surpression $y_1(\tau)$ ou $y_2(\tau)$ de la phase I. La valeur de $Y_1(\tau)$ peut être trouvée en totalisant les premiers termes nécessaires de la suite suivante :

$$\begin{aligned}
Y_1(\tau) = {} & y_1(\tau) + && \text{pour } 0 < \tau < l \\
& + [1+\mu_1(\tau)] \cdot y_2(\tau - l) - && \text{pour } l < \tau < 2l \\
& - [1+\mu_1(\tau)] \cdot y_1(\tau - 2l) - && \text{pour } 2l < \tau < 3l \\
& - [1+\mu_1(\tau)] \cdot \mu_1(\tau - 2l) \cdot y_2(\tau - 3l) + && \text{pour } 3l < \tau < 4l \\
& + [1+\mu_1(\tau)] \cdot \mu_1(\tau - 2l) \cdot y_1(\tau - 4l) + && \text{pour } 4l < \tau < 5l \\
& + [1+\mu_1(\tau)] \cdot \mu_1(\tau - 2l) \cdot \mu_1(\tau - 4l) \cdot y_2(\tau - 5l) - && \text{pour } 5l < \tau < 6l \\
& - [1+\mu_1(\tau)] \cdot \mu_1(\tau - 2l) \cdot \mu_1(\tau - 4l) \cdot y_1(\tau - 6l) - && \text{pour } 6l < \tau < 7l \\
& - [1+\mu_1(\tau)] \cdot \mu_1(\tau - 2l) \cdot \mu_1(\tau - 4l) \cdot \mu_1(\tau - 6l) \cdot \\
& \cdot y_2(\tau - 7l) + \text{etc.} && \text{pour } 7l < \tau < 8l
\end{aligned}$$

Les courbes de la variation de la pression de cet exemple numérique sont représentées dans la figure 19 et ont été calculées pour les valeurs et dans les hypothèses simplificatrices suivantes :

$$\begin{aligned}
l &= 500 \text{ m} & Y_0 &= \frac{cv_0}{g} = 510 \text{ m} \\
c &= 500 \text{ m/s} & V_0 &= \sqrt{2g\,y_0} = 40 \text{ m/s} \\
v_0 &= 10 \text{ m/s} & y_2(\tau) &= 10\,\tau/\tau_i \text{ m} \\
y_0 &= 80 \text{ m} & \frac{\omega}{\Omega} &= \frac{v_0}{V_0}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_i}\right) \\
t_r &= 2 \text{ s} & \mu_1(\omega) &= 1 - 2\omega/\Omega \\
t_i &= 4 \text{ s} & y_1(\tau) &= Y_0\ \tau/\tau_i \text{ m},
\end{aligned}$$

mais, ceci ne diminuant pas la généralité d'application de la méthode des caractéristiques. A l'aide de cet exemple nous avons vérifié la correctitude de la mise des données aux limites, parce que nous avons prouvé par le

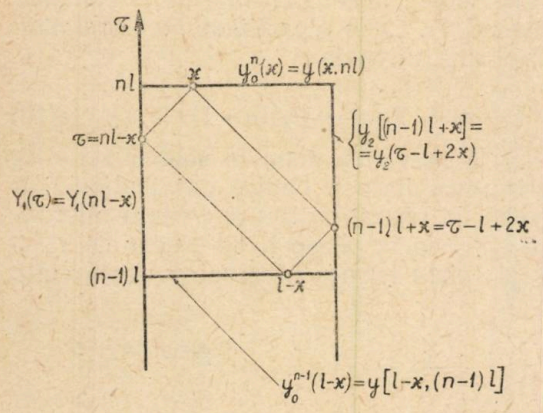


Fig. 18.

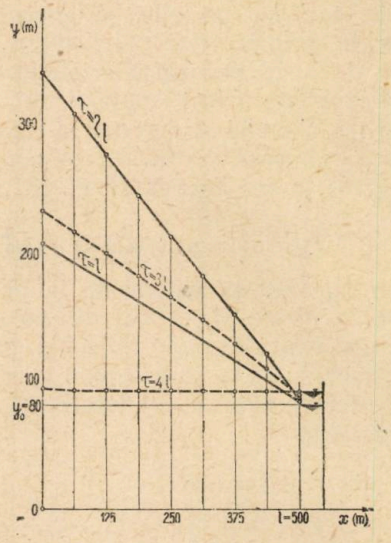


Fig. 19.

calcul exact la loi de variation de la pression $y_2(\tau)$, imposée au réservoir, et la périodicité du phénomène du coup de bélier dans la phase III, donc la valeur de la période $T=2t_r$, et la condition de variation de la pression à la vanne $\frac{\partial Y_1}{\partial x}=0$.

L'avantage de cette méthode, comparée à celle d'Alliévi et aux autres, est de fournir la solution tout le long de la conduite, non seulement à la vanne, ainsi que la possibilité de traiter des cas plus complexes, quand aux conditions de contour, d'une manière générale et simple du point de vue du calcul. Remarquons encore, que lorsqu'il s'agit de trouver la variation de la pression seulement à la vanne ($x=0$), on obtient un nombre double de points, qué celui obtenu par la méthode d'Alliévi, le calcul se simplifiant encore plus. Enfin, nous voyons que cette manière de considérer chaque onde séparément, et non pas les deux groupes d'ondes directes $F(t)$ et d'ondes indirectes $f(t)$, s'avère par la suite fertile en contributions utiles à l'approfondissement du phénomène du coup de bélier, intéressant par lui même, ainsi que par ses applications techniques.

La dissertation a été effectuée sous la direction scientifique du Prof. Dr. Ing. D. Dumitrescu, membre correspondant de l'Académie de la R.P.R., et présentée publiquement au 13 Juin 1957 à la séance du Conseil Scientifique de la faculté d'Électrotechnique et d'Énergétique.

Le laboratoire d'Hydraulique
Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *B. Riemann* — Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Göttingen Nachrichten, t. VIII, 1860.
2. *G. Calugareano* — Sur les fonctions polygènes d'une variable complexe (thèse). Gauthier-Villars, Paris 1928.
3. *E. Kasner* — A new theory of poligenic functions. Science V. 66, 1927.
4. *S. Stoïlow* — Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Gauthier-Villars, Paris, 1938
5. *D. Pompeiu* — Sur une classe de fonctions d'une variable complexe Rendiconti del C. Mat. di Palermo, t. 33, 1912.
6. *D. Pompeiu* — Sur une classe de fonctions d'une variable complexe, et sur certaines équations intégrales. Rendiconti del C. Mat. di Palermo, t. 35, 1913.
7. *Gr. Moisil, M. Roșculeț, C. Drîmbă...* — Travaux relatifs aux fonctions monogènes de variable hypercomplexe, recensés dans le I-er volume des rapports présentés au VI-ème Congrès des Mathématiciens Roumains de 1956. (Écuations différentielles et à dérivées partielles, chap. II, c, § 7, p. 206—217.
8. *R. Courant u. D. Hilbert* — Methoden der mathematischen Physik, t. II, Berlin — Springer, 1924.
9. *А. Н. Тихонов* и *А. А. Самарский* — Уравнение математической физики. Гостехтеориздат, Москва, 1953.
10. *Ph. Frank u. R. Mises* — Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, zweiter Teil, Braunschweig, 1927.
11. *А. Н. Крылов* — О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Гостехтеориздат, Москва-Ленинград, 1950.
12. *И. А. Чарный* — Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехтеориздат, Москва-Ленинград, 1950.
13. *J. Hadamard* — Équations aux dérivées partielles. Les conditions définies en général. Le cas hyperbolique. Revue de l'Enseignement Mathématique, 1936.
14. *J. Hadamard* — Le problème de Dirichlet dans le cas hyperbolique. Intérmediaire des Recherches Mathématiques. Paris, 1947
15. *M. Ghermănescu* — Le problème de Dirichlet pour les équations de types hyperbolique. Communication au IV-ème Congrès des Mathématiciens Roumains. Bucarest, 1956.
16. *И. Г. Петровский* — Лекций об уравнениях с частными производными. Гостехтеориздат, Москва-Ленинград, 1950. с. 276.
17. *Н. Е. Жуковский* — О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. Собрание сочинении, т. III, Гостехтеориздат, Москва-Ленинград, 1949.
18. *L. Alliévi* — Théorie générale du mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite. Dunoud, Paris 1904.
19. *L. Bergeron* — Variations de régime dans les conduites d'eau. Revue générale de l'Hydraulique, Nr. 1/2, 1935.
20. *А. А. Морозов* — Использование водной энергии. Госэнергоиздат, Ленинград, 1948.

ОДНОМЕРНЫЕ И НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ, В СЛУЧАЕ МАЛЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ДАВЛЕНИЯ, С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ УДАРЕ

(Краткое содержание)

В этой работе рассматриваются система с частными производными (0.1), с теоретической и практической точки зрения, со специальными соображениями относительно гидравлического удара.

В первой главе, система (0.1) присоединяются полигенным функциям комплексного переменного, так называемым звуковыми функциями (1.3). Здесь изучаются местные и общие свойства этих функций, а также реальных звуковых функций $y(x, \tau)$ и $h(x, \tau)$.

Эти свойства служат, во второй главе, для изучения различных методов, дающих комплексное и в особенности реальное решение в случае ограниченной и неограниченной среды. В этих исследованиях обращается внимание на правильную постановку задачи, особенно в случае ограниченной среды, где рассматриваются три возможные контурные задачи смешанного типа.

Высшая теория приводит в третьей главе, к оригинальной разработке гидравлического удара, дающего возможность решения более сложных случаев, которых нельзя решать существующими методами, по причине особенностей их строения. Здесь изучаются также закон изменения давления, и следовательно скорости, на конце трубопровода, когда известен закон закрытия затвора. Одновременно предлагаютса два метода, результаты которых равнятся результатам полученным по методу Аллиеви.

NON-PERMANENT, ONE-DIMENSIONAL MOTIONS OF COMPRESSIBLE FLUIDS IN THE CASE OF SMALL PRESSURE VARIATIONS, WITH APPLICATION TO THE WATER-HAMMER.

(Summary)

The work studies the system with partial derivatives (0.1), from a theoretical and practical point of view, taking into account especially the water-hammer.

In the first chapter, to the system (0.1), are associated the poligenic functions of complex variable (1.3), which are called by the author „sonic functions". The local and general properties of these functions, as well as of the real sonic functions $y(x, \tau)$ and $h(x, \tau)$ are examined hereafter.

These properties are applied, in the second chapter, to the study of different methods which give the complex and particularly the real solutions, for the case of a limited and unlimited medium. In this research, a special attention is paid to a correct formulation of the problem, especially in the case of the limited medium, where the three different possible contour problems are considered.

The above theory allows an original treatment of the water-hammer phenomenon, and gives the possibility of solving more complicated cases,

which cannot be solved with the existent methods, because of their constructive peculiarities. The law of the pressure variation, and consequently of the velocity variation, at the end of a pipe-line is also examined, when the law of the valve-closing is given. For this purpose two methods are proposed, whose results are compared with those obtained by Allievi's method.

MOUVEMENTS UNIDIMENSIONNELS ET NON-PERMANENTS DES FLUIDES COMPRESSIBLES, DANS LE CAS DES PETITES VARIATIONS DE PRESSION, AVEC DES APPLICATIONS AU COUP DE BÉLIER.

(Résumé)

Dans ce travail, on étudie le système d'équations aux dérivées partielles (0.1) autant du point de vue théorique, que du point de vue des applications en général et surtout du phénomène du coup de bélier.

Dans le premier chapitre on a associé au système (0.1) les fonctions polygènes (1.3) de variable complexe qu'on a désignées du type sonique, en étudiant leur propriétés locales et générales, de même que pour les fonctions soniques réelles $y(x, \tau)$ et $h(x, \tau)$.

Dans le deuxième chapitre en se basant sur ces propriétés on étudie diverses manières d'obtenir la solution complexe et surtout réelle, en milieu fluide illimité et limité (dans les cas des trois problèmes mixtes de contour possibles), pour que le problème mathématique soit correctement posé. On donne aussi deux méthodes pour la résolution du problème mixte le plus général.

Dans le troisième chapitre on étudie le phénomène du coup de bélier d'une manière propre, qui permet de résoudre des cas plus complexes, qui ne peuvent être traites par les méthodes existantes, à cause de leur particularité. On étudie de même la loi de variation de la pression et de la vitesse à l'extrémité d'une conduite, quand on connait la loi de la fermeture de la vanne, en donnant deux méthodes dont on fait la comparaison à celle d'Alliévi.

EINDIMENSIONALE, INSTATIONÄRE BEWEGUNG KOMPRESSIBLER FLÜSSIGKEITEN BEI KLEINEN DRUCKÄNDERUNGEN, MIT ANWENDUNG AUF DEM WASSERSCHLAG.

(Zusammenfassung)

In vorliegender Arbeit untersucht der Verfasser das partielle Differentialgleichungssystem (0.1) von dem theoretischen als auch vom praktischen Standpunkte, mit besonderer Berücksichtigung des Wasserschlages.

Im ersten Abschnitt werden dem Gleichungssystem (0.1) die polygenen Funktionen einer komplexen Veränderlichen (1.3) zugeordnet, und

als „sonische Funktionen" bezeichnet. Die lokalen und globalen Eigenschaften dieser Funktionen, sowie auch die der reellen sonischen Funktionen $y(x, \tau)$ und $h(x, \tau)$ werden untersucht.

Diese Eigenschaften dienen im zweiten Abschnitt, für das Studium verschiedener Methoden, die es erlauben komplexe und besonders reelle Lösungen für begrenzte und unbegrenzte Flüssigkeiten zu erhalten. Bei diesen Untersuchungen wird eine streng mathematische Problemstellung beachtet, insbesondere im Falle der begrenzten Flüssigkeit, wo drei verschiedene Randwertprobleme vom gemischten Typus auftreten.

Die obige Theorie ermöglicht eine, im dritten Abschnitt entwickelte, originelle Behandlung des Wasserschlages, die es gestattet, auch kompliziertere Fälle zu lösen, bei welchen man die bisherigen Methoden, ihrer speziellen Bauart wegen, nicht anwenden kann. Die Variationsgesetze der Drücke und Geschwindigkeiten am Ende einer Rohrleitung, wenn das Schliessgesetz des Ventils bekannt ist, werden ebenfals untersucht. Hierzu werden zwei Berechnungsmethoden vorgeschlagen, deren Resultate mit denen von Allievi verglichen werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 3

CHIMIE ORGANICĂ

SIMPLIFIED METHOD FOR THE PREPARATION OF SODIUM HYDRIDE AND COMPLEX HYDRIDES DERIVED FROM IT

by COSTIN D. NENITZESCU and FLORIN G. BADEA

During the last years metallic hydrides are increasingly used as reducing agents in laboratory and industry. In all cases the reduction consists in a hydride ion transfer :

$$Me:H + >C=O \rightarrow >C(H)-\ddot{O}:^{-} + Me^{+}$$

The most widely used in such reactions is lithium aluminium hydride, described for the first time by A. E. Finholt, A. C. Bond and H. I. Schlesinger in 1947 [1]. Lithium aluminium hydride has become since then indispensable in the laboratory practice. An enormous literature is available [2] for the workers in this field.

Owing to the difficulties encountered in securing this reagent, it was necessary in our laboratory, to find a reducing agent, more available and similar at least in some respects with lithium aluminium hydride. Sodiumborohydride and some complex sodium aluminium hydrides appeared to be suitable. The starting material in preparing these complex hydrides is sodium hydride, a reagent which was obtained in large amounts in our laboratory by a simple method.

The first part of the present paper deals with the preparation of sodium hydride. A new simple method by which sodium hydride can be obtained in high yields and of 92% purity is described. The second part deals with the preparation of complex sodium hydrides and their use as reducing agents.

I. *The preparation of sodium hydride*

Sodium hydride is difficult to prepare. It can be obtained by the direct reaction between sodium and hydrogen [3] :

$$2\,Na + H_2 \rightleftarrows 2\,NaH$$

The hydrogen absorbtion begins at 200°C and increases with the increase of temperature. At higher temperatures sodium hydride decomposes in the two components and therefore it is necessary to work at higher pressures than the dissociation pressure of the hydride at the corresponding temperature.

Another drawback is that sodium hydride forms a film over metallic sodium preventing thus the completion of the reaction.

Sodium hydride reacts vigurously with water. In dry air it is stable but it decomposes quickly in moist air, the ignition of the material occuring as a result of the evolved heat reaction. Sodium hydride must be handled with great caution and working under inert atmosphere is recommended to prevent its ignition.

The first experiments performed in order to obtain sodium hydride were carried out in an iron tube [4]. The tube was heated at 600—650°C in an electrical oven. The method gave poor yields, sodium being quickly coated by sodium hydride.

Other attempts have been made to obtain sodium hydride at atmospheric pressure, using a fine dispersion of sodium in gasoline of b.p. 140°C. Hydrogen was bubbled in this dispersion at 115°C. The purity of the hydride thus obtained was low and the method was consequently abandoned.

It has been possible to modify and improve a method descriebed by K. Ziegler [5]. According to Ziegler's procedure, sodium hydride is prepared in an autoclave with magnetical stirring using a protective solvent; the raw material obtained after two hours' stirring at 225°C is finely powdered in a wet-mill under nitrogen atmosphere and reintroduced in the autoclave; the operations are repeated until the hydride contains no more sodium. It was stated that autoclaves with other systems of stirring were highly unsatisfactory. This method has the disadvantage of requiring a special apparatus.

It has been found in our laboratory that the reaction may take place in an autoclave with common stirring, the grinding of the material in a wet-mill being unnecessary and the reaction going to completeness after two hours' stirring.

This was brought about in the following manner. In an autoclave of stainless steel, sodium was suspended in cyclohexane. Some iron balls were introduced to ensure the grinding of the material during the reaction. Hydrogen was admitted at 150—200 at. and the autoclave was stirred two hours at 225°C. Sodium hydride, perfectly white, finely powdered and of 92% purity is thus obtained.

The sodium hydride slurry in cyclohexane can be stored in a well-stoppered flask without decomposing. It can be filtered, with special cautions, in air. If dry sodium hydride is needed, the use of an inert atmosphere is recommended. This method was applied successfully to the prepartion of lithium hydride. Lithum and aluminum suspended in ether give rise only to lithium hydride.

Some attempts have been made to use sodium hydride in the reduction of organic compounds. Methyl benzoate is not reduced by sodium hydride. However, if $AlCl_3$, $BF_3 \cdot Et_2O$, $Al(OC_2H_5)_3$, $Al(Oi\,Pr)_3$ is added, methyl benzoate is converted to benzyl alcohol in 15—20% yield.

Sodium and lithium hydrides were analysed by their hydrolysis reactions. The evolved hydrogen was measured and the hydroxide titrated. Sodium hydride slurries in cycloheane or ether may be used, avoiding thus the filtration and drying of the hydride, always difficult to perform.

II. *Complex sodium-hydrides*

1. *Boron complex hydrides.* The best known complex boron hydride is sodium borohydride. Sodium borohydride was thoroughly studied by H. I. Schlesinger, H. C. Brown and their coworkers [6]. It has the advantage of being a mild reducing agent in solvents such as water and alcohols. In cold water it, is soluble without appreciable decomposition. Sodium borohydride has some advantages over lithium aluminium hydride but can not replace it being less versatile. It is a convenient reagent for the reduction of the carbonyl group [7]. In some istances it may be used in the reduction of esters [8], [11].

Sodium borohydride was prepared from methyl borate and sodium hydride after the method of H. I. Schlesinger and H. C. Brown [9]:

$$4\ NaH + B(OCH_3)_3 \rightarrow NaBH_4 + 3\ CH_3ONa$$

or from sodium hydride and boron fluoride etherate [10]

$$4\ NaH + BF_3OEt_2 \rightarrow NaBH_4 + Et_2O + 3NaF$$

Sodium borohydride is obtained in good yield and was successfully used in the reduction of carbonyl compounds. Esters can be reduced with sodium borohydride in the presence of aluminium chloride, using as solvent diethylene glycol dimethyl ether (diglyme) or in tetrahydrofuran solution with lithium and magnesium iodides [11]. Attempts to replace these solvents by other solvents have not been successful, sodium borohydride being quite insoluble in organic solvents.

In an attempt to find a soluble complex hydride, sodium triacetoxyborohydride, $Na\ [HB(OAc)_3]$, yet undescribed, was prepared. Sodium triacetoxyborohydride is a white solid, insoluble in organic solvents. In moist air it decomposes. It reacts with water but not so violently as sodium hydride. Sodium triacetoxyborohydride was prepared from sodium hydride and the mixed anhydride of boric and acetic acid in dioxane. Sodium triacetoxyborohydride is a poor reducing agent. It converts benzaldehyde in dioxane to benzyl benzoate with nearly theoretical yield.

The reaction steps involve a hydride ion transfer from the complex hydride to the benzaldehyde:

$$PhCH{=}O + H{:}^- \rightarrow PhCH_2{-}\ddot{O}{:}^-$$

$$PhCH_2{-}\ddot{O}{:}^- + PhCH{=}O \rightarrow Ph{-}HC(:\ddot{O}{:}^-)(OCH_2{-}Ph)$$

$$Ph{-}CH(:\ddot{O}{:}^-)(OCH_2Ph) + PhCH{=}O \rightarrow PhCH_2{-}\ddot{O}{:}^- + Ph{-}C(=O)(OCH_2Ph)$$

Sodium trimethoxyborohydride was prepared after H. C. Brown and H. I. Schlesinger [15] but it also is a poor reducing agent.

2. *Complex aluminium hydrides.* In the literature are described lithium tri-t-butoxyaluminohydride, Li [HAl(OtBu)$_3$], [12] and sodium triethoxyaluminohydride, Na [HAl (OEt)$_3$], [13] Lithium tri-t-butoxy-aluminohydride can convert acid chlorides to aldehydes, and sodium triethoxyaluminohydride is a versatile reagent reducing like lithium aluminohydride a large amount of polar groups.

Sodium triethoxyaluminohydride is prepared from aluminium ethoxide and sodium hydride. Aluminium ethoxide may appear in two forms, α, which corresponds to the monomer aluminium ethoxide and β (polymeric form). Only monomer aluminium ethoxide is able to react with sodium hydride [13]. The reaction takes place in tetrahydrofuran in an autoclave at 100°C. It has been possible to prepare sodium triethoxyaluminohydride from aluminium ethoxide obtained by the general method [14] (containing α and β forms) in ether, using an autoclave and some iron balls to improve the mixing of the materials.

Sodium triethoxyaluminohydride is less reactive than lithiumaluminium hydride. Lithium aluminium hydride performs the reductions at room temperature, or at slightly elevated temperatures. Sodium triethoxyaluminohidride brings about the same result in tetrahydrofuran at the reflux temperature. The same results obtained by G. Hesse and R. Schrödel in tetrahydrofuran were reproduced by us in ether working in an autoclave at 70° C. Methyl benzoate was reduced to benzyl alcohol in 74% yield.

The reduction of methyl benzoate may be achieved in an autoclave with sodium hydride and aluminium ethoxide (containing α and β forms) in 59% yield. For a better mixing the use of some iron balls is valuable.

In summary, in the present work is described a new method for the preparation of sodium and lithium hydride. Sodium hydride of 92% purity is obtained in two hours using a common apparatus. The manipulation is quite simple and the yield is high. Starting from sodium hydride we prepared a series of complex hydrides:

$$NaBH_4,\ Na[HB(OCH_3)_3],\ Na[HAl(OEt)_3],\ Na[HB(OAc)_3]$$

the last of them being undescribed yet.

Sodium borohydride was used successfully in the reduction of carbonyl compounds and sodium triethoxyaluminohydride was found to be a good reagent for the reduction of esters in ether.

Experimental

Sodium hydride: In a stainless steel autoclave of 500 ml are placed 50 g sodium, 5-6 iron balls, ∅ 15 mm, and cyclohexane until it covers the introduced sodium. After hydrogen is amited at 150—200 at, the autoclave is stirred for two hours. Sodium hydride is obtained of 92% purity, perfectly white and fine powdered. Sodium hydride slurry in cyclohexane is stored in a well-stoppered flask until use. Before usage sodium hydride was analysed by decomposing it with water.

Lithium hydride was prepared in the same manner.

Sodium borohydride and sodium trimethoxyborohydride were prepared after H. I. Schlesinger and H. C. Brown [9], [15] and G. Wittig [10].

Mixed anhydride of boric and acetic acid, $B(OAc)_3$. The procedure described by A. Pictet and H. Geleznoff has been applied. [16].

Sodium triacetoxyborohydride. Sodium hydride is suspended in perfectly dry dioxane. Under good stirring a solution of $B(OAc)_3$ in dioxane is added at such a rate as to maintain the boiling of the solvent. Heating is continued 4 hours. The white solid is filtered. The filtrate contains in small amounts another compound corresponding to sodium diacetoxyborohydride,

$$Na[H_2B(OAc)_2]$$

It was not possible to obtain in larger amounts this compound. The analyses of the two compounds is based on their hydrolysis reaction.

Aluminium ethoxide. Monomer aluminium ethoxide was prepared after G. Hesse and R. Schrödel [13].

Sodium triethoxyaluminohydride. The method of G. Hesse and R. Schrödel [13] was modified in the following manner: instead of tetrahydrofuran the double amount of ether is added and instead of monomer aluminium ethoxide, aluminium ethoxide, containing both α and β forms is used. Some iron balls are needed for a better stirring.

The reductions of carbonyl compounds with $NaBH_4$ were reproduced from the literature [7].

The reductions with sodium triethoxyaluminohydride were effected in the general manner described by G. Hesse and R. Schrödel with the specified modifications.

The Laboratory of Organic Chemistry
Polytechnical Institute of Buckarest

RFERENCES

1. *A. E. Finholt, A. C. Bond Jr., H. I. Schlesinger,* J. Amer. Chem. Soc. *69,* 1199 (1947); *Robert F. Nystrom, W. G. Brown,* ibid. *69,* 1197 (1947).
2. *W. G. Brown,* Organic Reactions vol. VI, John Wiley and Sons, New York 1951, 469. *V. M. Micovic, M. L. Mihailovic,* Lithium aluminium hydride in organic Chemistry, Izdavacko Preduzece Beograd 1955.
3. For details D .T. Hurd, Chemistry of the Hydrides, John Wiley and Sons, New York 1952.
4. *N. G. Klincinikov,* Manual de sinteză anorganică, Eă. Tehnică, București 1956, pag 165.
5. *K. Ziegler, H. G. Gilbert, H. Mastih, K. Nagel, J. Schneider,* Liebigs Ann. Chem. *589,* 91 (1954).
6. *H. I. Schlesinger, H. C. Brown* and coworkers, J. Amer. Chem. Soc., *75,* 186 (1953).
7. a. *H. C. Brown, E. J. Mead, B. C. Subba-Rao,* ibid. *77,* 6209 (1955).
   b. *W. G. Dauben, G. J. Fonken, D. S. Nayce,* ibid. *78,* 2579 (1956).
   c. *D. J. Cram, F. D. Greene,* ibid. *75,* 6005 (1953).
8. *H. C. Brown, B. C. Subba-Rao,* J. Amer. Chem. Soc. *78,* 2582 (1956).

9 *H. C. Brown, E. J. Mead, P. A. Tierney,* J. Amer. Chem. Soc. *79,* 5400 (1957).
10. *G. Wittig, P. Hornberger,* Liebiegs Ann. Chem. *577,* 11 (1952.)
11. *I. Kollonitsch, P. Fuchs, V. Gabor,* Nature *173,* 125 (1954).
12. *H. C. Brown, R. F. Mc. Farlin,* J. Amer. Chem. Soc. *78,* 252 (1956).
13. *G. Hesse, R. Schrödel,* Liebigs Ann. Chem. *607,* 24 (1957).
14. *Organic Syntheses coll.* vol. 2, John Wiley and Sons, New York 1557, p.599.
15. *H. C. Brown, H. I. Schlesinger, Irving Sheft, D. M. Ritter,* J. Amer. Chem. Soc. *75,* 192 (1953).
16. *A. Pictet, A. Geleznoff,* Ber. dtsch. chem. Ges., *36,* 2219 (1903).

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД ИЗГОТОВЛЕНИЯ НАТРИЙ-ГИДРИДА И СЛОЖНЫХ ГИДРИДОВ НА ЕГО ОСНОВЕ

(Краткое содержание)

Разработан новыи простой метод изготовления натрий — и литий — гидридов. Чистота продукта 92%. На основе натрии гидрида изготовлена серия сложных гидридов, с которыми проведены некоторые реакций восстановления.

SIMPLIFIED METHOD FOR THE PREPARATION OF SODIUM HYDRIDE AND COMPLEX HYDRIDES DERIVED FROM IT

(Summary)

Sodium and lithium hydrides were prepared by a new, simple mtehod. The manipulation and the apparatus are quite simple, the purity of sodium hydride thus obtained being 92%. Starting from sodium hydride, sodium borohydride, sodium trimehoxyborohydride, sodium triethoxyaluminohydride, sodium triacetoxyborohydride were prepared and their use as reducing agents was studied.

MÉTHODE SIMPLIFIÉE POUR LA PRÉPARATION DE L'HYDRURE DE SODIUM ET DES HYDRURES COMPLEXES DERIVÉES.

(Résumé)

On a préparé par une méthode tout à fait simple l'hydrure de sodium et lithium. On a obtenu, partant de l'hydrure de sodium des hydrures complexes de sodium ($NaBH_4$, $Na[HB(OCH_3)_3]$, $Na[HB(OAc)_3]$, $Na[HAl(OC_2H_5)_3]$) qui furent essayées dans quelques réactions de réduction.

VEREINFACHTE METHODE ZUR DARSTELLUNG VON NATRIUM-HYDRID UND VON DARAUS GEWONNENEN KOMPLEXEN HYDRIDEN

(Zusammenfassung)

Durch eine neue einfache Methode wurden Natrium und Lithiumhydrid gewonnen. Aus Natriumhydrid wurden Natruim-borohydrid, Natriumtrimethoxy-borohydrid, Natriumtrietoxy-aluminiumhydrid, Natriumtriacetoxy-borohydrid dargestellt und mit diesem einige Reduktionsreaktionen durchgeführt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 3

ELECTROCHIMIE

541.138.3

ASUPRA ÎMBUNĂTĂȚIRII RANDAMENTULUI DE CURENT LA FORMAREA COMPUȘILOR OXIGENAȚI AI CLORULUI

de LICA STANCU

Dintre compușii oxigenați ai clorului mare importanță prezintă sărurilor acizilor oxigenați ca: NaClO, $NaClO_2$, $NaClO_3$, și $NaClO_4$.

Dintre aceștia NaClO, $NaClO_3$ și $NaClO_4$ se obțin pe cale electrochimică, în anumite condiții de electroliză [1].

Cloritul de sodiu nu se poate obține pe această cale din următoarele motive: termodinamic nu este posibilă formarea $NaClO_2$ pornind de la NaClO, deoarece potențialul său de formare este egal cu potențialul de formare al NaClO și egal cu + 1,63 V; clorul liber distruge $NaClO_2$ cu degajare de ClO_2 lucru valabil și pentru NaClO, care poate distruge chimic cloritul format electrochimic.

Astăzi $NaClO_2$ continuă să se obțină prin metoda chimică, reducînd ClO_2, liber de Cl_2 cu ajutorul unor agenți reducători blînzi cu H_2O_2, PbO, Ni $(OH)_2$, Zn $(OH)_2$, Co $(OH)_2$.

Hipocloritul de sodiu NaClO se poate obține electrochimic numai sub formă de soluții diluate, deoarece în industria textilă, care este marele consumator, nu se folosesc soluții concentrate, acestea atacînd fibra vegetală.

La electroliza sol. de NaCl fără diafragmă, Cl_2 care se degajă la anod, venind în contact cu NaOH format la catod duce la formarea NaClO, care se aglomerează în jurul anodului.

Cînd concentrația în hipoclorit atinge o anumită limită NaClO se oxidează mai departe la clorat după ecuația

$$6ClO^- + 3H_2O \rightarrow 2ClO_3^- + 4Cl^- + 6H^+ + \frac{3}{2}O_2 + 6\varepsilon$$

De fapt hipocloritul se obține în bune condiții la temperaturi joase și densități mici de curent; iar cloratul la densități mari de curent și temperaturi ridicate.

Adausul de HCl în timpul electrolizei mărește randamentul de curent în clorat și scade randamentul de curent al hipocloritului.

Percloratul se obține prin oxidarea la temperaturi joase a unei soluții concentrate de clorat și la densități mari de curent.

În lucrarea prezentă s-a urmărit îmbunătățirea randamentului de curent η_c, în funcție de poziția electrozilor, durata electrolizei și de natura electrozilor folosiți.

Materia primă folosită a fost soluția de NaCl de concentrație de 250 g/l, din NaCl indigenă, situîndu-se în condiții cît mai apropiate de electroliza industrială.

Celula de electroliză era formată dintr-un pahar Berzelius de 400 cc. cu capac de ebonită, în care erau fixați electrozii de Pt sau de grafit, cu distanța între electrozi de 6 cm. și suprafața anodului de 5 cm².

S-a folosit ultratermostat Höpler pentru menținerea temperaturii constante, instalația de electroliză fiind asemănătoare schemelor obișnuite.

Ca metodă de analiză a produselor rezultate în timpul electrolizei s-a folosit pentru NaClO metoda Penot, unde NaClO era tratat cu exces de $Na_3A_5O_3$ și excesul de arsenit era titrat su soluție de I_2 N/10.

Pe altă probă s-a analizat $NaClO_3$. Din toate metodele existente s-a ales metod a lui Rupp [5] (Koltoff „Massanalise", pag. 408).

În prima fază s-a lucrat cu electrozi de Pt așezați vertical; iar rezultatele obținute la diferite temperaturi se pot vedea în tabelul de mai jos.

Tabela 1

Obținerea NaClO și $NaClO_3$ cu electrozi verticali de Pt

Nr.	ml soluție	Intensitatea crt. mA	Suprafața anod. cm²	Densitatea de curent mA/cm²	Temp. °C	Durata electrolizei minute	analiza				Raport ClO^-/ClO_3^-
							hipoclorit		clorat		
							ml As_2O_3 n/10	η_c. 100	ml $Na_2S_2O_3$ n/10	η_c. 100	
1	200	100	4,8	20	20°	60′	1,5	80,4	0,06	3,21	10:0,4
2	200	500	4,8	104	20°	60′	6,9	74	0,4	4,29	10:0,58
3	200	1000	4,8	208	20°	60′	13,4	71,5	1	5,36	10:0,75
4	200	1500	4,8	312	20°	60′	19,1	67,8	1,9	6,78	10:1
5	200	2000	4,8	417	20°	60′	24,6	65,5	3,6	9,6	10:1,46
1	200	100	4,8	20	40°	60′	1,45	77,6	0,06	3,21	10:0,41
2	200	500	4,8	104	40°	60′	6,8	72,5	0,45	4,3	10:0,61
3	200	1000	4,8	208	40°	60′	13,00	69,5	1,1	5,9	10:0,85
4	200	1500	4,8	312	40°	60′	18,8	66,5	2,1	7,45	10:1,1
5	200	2000	4,8	417	40°	60′	23,5	62,5	3,9	10,4	10:1,63
1	200	100	4,8	20	60°	60′	1,4	75	0,07	3,74	10:0,42
2	200	500	4,8	104	60°	60′	6,4	68,5	0,6	6,4	10:0,94
3	200	1000	4,8	208	60°	60′	11,5	61,4	1,5	8,0	10:1,3
4	200	1500	4,8	312	60°	60′	16,4	67,5	2,85	10,1	10:1,78
5	200	2000	4,8	417	60°	60′	20,4	54,6	4,9	13,1	10:2,4
1	200	100	4,8	20	80°	60′	1,25	70	0,09	4,82	10:0,8
2	200	500	4,8	104	80°	60′	6,00	64,4	0,85	9,1	10:1,41
3	200	1000	4,8	208	80°	60′	10,06	56,8	2,1	11,2	10:1,98
4	200	1500	4,8	312	80°	60′	14,9	53,1	4,3	15,3	10:2,8
5	200	2000	4,8	417	80°	60′	19,1	51	6,9	18,5	10:3,6

Din tabela de mai sus se vede că la electroliza cu electrozi de Pt așezați vertical, randamentul de curent al NaClO scade cu creșterea densității de curent și la fel scade cu creșterea tempraturii ; astfel la 20° și $D = 1000$ mA/cm², η_c ClO^- = 71,5% iar cu aceeași densitate de curent și temp. de 80°, η_c ClO^- este de 56,8%.

Lucrul acesta este confirmat și de literatură (6), (7) în curbele trasate de autorii respectivi.

La clorat însă se constată contrariul; η_c ClO_3^- pentru temperatura constantă crește la creșterea densității de curent, iar la densitate de curent constantă η_c ClO_3^- crește cu creșterea temperaturii.

După cum se vede din tabelul (1) la temperatura de 20°, η_c ClO_3^- crește de la 3,21% la $D = 100$ mA/cm² la 9,6% pentru $D_A = 2000$mA/cm², la 20° η_c ClO_3 este de 5, 36% și la 80° este de 11,2%.

Totuși deși curbele obținerii ClO_3^- cresc cu creșterea temperaturii și densității de curent, randamentul de curent η_c rămîne prea mic cel al $NaClO_3$ față de cel al NaClO, de altfel cum se poate constata din raportul ClO^-/ClO_3^- care la 80° pentru $D = 2000$ mA/cm², acesta este numai de 10 : 3,6, adică hipocloritul este aproape de 3 ori mai mult decît $NaClO_3$.

De aci rezultă că timpul de electroliză joacă un mare rol, deoarece 60 minute sînt suficiente numai pentru acumularea hipocloritului la electrod nu și la descărcarea lui pentru obținerea $NaClO_3$ chiar la temperaturi ridicate.

S-a construit o celulă specială așa cum se arată în pag. 1 cu electrozi de Pt de aceeași suprafață așezați orizontal și paralel.

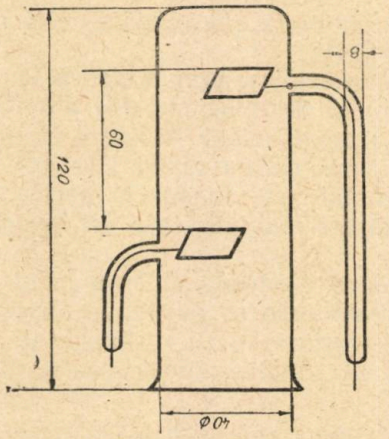


Fig. 1. Celula cu electrozi de platin așezați orizontal

Rezultatele obținute sînt trecute în tabela 2.

Din aceste tabele se constată următoarele :

Randamentul de curent al hipocloritului la celule cu electrozi orizontali este mărit față de cea cu electrozii așezați verticali ; astfel la 20° pt. densitatea de 20 mA/cm² η_c NaClO crește la celula cu electrozii orizontali la 85,8% față de cea cu electrozi verticali, ca în aceleași condiții este de 80,4%

Obținerea NaClO și $NaClO_3$ cu electrozi de Pt așezați orizontal *Tabela 2*

Nr.	ml soluție	Intensitatea crt. mA	Suprafața anod. cm^2	Densitatea de curent mA/cm^2	Temp. °C	Durata electrolizei minute	analiza				Raport ClO^-/ClO_3^-
							hipoclorit		clorat		
							ml AS_2O_3 n/10	η_c. 100	ml $Na\ S_2O_3$ n/10	η_c, 100	
1	200	100	4,8	20	20°	60′	1,6	85,5	0,05	2,6	10:0,31
2	200	500	4,8	104	20°	60′	7,7	82,5	0,28	3,0	10:0,36
3	200	1000	4,8	208	20°	60′	15	80,4	0,6	3,1	10:0,4
4	200	1500	4,8	312	20°	60′	22	78,5	1,1	3,8	10:0,5
5	200	2000	4,8	417	20°	60′	29	77,4	1,8	4,7	10:0,62
1	200	100	4,8	20	40°	60′	1,55	83,1	0,06	3,21	10:0,38
2	200	500	4,8	104	40°	60′	7,65	82	0,45	4,8	10:0,54
3	200	1000	4,8	208	40°	60′	14,8	79,3	1,0	5,36	10:0,62
4	200	1500	4,8	312	40°	60′	21,2	75,6	1,58	5,6	10:0,73
5	200	2000	4,8	417	40°	60′	28	74,7	2,3	6,15	10:0,82
1	200	100	4,8	20	60°	60′	1,5	80,4	0,98	4,25	10:0,53
2	200	500	4,8	104	60°	60′	7 6	79,4	0,5	5,3	10:0,66
3	200	1000	4,8	208	60°	60′	13,9	74,5	1,17	6,27	10:0,84
4	200	1500	4,8	312	60°	60′	20, 5	73	2,4	8,5	10:1,16
5	200	2000	4,8	417	60°	60′	27,1	72,4	3,7	9,85	10:1,35
1	200	100	4,8	20	80°	60′	1,45	77,6	0,09	4,82	
2	200	500	4,8	104	80°	60′	7,1	76,2	0,06	6,43	
3	200	1000	4,8	208	80°	60′	12,8	68,5	1,28	10,5	
4	200	1500	4,8	312	80°	60′	18,3	65	3,45	12,3	
5	200	2000	4,8	417	80°	60′	23,2	62	5	13,35	

În ceiace privește obținerea cloratului, η_c este mai mic decît în cazul celulei cu electrozi verticali.

Acest lucru se poate explica, prin aceia că la poziția diferită a electrozilor, grosimea stratului de difuziune este diferită [10].

Grosimea stratului de difuziune în cazul electrozilor așezați vertical are o distribuție analoagă pentru ambii electrozi, pe cînd la celula cu electrozii așezați orizontal (cu anodul la partea inferioară) stratul de difuziune este de două ori mai mic, așa că hipocloritul se aglomerează mai repede la anod.

In ce privește natura electrodului, s-au făcut aceleași experiențe cu electrozii de grafit ; rezultatele se găsesc în tabela 3.

După cum se vede variația $\eta_c\ ClO^-$ funcție de densitatea de crt. descrește odată cu creșterea acesteia, de asemeni $\eta_c\ ClO^-$ scade cu creșterea temperaturii.

In mod analog cu electrozii de Pt, $\eta_c\ ClO_3^-$ crește cu creșterea temperaturii și densității de curent.

Față de electrozii de Pt însă $\eta_c\ ClO_3^-$ sînt mult mai mici la toate temperaturile și densitățile de curent.

Astfel la temperatura de 20° și densitatea crt. de 500 $\frac{mA}{cm^2}$, $\eta_c ClO^-$ pentru electrozii de Pt așezați vertical este de 74%, iar pentru cei de grafit în aceleași condiții este de 65%, deci aproximativ cu 10% mai mic.

Tabela 3

Obținerea NaClO și $NaClO_3$ cu electrozi de grafit

Nr.	soluție ml	Intensitatea crt. mA	Suprafața anod. cm^2	Densitatea de curent mA/cm^2	Temp. °C	Durata electrolizei minute	analiza				Raport ClO^-/ClO_3^-
							hipoclorit		clorat		
							ml AS_2O n/10	η_c. 100	ml $Na_2S_2O_3$ n/10	η_c. 100	
1	200	500	4,8	104	20°	60′	6,1	65	0,38	4,05	10:0,64
2	200	1000	4,8	208	20°	60′	10,6	57	0,81	4,35	10:0,77
3	2 0	1500	4,8	312	20°	60′	15,2	55,5	1,86	6,55	10:1,22
4	200	2000	4,8	417	20°	60′	19,2	51,7	3,3	8,85	10:1,72
1	200	500	4,8	104	40°	60′	5,45	58,8	0,4	4,1	10:0,74
2	200	1000	4,8	208	40°	60′	10,0	54,0	0,91	4,85	10:0,91
3	200	1500	4,8	312	40°	60′	15	53,5	1,94	6,90	10:1,24
4	200	2000	4,8	417	40°	60′	18,2	49,5	3,42	9,10	10:1,88
1	200	500	4,8	104	60°	60′	5,1	54,5	0,63	6,7	10:1,22
2	200	1000	4,8	208	60°	60′	9,8	53,2	1,74	9,3	10:1,78
3	200	1500	4,8	312	60°	60′	13,2	48,1	2,9	10,2	10:2,4
4	200	2000	4,8	417	60°	60′	16,8	44,5	4,55	12,1	10:2,74
1	200	500	4,8	104	80°	60′	4,4	47,3	0,74	8,2	10:1,68
2	200	1000	4,8	208	80°	60′	7,9	42,2	1,9	10,1	10:2,4
3	200	1500	4,8	312	80°	60′	10,8	38,7	3,3	11,8	10:3,05
4	200	2000	4,8	417	80°	60′	15,8	34,3	5,2	14,7	10:4,05

Același lucru se constată și pentru η_c ClO_3^- care scade pe electrodul de grafit la 6,90% pentru $D_A = 1500 \frac{Ma}{cm^2}$ față de 7,45% pe cel de *Pt*.

Aici diferența este mică datorită timpului scurt de electroliză.

S-a lucrat apoi cu aceeași cantitate de electricitate și s-a văzut că într-adevăr regulile constatate mai sus se respectă, însă; η_c ClO_3^- este mult mai mare; astfel pentru 4 *Ah* la 20° η_c ClO_3^- crește cu densitatea de curent de la 13,5% pentru $D = 300 \frac{mA}{cm^2}$ la 23% pentru $D = 500 \frac{mA}{cm^2}$, pentru electrozii de platină și pentru electrozii de grafit în aceleași condiții crește de la 20,8% la 60,4%.

Raportul ClO^-/ClO_3^- al electrolizelor efectuate din soluții de Na Cl de concentrație 250 g/l și 5 g/l $Mg Cl^2$ ca depolarizant a devenit egal cu unitatea la 4 Ah, pentru electrozii de platină la temperatura de 60° și $D = 300 \frac{mA}{cm^2}$, situație care este asemănătoare și pentru electrozii de grafit.

Se observă în general că randamentul de curent al hipocloritului scade atunci cînd se creiază condiții la care crește potențialul de separare al clorului, în timp ce randamentul de curent al cloratului crește în aceleași condiții.

Influența semnalată a potențialului se manifestă fie că este vorba de o creștere a potențialului cauzată de o polarizare de concentrație, fie că este vorba de o modificare produsă de un fenomen de supratensiune propriu zisă.

Astfel, de exemplu, se constată în toate cazurile că η_c ClO^- scade la toate temperaturile cu creșterea densității de curent, care la rîndul ei duce la o creștere a polarizării (de concentrație).

Același fenomen se constată și în funcție de poziția electrozilor. In cazul electrozilor verticali, unde transferul de substanță este mai dificil (polarizație de concentrație mai mare) randamentele de curent sînt mai mici în, timp ce în cazul electrozilor orizontali (anodul la partea inferioară) unde transferul de substanță este mai activ, procesul de formare al hidroclorităului este favorizat.

S-ar putea atribui această dependență fenomenului de agitare însuși. Totuși dependența semnalată se constată și în funcție de natura electrodului, unde fenomenele de transfer de masă sînt aceleași, dar difera supratensiunea de separare a clorului.

Astfel pe electrozii de grafit pe care supratensiunea de separare a clorului este mai mare η_c în hiporoclorit sînt mai mici.

In cazul cloratului diferența este inversă; η_c ClO_3^- crește cu densitatea de curent, cînd crește și polarizarea de concentrație. De asemenea formarea cloratului este favorizată pe electrozii verticali unde schimbul de substanță se face mai lent (polarizarea mai mare) de cît pe electrozii orizontali, unde viteza de schimb este mai mare.

Influența naturii electrodului asupra randamentului cloratului se manifestă de asemenea în sensul arătat.

In ceea ce privește influența temperaturii intervine un factor suplimentar, care modifică dependența arătată anterior.

Temperatura accelerează procesul de descompunere a hipocloritului, care devine efectul principal; în aceste condiții influența modificărilor supratensiunii produse de temperatură nu mai poate fi urmărită.

Pe baza acestor observații s-ar putea presupune că formarea cloratului poate fi un rezultat, fie al unor procese electrochimice propriu zise fie al unui proces chimic secundar.

In ambele cazuri este însă necesară prezența hipocloritului. Temperaturile scăzute, densități de curent ridicate, transferul lent de substanță și electrozii cu supratensiune ridicată pentru clor sînt condiții în care se favorizează formarea cloratului printr-un mecanism electrochimic la temperaturi ridicate se adaugă și procesul chimic secundar de descompunere a hipocloritului.

Analiza amănunțită a fenomenelor de polarizare în procesul electrochimic de formare a compușilor oxigenați ai clorului, se va face într-o altă lucrare pe baza polarogramelor anodice înregistrate pe microanozi rotativi de platină și grafit impregnat.

Concluzii:

1. Poziția electrozilor favorizează randamentul de curent al NaClO pe electrozii de Pt arătînd o creștere de la 80,4% la 20° pentru electrozi ver-

ticali și densitatea de curent de 20 $\frac{Am}{cm^2}$ la 85,5% în aceleași condiții pe electrozii orizontali.

2. Randamentul de curent cu electrod pe Pt este mai bun de cît cu electrod de grafit cu aproximativ 10%.

3. Timpul favorabil obținerii Na ClO chiar la temperaturi ridicate este în jur de 60 minute, indiferent de cantitatea de electricitate.

4. La timp îndelungat, deci la o cantitate de electricitate mare, randamentul de curent al Na ClO scade și în același timp crește randamentul de curent al cloratului.

5. Formarea cloratului la temperaturi scăzute și densități de curent ridicate se atribuie mecanismului de formare electrochimic.

Laboratorul de Electrochimie
Institutul Politehnic București

BIBIOGRAFIE

1. *Atanasiu I. A.* — Curs de Electrochimie. Ed. M. I. — Buc. 1956.
2. *Homeacov I. N.* — Tehnologia Ind. Electrochimice, trad. din l. rusă. Ed. Tehn., 1953.
3. *Charlot* et *Bezier* — Methods modernes d'analiyse chimique quantitative, Paris, 1945.
5. *I. Kolthoff* — Massanalyse, vol. I și II, New-York, 1947.
6. *Izgarișev N. A.* — Docladi — Acad. Nauci — 56—929—932, 1947.
8. *F. I. Sadov* și *E. O. Wildt.* — Textil. Prom. — 11—8—36—8, 1951.
9. *Rozentahl K. I.* și *Vaselovschi I.* — Fiz. Him. 27. 1163—71, 1953.
10. *Heifeț, D. A. Avdeev, L. S. Reisahvit* — Trad. din *l.* rusă — Ed. Tehn., 1958.

ОБ УЛУЧШЕНИИ ТОКОВОГО К.П.Д. ПРИ ОБРАЗОВАНИИ КИСЛОРОДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ХЛОРА

(Краткое содержание)

Произведено несколько опытов с платиновыми электродами, расположенными в вертикальном и горизонтальном положениях и установлено, что токовый к. п д. гипохлорита повышается у ячейки с горизонтально расположенными электродами; таким образом при температуре в 20° и $D = 20 \frac{mA}{cm^2}$, η_c растёт от 80,4% па вертикальных электродах до 85,5% на горизонтальных электродах.

Указано влияние времени на процесс образования хлората, причём последний получается при относительно большой температуре, из нейтральных растворов, так как сначала должен образоваться гипохлорит, скапливающийся на аноде, и впоследствии он превращается в хлорат.

IMPROVING THE CURRENT OUTPUT IN THE FORMATION OF CHLORE OXYGENATED COMPOUNDS

(Summary)

Experiments with horizontal and vertical electrodes were carried out and it was seen that the current output of hypochlorite increases with the horizontal-electrodes cell; at a temperature of 20° and $D = 20 \frac{mA}{cm^2}$ η_c rises from 80,4% on vertical electrodes — to 85,5% on horizontal ones.

The time influence on the process of formation of chlorate was shown and, namely, chlorate is obtained at a considerable time, from neutral solutions, and this because it is the hypochlorite accumulated on the anode that is to form first an thereupon — it is oxydated into chlorate.

SUR L'AMÉLIORATION DU RANDEMENT DE COURANT A LA FORMATION DES PRODUITS OXIGÉNÉS DU CHLORE

(Résumé)

Nous avons effectué une serie d'éssais avec des électrodes en platine et en graphite situées soit verticalement soit horisontalement. On observe que le randement de courant pour l'hypoclorite est plus élevé, avec les électrodes placées horisontalement, ainsi à la temperature de 20° et $Dc = 20$ mA/cm², le randement de courant est de 80,4% pour les éléctrodes verticales et de 85,5% pour les électrodes horisontales.

Les recherches faites sur l'nfluence du temps d'électrolvse montre que la formation du chlorat dans des solutions neutres de chlorures alcalins est assez lente; le chlorat commence a se former quand la quantité d'hypoclorite aglomerée à l'anode est assez grande pour permettre la descharge des ions ClO^-.

VERBESSERUNG DER STROMLEISTUNGSERZEUGUNG BEI DER BILDUNG VON OXYDIERTEN CHLORZUSAMMENSETZUNGEN

(Zusammenfassung)

Es wurden Forschungen mit senkrecht-und waagerechtangeordneten Platinelektroden, durchgeführt. Dabei wurde es festgestellt dass die Stromleistungserzeugung von Hypochlorit steigt bei der Zelle mit waagerechtliegenden Elektroden; bei einer Temperatur von 20° und $D = 20 \frac{mA}{cm^2}$ steigt η_c von 80,4% bei senkrechtsehender Elektroden -auf 85,5%, bei waagerechtliegenden Elektroden.

Es wird der Zeiteinfluss auf den Bildungsvorgang vor Chlorat gezeigt und zwar, Chlorat wird in einer verhältnissmässig grossen Zeit, aus neutralen Lösungen, erzielt. Dies erklärt sich dadurch dass man sunächst die Bildung von auf Anode sammelnden Hypochlorit erwarten muss, welches darauf durch Oxydieren in Chlorat übergeht.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 3

541.138.3

DIE ELEKTROLYTISCHE HERSTELLUNG DES KUPFERS IN STREUFÖRMIGEN ZUSTAND AUS CHLORAMMONIUM-LÖSUNGEN VON EINWERTIGEN KOMPLEXEN IONEN*)

de ION CRIŞAN

Die Entwicklung eines neuen Zweiges der modernen Technik — die Metallurgie der Pulver-machte die Herstellung grosser Mengen von Metallpulver zur Notwendigkeit.

Die elektrochemische methode is eine der wichtigsten Methoden, denn sie bietet die Möglichkeit der Herstellung des Pulvers in reinem zustande, und zwar mit den gewünschten Strukturund Kerneigenschaften, mit einfachen Mitteln usw.

In der Literatur gibs es viele Facharbeiten die sich auf die elektrolytische Herstellung, der Metallpulver beziehen. Die Mehrzahl der Forschungen des vergangenen Jahrhunderts-in dem die Erscheinungen der Streüablagerung der Metalle vom. Standtpunkt der galvanotechnischen Anwendungen aus betrachtet wurden — hatten ihre Vermeidung zum Zweck [1].

In den lezten Jahrzehnten, bekam diese Erscheinung infolge der steigenden Notwendigkeit von Verwendung, metallischer Pulver, praktiche Bedeutung. Ausserdem gab es im selbem Zeitraum, viele Versuche, den Mechanismuss der Streüablagerung sowie die theoretische Basis derselben zu ergründen.

Das vom Standpunkt der elektrolytischen Herstellung der Metallischen Pulver meist erforschte Metall war Kupfer. Kupfer steht in der Welt, auch was die Jahresproduktion des hergestellten Pulvers anbelangt, an erster Stelle, eine Produktion die auf Millionen Kilogramm ansteigt [2]. Bezeichnend für die Forschungen, die sich auf die elektrolytische Herstellung des Kupferpulvers beziehen, ist die Verwendung der schwefeligen Medien. Dieser Vorgang ist in der Tat die einzig industriell angewendete Methode.

Die vorliegende Facharbeit hat die Erforschung der Herstellung des Kupferpulvers in komplexen Medien von Kupfer und Amoniumchloriden, die einige qualitative Vorteile hat, zum Zweck. Es bestehen wenige Forschungen die sich auf Medien der Elektrolyse beziehen, in denen das Metall durch die Entladung des Kupferiones erzeugt wird. Das Studium der elektrolytischen Herstellung des Kupferpulvers aus einwertigen Medien begann am Ende des vorigen Jahrkunderts [3], [4].

---

*) Facharbeit vorgelegt bei der wissenschaftlichen Tagung des Lehrkörpers des polytechnischen Institutes in Bukarest an 18—19 October 1958.

Die interessantesten Rezultate wurden von Stender und Fedotiev [5] erziehlt, die das Kupferpulver in Salzsaure lösungen, mit Anwendung von Messing-anoden erzeugt haben.

Die komplexen Kupferlösungen die aus Kupferchlorid und Natriumchlorid oder Salzsäure erzeugt wurden waren der Gegenstand einer neuerschienenen Facharbeit. die die Entladung des Kupferiones unter Pulverform zum Zweck hatte [6]. Neben vielen Vorteilen, wie hohe Reinkeit des erzichlten End-produktes, das mit einem kleineren Energieverlust erzeugt werden konnte, hat das Salzsäuremedium folgende Nachteile:

— Die Bäder arbeiten infolge der Hydrolyse und der Oxydierung der mit der Luft in Verbindung gebrachten Kupferionen, unbeständig, was die Abdeckung der Lösung mit einer Ölschicht bedingt.

— Die Anoden werden bei relativ kleinen Streudichten passiv; desshalb ist der Gebrauch von verdünnten Kupferlösungen und konzentrierten NaCl-oder HCl Lösungen nötig, wieauch eine starke Bewegung des Bades.

— Die Beschleuningung des kathodischen Vorganges, endlich, durch die Erhöhung des Stromes ist durch die Steigung des Uh-Wertes in der der Kathode entgegen-gesetzten Schicht, die die Hydrolyse erzeugt, begrenzt. Die vorliegende Facharbeit, hat den Zweck, die in Salzsäure-median festgestellten Nachteile zu beseitigen und die Vorteile, in Bezug auf die Reinheit und Sparsarmkeit der Herstellung des Kupferpulvers, zu erhöhen.

VERSUCHSARBEITEN

1. Die Lösung.

Die für die Elektrolyse nötigen Lösungen wurden durch die Lösung von Kupferchlorid in Ammoniumchlorid hergestellt. Während der Auflösung wird die komplexe Verbindung $[CuCl_3](NH_4)_2$ erzeugt [7]. Es wurde immer Schwefelsäure (1 g/L) zugesetzt um den pH-Wert bis wenigistens auf 3,5 herabzusetzen. Bei diesen pH-Wert ist die Lösung klar. Die selbe Rolle kann auch die Salzsäure spielen, es ist aber eine grössere, Menge nötig, da sie in der komplexen Verbindung $[CuCl_2]H$ — die unbeständig ist — verbraucht wird. Es scheint, dass die Schwefelsäure die komplexe Kupfersulfatamoniumverbindung $[Cu(NH_3)_2]_2SO_4$ erzeugt, die viel beständiger als die komplexe Salszäureverbindung ist [8]. Die Farbe der hergestellten Lösungen ist sofort nach der Erzeugung braun grünlich, wird jedoch nach Ablauf einiger Stunden dunkelbraun, selbst wenn sie nicht der Luft ausgesezt war.

In Verbindung mit der Luft, bildet sich auf der Oberfläche der Lösung eine grüne Schicht, die nach einiger Zeit zu Boden fällt, wonach sich eine neue Schicht bildet und so fort bis zum Oxydieren und Verkohlen aller Kupferionen, gemäss folgender Reaktionen:

$$2\,CuCl + 2H_2SO_4 + 1/2\,O_2 = 2CuSO_4 + H_2O + 2HCl.$$
$$2\,CuCl + 2HCl + 1/2\,O_2 = 2CuCl_2 + H_2O.$$
$$CuCl_2 + CO_2 + H_2O = CuCO_3 + 2HCl.$$

Es ergiebt sich ein Gemisch von basischen Kupferkarbonat und Kupferchlorid, beide von grüner Farde.

Aus diesem Grunde muss die Lösung in gut verschlossenen Gefässen aufbewahrt werden und muss im Bade mit einer Olschicht von der Luft isoliert werden.

Die Leitungsmessungen die bei den komplexen Kupferammoniumverbindung durchgeführt wurden zeigten, dass diese, eine kleinere spezifische Leitungsfähigkeit haben als die reinen Ammoniumchloridlösungen. Aus Tafel 1 geht hervor, dass die spezifische Leitungsfähigkeit der Lösungen um so kleiner ist, je konzentrierter diese in Kupfer und ärmer in Ammoniumchlorid sind.

Gleichfallss ist bei den konzentrierten NH_4Cl Lösungen und kupferarmen Lösungen das Verhältniss zwischen der spezifichen Leitunfähigkeit der reinen NH_4Cl Lösung und der komplexen Kupferchlorammoniumlösung kleiner.

Tabel 1

Der Einfluss der Konzentration des NH_4 Cl und des Kupfers auf die spezifische Leitungsfähigkeit γ der komplexen Kupferchlorammmoniumlösungen, bei einer. Temperatur von 22°C

Die Konzentration der Bestandteile der Lösung g/l		Spezifiche Leitungsfähigkeit Ω^{-1} cm^{-1}	Verhätnisszwischen der reinen Lösung und der komplexen Lösung
NH_4 Cl	Kupfer		
150	0	0,2901	13,6
150	15	0,0213	
200	0	0,3542	1,5
200	30	0,2360	
300	0	0,4435	
300	30	0,3405	1,3
300	60	0,2952	1,5

DIE VORGÄNGE BEI DEN ELEKTRODEN

Die Erscheinungen die an der Kathode und an der Anode vor sich gingen, wurden, bei einer unterschiedlichen Polarisation der Elektroden studiert. Unter Anwendung der Kompensationsmethode wurden die Kathoden-und Anodenpotentiale im Zusammenhang mit der Stromdichte gemessen und die Polarisationskurven für die Temperatur von 22° festgestellt.

Erscheinungen an der Kathode. Eine Betrachtung der in Bild 1 angeführten Polarisations-kurven ergibt, dass die ersten Pulverteile die sich von der Kathode lösen können, weit vor der Entladung des Wasserstoffes und schneller bei den kupferarmen Lösungen auftreten Können. Das Pulver bildet sich bei einer Konzentration der Lösung von 15 (I) was einem. Kupfergehalt von 30 g/l entspricht (II) und bei Spannungen diezwischen — 0,193 und — 0,205 V ilegen und kleiner als die Spannungen sind, die dem Auftreten des Diffusionsgrenzstromes entsprechen.

Die Er-klärung dieser Erscheinung ist einfach wenn man sie mit dem jähen Absinken der Stromdichte in dieser Zone im Zusammenhang bringt

und zwar auf Grund der Vergrösserung, der mit Pulver belegten Elektrodenober-fläche.

Doch bemerkt man, das die dem Auftreten des Pulvers entsprechende Spannung sehr nahe derjenigen Spannung liegt, die dem Anfang des Grenzstromes entspricht und sehr viel von der jenigen Spannung abweicht bei der die Entladung des Wasserstoffes eintritt (—0,489 V). Die Erklärung dieser Erscheinung erfolgte durch Anwendung der Quantenmechanik beim Studium des Grenzstromes [9].

Asserdem wurde das Absinken des pH-Wertes bei der die Kathode umschliesende Lösung bemerkt, und zwar von 8 bis zu einem Wert der zwischen 8 — 9,5 liegt, auf Grund Entladung der H^+ — Ionen sowie der Ansammlung der NH_4^+ — Ionen.

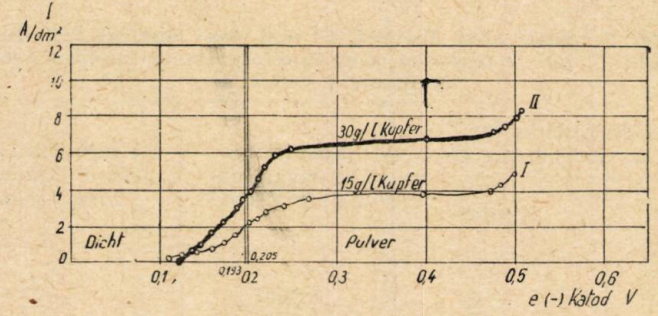


Bild 1. Die Polarisationskurve, bei Entladung des Kupfers aus Lösungen mit 15 und 30 g/L Kupfergehalt, erzeugt aus CuCl und 200 g/L NH_4Cl. Entwiklung vom Kompakten Niederschlag zur pulverförmigen Ausscheidung.

Trotz dieses pH-Wertes, wurde keine Erscheinung einer Hydrolyse oder eines Niederschlages bemerkt (zum Unterschied des Salzsäuremediums). Das Pulver das man mittels der gleichzeitigen Entladung des Wasserstoffes erhält, schwimmt, wegen der anhaftenden Wasserstoffblasen an der Badoberfläche. Beim Abscheiden des Pulvers bemerkt man, dass die Lösung die an diesem haftet keine braune, sondern eine blaue Farbe aufweist, was durch die in der Kathoden-schicht anwesenden komplexen Kupferammoniumverbindung erklärt wird.

Weiter ist es, im Zusammenhang mit den Kathodenerscheinnungen wissenswert, ob sich das Kupferion bei der Entladung frei in der Lösung befindet oder mit den komplexen Anionen verbunden ist. Um diese Tatsache klarzustellen ist es nöting den Zerlegungsgrad der komplexen Verbindungen zu kennen. Die Zerlegung geht stufenweise vor sich:

$$[CuCl_3](NH_4)_2 \rightleftharpoons [CuCl_3]NH_4^- + NH_4^+$$
$$[CuCl_3]NH_4^- \rightleftharpoons [CuCl_3]^{2-} + NH_4^+$$
$$[CuCl_3]^{2-} \rightleftharpoons [CuCl_2]^- + Cl^-$$
$$[CuCl_2]^- \rightleftharpoons CuCl + Cl^-$$
$$CuCl \rightleftharpoons Cu^+ + Cl^-$$

Aus der Fachlitteratur konnte der Wert des Zerlegunggrades und somit der Instabilittaskonstante dieser komplexen Verbindungen nicht ersehen werden. Es muss angenommen werden, dass diese komplexen Verbindungen — im Vergleiche mit dem Komplex $[Cu\ Cl_3]\ Na_2$, dessen Instabilitatskonstante [10]. $\frac{[Cu^+]\,[Cl^-]^2}{[Cu\ Cl_2]^-} = 3.10^{-6}$ relativ gross ist und viel grösser als die der komplexen Zyankupferverbindungen (1.10^{-16}) — eine arme komplexe Verbindung und stark zerlegt ist. Diese Tatsache erklärt folgende Versuchs-bemerkungen:

— Der kompakte Niederschlag tritt bei konzentrierten Lösungen um den Wert von 3 A/dm² ein, also fast wie bei den Kupfersulfatlösungen und weit entfernt von den Werten der Zyanlösungen.

— Das metallische Eisen entfernt leicht das Kupfer aus den Chlorammoniumlösungen was bei den Zyanlösungen nicht der Fall ist.

— In Verbindung mit der Luft enthält die Lösung eine grosse Anzahl Kupferionen. Diese könen durch die Jodmetriche Methode mit Natriumthiosulfat dosiert werden. Die Kathodenspannung ist selbstredend sowohl von der Konzentration der pozitiven Kupferionen Cu^+, $[Cu\ Cl_3]^-$ als auch von der den Cu^{2+} Ionen beeinflusstund dies meistens wenn die Lösung nicht von der Luft abgeschlossen wurde. Es können sicherlich folgende Kathodenvorgänge vor sich gehen:

$$Cu^{2+} + 2\varepsilon = Cu$$
$$Cu^{2+} + \varepsilon = Cu^+$$
$$Cu^+ + \varepsilon = Cu$$

jedoch die Errechnung der Stromausbeute zeigt dass der lezte Vorgang vorherscht.

Erscheinungen an der Anode.

Die Auflösung der Anode. Da das Kupfer Ionen mit zwei verschiedenen Oxydatunsgraden bilden kann, ist die Tatsche bekannt [11] dass in der umschliessenden Lösung folgende reversible chemische Verbindung vor sich geht.

$$Cu^+ + Cu \rightleftharpoons 2\,Cu^+$$

Die Normalspannungen im Vergleich mit dem normalen Wasser-sotff-elektroden sind folgende [12].

$Cu = Cu^+ + \varepsilon$	$e_1^0 = 0{,}521$ V
$Cu = Cu^{2+} + 2\varepsilon$	$e_2^0 = 0{,}337$ V
$Cu^+ = Cu^{2+} + \varepsilon$	$e_3^0 = 0{,}153$ V

Theoretisch, müsste sich die ganze Anode fast nur in Cu^{2+} lösen, doch die praktischen Versuche haben gezeigt, dass die Auflösung, besonders in Anwesenheit grosser Mengen Cl^- Ionen die im Stande sind sich sofort mit den Cu^+ Ionen unter Bildung der $[Cu\ Cl_3]^{2-}$ Verbindung, zu vereinen, fast nur, bei einem minderwertigen Valenz grad vor sich geht.

Auch wurde bei den orientativen Elektrolysen die ohne eine Anodenpolarisation durchgeführt wurden, eine kleine Ausbeute des Anodenstromes festgestellt.

Bei diesen, sank die Kupferkonzentration und die Farbe wechselte von Braun in Hellgrün, ähnlich, wie bei den komplexen Kupferammoniumverbindungen, nach einer langdaeurnden Elektrolyse.

Die Polarisation der Anode. Eine Betrachtung der in Bild 2 angeführsten Polarisationskurven, führt zur Erkenntniss, dass die Anoden sich in beiden Lösungen, obwohl diese im Bezug auf die Konzentration des NH_4Cl verschieden sind, bis zu einem gewissen Punkt normal lösen. Von diesen Punkt an ist die Kurve durch eine unterbrochene Linie gekennzeichnet. Die Auflösung hört dort auf wo die Grenze des Anodenstromes erreicht wird. Es wird die Grenzkonzentration der Cl Ionen erreicht, eine Grenze die durch die Lösbarkeit der Kupferchlorverbindung, die sich bei dieser Stromdichte an die Anode ansetzt und diese elektrisch isoliert, bedingt ist. Die Polarisationskurven sind, in ihren ununterbrochen Abschnitt, leicht wiederzugeben, weiter jedoch und zwar an dem

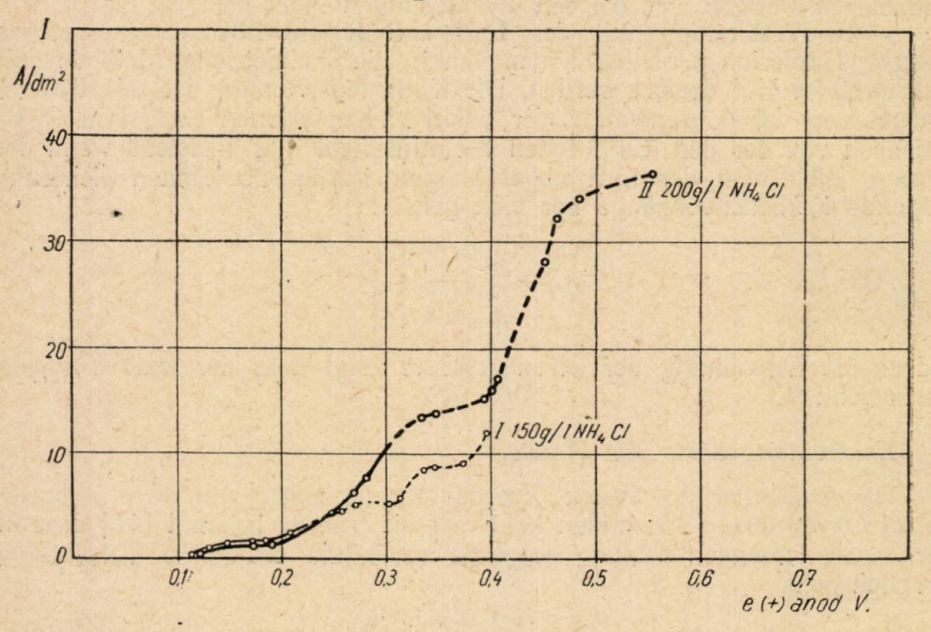


Bild. 2. Einflus der Stromdichte und Konzentration in NH Cl auf die Anodenspannung in einer Chlorammoniumlösung mit einem Inhalt von 30 g/L Kupfer

unterbrochenen Abschnitt ist diese Wiedergabe sehr schwiering. Man bermekt im Pasivierungsabschnitt (der unterbrochene Teil) eine Abhängigkeit der Stromdichte von der angewandten Spannung. Die beschriebene Erscheinung besteht nicht nur in dieser Abhängigkeit, denn es tritt eine natürliche. Eigenentpasivierung ein. Die Anode löst sich, während sie izoliert ist nicht mit der gleichen Geschwindigkeit und das Salz hat die Möglichkeit sich in die entspechende lösliche komplexe Verbindung zu verwandeln. Die Erscheinung ist beinahe periodisch; Für die selbe applizierte Spannung, bemerkt man ein regelmässiges, periodisches. Ansteigen und Sinken der Stromdichte und der Anodenspannung. Man bemerkt ausserdem gemäss Bild. 2 dass die Pasivierung leichter in den NH_4Cl-armen Lösungen (I) auftritt, als in den konzentrierten (II).

3. *Die Gewinnung der Pulver.*

Es wurde eine einfache Installation für Elektrolysen verwendet und zwar bestand dieselbe aus einer Gleichstromquelle, einem Rheostaten, einem Amperemeter, einem Voltmeter und einem zur Elektrolyse notwedigem Gefäss von 1 L Inhalt. Die Kathode, die eine Oberfläche von 1 dm^2 hatte, war an beiden Seiten polarisiert und war zwischen zwei gleichgrossen Anoden, die sich in einem Abstand von 2 cm voneinander befanden, befestigt. Die durchschnittliche Dauer der Elektrolyse betrug 120 Minuten. Es wurde in Raumtemperatur gearbeitet (22—25°C).

Die Spannung an den Anschlusskontakten des Bades schwankte zwischen 0,1—1,9 V. Das Pulver wurde von der Kathode durch Schütteln, schnell von der Lösung getrennt, da es sich in Kontakt mit dieser korrodiert. Das Pulver wurde mit angesäuertem Wasser gewaschen, da die komplexe Verbindung in Anwesenheit von gewöhnlichem Wasser in weisses, sehr feines CuCl übergeht, das stark an den Kupferteilen haftet und diese verunreinigt. Zum Entfernen der Kupferionen wurde schnell mit einer, 0,1 n. HCl Lösung gewaschen, und zum Entfernen der Chlorionen wurde mit Wasser im luftleeren Filter gewaschen. Die letzte Reinigung wurde in Alkohol vorgenommen, warauf in einem Thermostat bei 50°C getroknet wurde.

Das in der Chlorammoniumlösung erzeugte Pulver ist von hoher Reinheit; um diese aufrechtzuerhalten müssen die Vargänge die zur Erzeugung des Pulvers führen und zwar die Reinigung und das Trocknen, aufs Höchste beschleunigt werden, auch muss in Betracht gezogen werden, dass der Kontakt des Pulvers mit dem Wasser so kurz wie möglich sein muss.

Ein 10 Tage altes Pulver das einer Röntgenanalyse unterzogen wurde, zeigte nichtdosierbare Cu_2O und CuO Spuren.

Stromausbeute

Unter den vorliegenden Bedingungen konnte die Stromausbeute nicht sehr genau bestimmt werden.

Trotz der Isolierung des Bades mit Paraffinöl, haben die Analysen die Anwesenkeit von zweiwertigen Kupferionen neben den einwertigen Kupferionen (bis 10%) festgestellt.

Für die Dosierung der zweiwertigen Ionen wurde die volumetrische Dosierungsmethode des, durch den Cu^{2+} aus den K I freigewordenen Jodes mit Natriumthiosulfat, angewendet. Die Menge der einwertigen Ionen wurde mit Hilfe der Differenz zwischen der Menge der zweiwertigen Ionen und der nach Oxydieren mit HNO_3 elektrogravimetrisch totalen Kupfermenge, festgestellt. Die Anwesenheit der Cu^{2+} Ionen erklärt sich durch das Oxidieren der Cu^{+} Ionen und der anodischen Lösung bei diesem Valenzgrad.

Vier wichtige Gründe trugen zur Verminderung der Anodenstromausbeute bei :

— Das Ausschei-den kompakten Kupfers.
— Die Entladung der Cu^{2+} Ionen.
— Die Entladung der H^+ Ionen.
— Die Lösung des Pulvers im Bade.

Die in Tafel 2 eingetragem Rezultate zeigen die Schwankungen der Stromausbeute im Verhältniss zur Stromdichte bei verschiedenen Konzentrationen des Kupfers im Bade.

Der Anstieg der Ausbente bis zum Maximalwert erklärt sich durch die Verminderung des kompakten kupfers, während ihr Absinken auf die immer häufiger werdende Entladung der H^+ Ionen zurückzuführen ist.

Gleichfalls ist die Ausbeute für dieselbe Stromdichte, bei grosserer Konzentration des Kupfers in der Lösung, grösser, da der Wert des Grenzstromes mit der Konzentration steigt.

Tafel 2

Der Einfluss der Stromdichte auf die Kathodenausbeute, Herstellung des Kupferpulvers aus verschiedenartig konzentrierter Kuperlösungen und 300 g/L NH_4 Cl

Stromdichte A/dm²	Stromausbeute in %		
	10 g/L Kupfer	30 g/L Kupfer	60 g/L Kupfer
1,0	0	0	0
1,5	8	0	0
1,75	47	—	0
2	86	10	0
3	85	14	—
4	85	25	4
5	85	33	15
10	84	51	30
15	82	77	—
20	80	88	72
30	74	85	91
40	63	79	89
60	46	64	78
80	25	46	67
100	6	27	49

Spezifischer Energieverbrauch.

Weiterhin wurde der Einfluss der Stromdichte bei verschiedenen Kupfer und NH_4Cl — Konzentrationen in der Lösung auf den spezifischen Energieverbrauch, der auf Grund der Strommenge, Spannung und Gewicht des erzeugten Pulvers errechnet wurde, untersucht.

Der Einfluss der Stromdichte und der Kupferkonzentration ist in den Werten der Tafel 3 enthalten.

Tafel 3

Der Einfluss der Stromdichte auf den spezifischen Energieverbrauch bei verschiedenen Konzentrationen des Kupfers und 300 g/L NH_4Cl

Stromdichte A/dm²	Spezifischer Energieverbrauch Wh/kg		
	10 g/L Kupfer	30 g/L Kupfer	60 g/L Kupfer
1,0	—	—	—
1,5	938	—	—
1,75	510	—	—
2	132	508	—
3	153	451	—
4	201	410	1709
5	317	324	1520
10	680	256	636
15	762	267	—
20	832	338	346
30	—	500	340
40	1560	625	446
60	1940	792	632
80	2398	1100	932
100	—	1408	1216

Tafel 4

Der Einfluss der Stromdichte auf den spezifischen Energieverbrauch bei verschiedenen Konzentrationen des NH_4Cl und 30 g/L Kupfer

Stromdichte A/dm²	Spezifischer Energieverbrauch Wh/kg	
	150 g/L NH_4Cl	300 g/L NH_4Cl
1	—	—
1,5	—	—
2	1100	508
5	401	324
10	698	256
20	1000	336
30	1172	500
40	1600	625
60	1844	792
80	2620	1100
100	—	1408

Diese Werte zeigen sin Absinken des spezifischen Energieverbrauches mit dem Austeigen der Stromdichte, bis zu einem gewissen Wert derselben, bei dem kein Kompaktes Kupfer mehr abgeschieden wird, wonach ein Ansteigen auf Grund einer immer stärker werdenden Wasserstoffausscheidung, folgt. Umgekehrt äussert sich der Einfluss der Konzentration des Kupfers durch einen Ansteigen des Energieverbauches bei einer gleichbleibenden Stromdichte, auf Grund des Ansteigens des Gehaltes an kompakten Kupfer.

Der Einflus der Konzentration des Ammoniumchlorids.

Die in Tafel 4 angeführten Werte zeigen ein Ansteigen des spezifischen Energieverbrauches mit dem Absinken der Konzentration des Ammoniumchlorids, was auf ein Ansteigen der Spannung an den Anschlusskontakten infolge einer verminderten Stromdurchlässigkeit der Lösung zurückzuführen ist.

Volumetrisches Gewicht.

Zur Bestimmung des volumetrischen Gewischtes wurden 10 Gramm Pulver in einem gradierten Zylinder bis auf ein konstantes Volumen zusammengedrängt. Der Einfluss der Stromdichte geht aus den in Tafel 5 angeführten Werten hervor. Man bemerkt ein fostwahrenders Absinken

des volumetrischen Gewichtes mit dem Austeigen der Stromdichte, infolge der Grössenverminderung der Partikeln.

Tafel 5

Die Variation des Volumetrischen Gewichtes des Kupferpulvers mit der Stromdichte

Es wurden folgende Konstanten aufrechterhalten:

Konzentration des NH_4Cl = 300 g/L

Konzentration des Kupfers = 30 g/L.

Stromdichte A/dm²	2	4	5	10	20	40	60	80	100
Volumetrisches Gewicht g/cm³	1,3	0,8	0,8	0,68	0,62	0,41	0,40	0,38	0,3

Vergleich der Herstellungsmethoden des Kupferpulvers, aus Salzsäurelösungen [6] und Chlorammoniumlösungen.

Um den Vorteil einer Methode gegenüber der anderen festzustellen wurde die Erzeugung eines vom Standpunkt des volumetrischen Gewichtes ähnlichen Pulvers durch beide Methoden untersucht Die Rezultate sind in Tafel 6 angeführt.

Tafel 6

Die wichstigsten Vergleichsparameter der Elektrolytischen Erzeugungsmethoden des Kupferpulvers aus Salzsäure und Chlorammonium-lösungen bei einer Temperatur von 25°C

Parameter		Salzsaurelosung	Chlorammoniumm lösung
Volumetrisches Gewicht	g/cm³	0,6	0,62
Gehalt in Kupfer des Pulvers	%	98,00	99,99...
Stromausbeute	%	88,00	88,5
Spezifischer Energieverbrauch	Wh/kg	400	336
Kathodenstromdichte	A/dm²	7	20
Anodenstromdichte	A/dm²	3,5	20
Zusammensetzung des Bades	g/L	$CuCl$ = 20 $NaCl$ = 290 HCl = 4,3	$CuCl$ = 46,5 NH_4Cl = 300 H_2SO_4 = 5

Schlussfolgerungen.

1. Die Herstellung des Kupferpulvers aus Chlorammoniumlösungen, sowie aus Salzsäurelösungen kompliziert sich durch die Unbeständigkeit der mit der Luft in Verbindung stehenden Bäder, durch die Entstehung von verschiedenwertigen Ionen und durch die Passivisierung der Anoden. Für die Chlorammoniumlösungen vermindert sich die Passivisierung auf natürliche Weise und trägt zu einer mit der Kathodenausbeute gleichen Anodenausbeute bei.

2. Die Kathoden-und Anodenstromausbeute ist wegen der Entladung, beziehungsweise der Lösung einer Menge Cu^{2+} Ionen, kleiner als 100%.

3. Der spezifische Energieverbrauch sinkt mit dem Anstieg der Stromdichte und steigt dann an.

4. Ein für metallurgische Zwecke geeignetes Pulver kann unter folgenden besten Bedingungen hergestellt werden: cca. 300 g/L NH_4Cl, 2—5 g/L H_2SO_4, 30 g/L Kupfer, 10—40 A/Dm² Stromdichte. Das Bad wird mit einer Ölschicht abgedichtet.

5. Ein Vergleich der beiden Herstellungsmethoden des Kupferpulvers aus komplexen Lösungen mit einwertigen Ionen, zeigt, dass die Methode die eine Chlorammoniumlösung bemützt, besser ist, als jene mit einer Salzsäurelösung und zwar insbesondere der Vorteile wegen, die sich aus der viel langsameren und reversiblen Passivisierung der Anoden ergeben, sowie infolge der Möglichkeit einer Intensivisierung des kathodischen Vorganges durch eine Erhöhung der Stromdichte, die durch den Anstieg des pH-Wertes nicht begrenzt ist.

Laboratorium für generalchemische Technologie
Polytechnisches Institut Bukarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Kudra O.* și *Ghitman E.* — Elektroliticeskoe polucenie metalliceskih poroșkov, Seite 70 (1952), Kiev.
2. *Kudra O.* și *Ghitman E.* — Elektroliticeskoe polucenie metalliceskih poroșkov, Seite 70 (1952), Kiev.
3. * * * Deutsches Patent A. E. G. 88273 (1894).
4. *Douglas J.* — Amerikanisches Patent 563.144 (1896).
5. *Stender V.* și *Fedotiev N.* — Sowietrussisches Patent 2319,40 c. 11 (1924) veröffentlicht im Jahre 1927.
6. *Ion Crișan* — Obținerea electrolitică a pulberii de cupru din soluții clorhidrice de ioni complecși monovalenți, Revista de chimie 9 (1959), Bukarest.
7. *Weinhold* — Dingler's Polytechnisches Journal, 209, 409, Stuttgart.
8. *F. Foerster* und *Blankenberg* — Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft, 39,4435 (1906), Berlin.
9. *Prof. dr. I. A. Atanasiu* și *ing. A. Călușaru* — Studii și cercetări de metalurgie nr. 3 (1957), Bukarest.
10. *N. P. Komar* — Osnovî kacestvennovo himiceskovo analiza (1955), Moskau.
11. *I. A. Atanasiu, G. Facsko* — Electrochimie — Principii teoretice, Seite 422—423 (1958), Bukarest.
12. *Latimer W.* — Okislitelnîe sostoianla elementov (traducere din limba engleză), Seite 192 (1954), Moskau.

ПОЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ МЕДИ В ДИСПЕРССИОННОМ СОСТОЯНИИ ИЗ ХЛОРАМИНОВЫХ РАСТВОРОВ КОМПЛЕКСНЫХ ОДНОВАЛЕНТНЫХ ИОНОВ

(Краткое содержание)

Было исследоваио электролитическое получение медного порошка из хлороамьягных одновалентных комплексных соединений.

Растворы были пригатовлены из CuCl, NH_4Cl, H_2SO_4. По сравнению с порошком полученным их растворов сернокислой меди, про-

дукт полученный при настоящем методе является более чистым по содержанию окислов и расход электроэнергии меньше.

Лабораторные исследования показали что электролит неустойчивый на воздухе также как и хлорный электролит и аноды пассивируются на много медленее чем в хлорной среде.

Для предохранения от воздействия среды электролит покрывается слоем масла.

Удельные расходы электроэнергий около 0,4 kWh/kg а обьемный вес 0,3—1,3 g/cm³.

Таким образом можно получить очень чистый порошок пригодный для металлургических целей.

OBTAINING ON ELECTROLYTICAL WAY OF COPPER IN DISPERSED STATE, FROM CHLOROAMONIACAL SOLUTIONS OF COMPLEX MONOVALENT IONS

(S u m m a r y)

One has been searching electrolytical obtaining of copper powder from solutions of monovalent chloroamoniacal complexes.

The dissolutions were prepared of CuCl, NH_4Cl and H_2SO_4. In comparison with the powder obtained from the $CuSO_4$ solutions the product got by the present method possess a more erected purity concerning the oxide contain, and necessitates a smaller consumption of energy. The laboratory experiments showed that the electrolyt is instable in contact with ai, in the same kind like the chlorchidric electrolyt, and the anods become passive much slower like in chlorhidric medium.

The alteration of the electrolyt may be avoided by protection of the surface with an oil layer. Specifical consumptions of energy are about the value of 0,4 kWh/Kg and volumetrical weights between 0,3—1,3 g/cm³ can be obtained very pure powder and wich can be availed in good conditions in metalurgical aims.

L'OBTENTION ELECTROLYTIQUE DU CUIVRE EN ETAT DISPERSÉ DES SOLUTIONS CHLOROAMMONIACALES D'IONS COMPLEXES MONOVALENTS

(R é s u m é)

On a recherché l'obtention électrolytique de la poudre de cuivre des solutions des ions complexes monovalents chloroammoniacaux.

Les solutions ont été préparés a partir de: CuCl, NH_4Cl, H_2SO_4. Par comparaison à la poudre obtenue des solutions de sulfate de cuivre, le produit préparé par la présente méthode, possède une pureté plus élavée par rapport à la teneur en oxydes. Cette méthode demande une consommation moindre d'énergie.

Les expériences au laboratoire ont fait voir qu'au contact de l'air, l'électrolyte est aussi instable que l'électrolyte chlorhydrique, tandis que

les anodes deviennent beaucoup plus lentement passives que dans un milieu chlorhydrique.

On peut éviter l'altération de l'électrolyte par la protection de la surface à l'aide d'une couche d'huile. Les consommations spécifiques d'énergie ont une valeur approximative de 0,4 kWh/Kg et les poids volumétriques varient entre 0,3 et 1,3 g/cm^3.

On peut obtenir une poudre très pure et qui peut être utilisée en bonnes conditions dans des buts métallurgiques.

DIE ELEKTROLYTISCHE HERSTELLUNG DES KUPFERS IN STREUFÖRMIGEN ZUSTAND AUS CHLORAMMONIUM-LÖSUNGEN VON EINWERTIGEN KOMPLEXEN IONEN

(Zusammenfassung)

Es ist versucht worden die elektrolytische Erzeugung von Kupferpulver aus Lösungen von Monovalenten Komplexen Ionen von Chloramoniac.

Die Lösungen wurden zubereitet aus CuCl, NH_4Cl, H_2SO_4. Im Vergleiche zum erhaltenen Pulver aus Lösungen von Kupfersulfat, hat das Erzeugnis der gegenwärtigen Metode, einen erhöhten Reingehalt an Oxyden und benötigt einen geringeren Energieverbrauch.

Die Versuche in Laboratorium haben gezeigt, dass der Electrolyt unstabil ist im Kontakte mit der Luft, genau wie der chlorhidrische Elektrolyt, während die Anoden pasiv werden und dies viel langsamer als im chlorhidrischen Medium.

Das Verderben der Elektrolyten kaun durch Schutz der Oberfläche mit einer Ölschichte vermieden werden. Die spezifischen Energieverbräuche sind ungefähr 0,4 kWh/Kg während die Volumgewichte zwischen 0,3 und 1,3 g/cm^3 sind.

Man kann sehr reine Pulver erhalten, die in guten Bedingungen für metalurgische Zwecke verwendet werden können.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1959 Fascicola 3

CHIMIE TEHNOLOGICĂ

STUDIUL PROPRIETĂȚILOR UNOR CATIONIȚI OBȚINUȚI DIN LIGNINĂ

de TUDOR IONESCU, MARIA GORUNEANU și GHEORGHINA TUDORACHE

La fabricarea celulozei, prin procedeul cu bisulfiți, rezultă ca deșeu leșiile bisulfitice reziduale, care au un conținut bogat în acizi lignosulfonici, de greutate moleculară și grade de sulfonare diferite. Acizii lignosulfonici care au o greutate moleculară peste 15.000 sînt insolubili în apă, solubilitatea crescînd pe măsură ce scade greutatea moleculară. Sărurile lor de calciu și sodiu sînt deasemenea solubile în apă. Acizii lignosulfonici pot fi precipitați cu ajutorul alcoolului, aminelor aromatice, acizilor organici și anorganici. (2), (3), (6), (7).

Reacțiile de precipitare nu se produc cantitativ, cu excepția aminelor aromatice superioare și a acizilor sub presiune, care îi precipită complet. Acțiunea de precipitare a acizilor, în deosebi a acidului sulfuric, se bazează pe condensarea moleculelor acizilor lignosulfonici (3). În timpul tratării cu acid sulfuric a soluțiilor bisulfitice reziduale care conțin derivați lignosulfonici se degajă bioxid de sulf care provine din reducerea acidului sulfuric și parțial din grupele sulfonice ale acizilor lignosulfonici. Prezența grupelor SO_3H^-, $CH_2SO_3H^-$, OH^- și $COOH^-$, face ca rășina obținută prin tratarea cu acid sulfuric să poată juca rolul unui bun schimbător de ioni, acționînd ca schimbător de cationi.

Cationiți pe bază de lignină pot fi obținuți fie prin tratarea lignosulfonaților alcalini sau alcalino-pămîntoși cu acid sulfuric concentrat, fie prin condensarea acizilor lignosulfonici cu formaldehidă (1), (2), (3), (6).

Pentru obținerea cationiților, prin tratarea cu acid sulfuric, se precipită din soluțiile bisulfitice reziduale (prin tratarea cu lapte de var) lignosulfonați bazici de calciu, care cu sodă se transformă în sărurile respective de sodiu. Acestea se tratează cu acid sulfuric concentrat, produsul de reacție se evaporă la sec, iar rezidiul se usucă la 130°C. Se obține astfel o rășină neagră, insolubilă în apă, rezistentă din punct de vedere mecanic, care poate fi granulată (1), (2), (3), (6), (7).

Capacitatea de schimb a cationiților, obținuți ca mai sus, depinde de conținutul de sulf al rășinii, legat sub formă de grupe sulfonice. Prin condensarea acizilor lignosulfonici cu formaldehidă se obțin cationiți ase-

---

*) Lucrare prezentată la Sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București din 18—19 octombrie 1958.

mănători cu cei obţinuţi prin condensarea derivaţilor sulfonaţi ai fenolului cu formaldehidă.

După unii autori se pot obţine cationiţi prin condensarea acizilor lignosulfonici cu rezorcină, acid fenol-sulfonic, sau cu acid salicilic.

PARTEA EXPERIMENTALĂ

Pentru obţinerea unor cationiţi pe bază de lignină, noi am folosit ca materie primă sărurile de sodiu şi de calciu ale acizilor lignosulfonici. Din lignosulfonaţii de sodiu, cu un conţinut de 3,19% S, prin tratare cu acid sulfuric 98%, la temperatura obişnuită, am obţinut următorii cationiţi:

L_{11} prin tratare cu acid sulfuric conc. în raportul gravimetric 1/1 *)
$L_{11,5}$ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 1/1,5
L_{12} „ „ „ „ „ „ „ „ „ 1/2
$L_{12,5}$ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 1/2,5
L_{13} „ „ „ „ „ „ „ „ „ 1/3.
L_F prin condensare cu formaldehidă.

Din lignosulfonaţii de calciu, cu un conţinut de 3,2% sulf, am preparat numai un singur cationit (L_C) prin tratare cu acid sulfuric (o parte lignosulfonat de calciu la două părţi acid sulfuric 98%). Cationiţilor obţinuţi prin tratare cu acid sulfuric, le-am determinat capacităţile de schimb pentru următorii cationi:

$$Ca^{2+},\ Mg^{2+}\ Fe^{3+},\ Ag^{+},\ Cr^{3+}.$$

Cationiţii i-am folosit sub forma R — H, iar metoda întrebuinţată a fost cea statică; într-un flacon de sticlă cu dop şlefuit s-au agitat cantităţi anumite de cationiţi cu soluţii apoase de azotaţi conţinînd 0,1% Me, timp de 30 minute, la temperatura obişnuită.

Rezultatele obţinute sînt trecute în tabela de mai jos.

Tabela 1

Capacităţile de schimb ale cationiţilor obţinuţi din lignosulfonat de sodiu, tratat cu acid sulfuric 98%

Cationiţi	Ca mech/g	Mg mech/g	Fe mech/g	Cr mech/g	Ag mech/g
L_{11}	0,30	0,25	0,41	0,40	0,56
$L_{11,5}$	0,42	0,40	0,52	0,51	0,64
L_{12}	0,53	0,51	0,65	0,62	0,68
$L_{12,5}$	0,49	0,42	0,58	0,56	0,62
L_{13}	0,35	0,31	0,53	0,52	0,60
L_C	0,40	0,33	0,61	0,60	0,62

Din rezultatele de mai sus se constată următoarele:

Raportul optim de condensare la temperatura ordinară, este 1/2, adică o parte lignosulfonat de sodiu la două părţi acid sulfuric 98%.

*) *O parte lignosulfonat de sodiu la o parte acid sulfuric 98%.*

Cationiții respectivi, obținuți din lignosulfonați de sodiu, au capacități de schimb mai mari de cît cei obținuți din lignosulfonați de calciu, în aceleași condițiuni de preparare.

Capacitatea de schimb a cationiților crește cu greutatea atomică a metalului reținut.

Pentru determinarea variației capacității de schimb cationic cu pH-ul soluției de electrolit, am experimentat cationitul L_{12} (cu cea mai mare capacitate de schimb) și diverse soluții de săruri conținînd 0,1% Me. S-a determinat astfel, capacitatea de schimb a cationitului L_{12} pentru cationii: Mg^{2+}, Ca^{2+}, Cr^{3+}, Fe^{3+}, Mn^{2+}, Ni^{2+}, Cu^{2+}, Zn^{+}, la valorile pH-ului soluțiilor sărurilor respective de: 1,5; 3,5; 5,5; 6,5 în mech/g.

Rezultatele obținute sînt date în tabela 2 și reprezentate grafic în fig. 1.

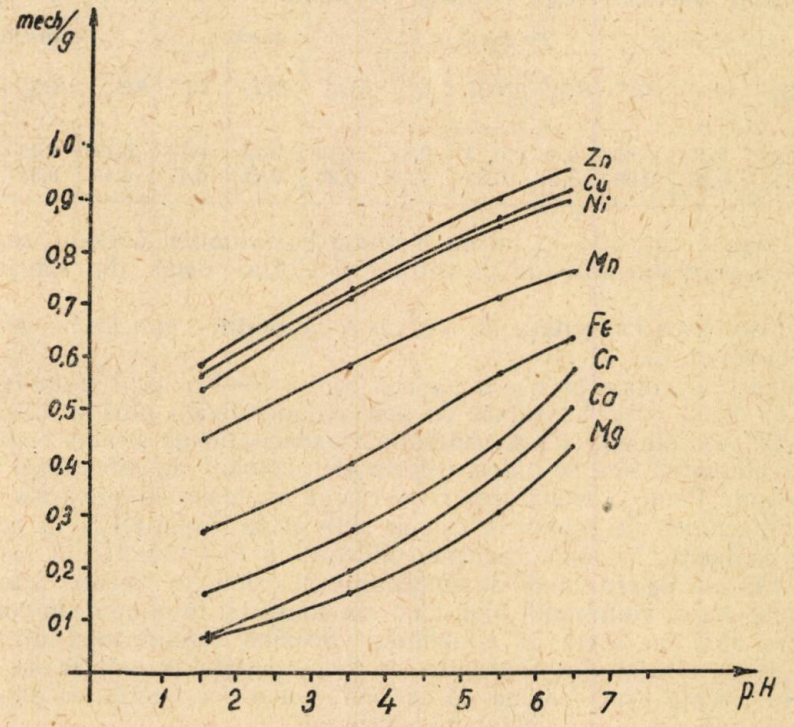


Fig. 1

Tabela 2

Variația capacității de schimb a cationitului L_{12} cu pH-ul soluțiilor de electroliți

Cationi	pH=1,5	pH=3,5	pH=5,5	pH=6,5	Observații
Cu^{2+}	0,53	0,72	0,87	0,92	S-a folosit sol. de $CuSO_4$ cu 0,1% Cu
Zn^{2+}	0,58	0,76	0,90	0,97	„ „ „ „ $ZnSO_4$ cu 0,1% Zn
Ni^{2+}	0,54	0,71	0,85	0,91	„ „ „ „ $Ni(NO_3)_2$ cu 0,1% Ni
Mn^{2+}	0,45	0,53	0,71	0,73	„ „ „ „ $MnSO_4$ cu 0,1% Mn
Cr^{2+}	0,17	0,28	0,43	0,62	„ „ „ „ $Cr(NO_3)_3$ cu 0,1% Cr
Fe^{2+}	0,27	0,39	0,58	0,64	„ „ „ „ $Fe(NO_3)_3$ cu 0,1% Fe
Mg^{2+}	0 06	0,15	0,31	0,44	„ „ „ „ $Mg(NO_3)_3$ cu 0,1% Mg
Ca^{2+}	0,07	0,19	0,38	0,51	„ „ „ „ $Ca(NO_3)_2$ cu 0,1% Ca

Din tabela 2 și fig. 1 se constată o creștere a capacității de schimb a cationitului cu creșterea pH-ului soluției.

Se constată de asemenea că din soluțiile mai acide (pH $< 3,5$), zincul, cuprul și nichelul pot fi separați ușor de calciu și magneziu.

Separarea zincului de magneziu, din soluțiile de azotați cu pH $< 1,5$ se poate efectua cantitativ.

Pentru determinarea influenții anionilor din soluțiile de electroliți asupra capacității de schimb am cercetat capacitatea de schimb a cationiților L_F și L_{12} pentru cationii Ca^{2+} și Fe^{3+}, din soluții de sulfați, azotați și cloruri, la pH 3,5 și 6,5.

Rezultatele determinărilor sînt date în tabela 3.

Tabela 3

Influența anionului asupra capacității de schimb a cationiților L_F și L_{12}

pH	Ca mech/g			Fe mech/g			Ca mech/g			Fe mech/g		
	SO_4^{2-}	NO_3^-	Cl^-	SO_4^{2-}	NO_3^-	Cl^-	SO_4^{2-}	NO_3^-	Cl^-	SO_4^{2-}	NO_3^-	Cl^-
3,5	0,28	0,37	0,35	0,66	0,75	0,68	0,18	0,22	0,19	0,19	0,42	0,23
6,5	0,52	0,63	0,60	0,71	0,83	0,80	0,28	0,49	0,47	0,45	0,65	0,51

Din datele cuprinse în tabela 3 reiese că schimbul cationic, se realizează mai ușor din soluțiile de azotați și cloruri decît din soluțiile de sulfați.

Determinarea capacității de schimb a cationiților, sub forma R — Na, pentru cationul Ca^{2+}.

S-au trecut cationiții L_{12} și L_F sub forma R—Na, prin tratarea cu o soluție de NaCl 10% și spălare cu apă demineralizată pînă la dispariția ionului Cl^- din efluent și s-au determinat capacitățile de schimb respective prin percolarea cu apă de ghips, trecută prin coloana de cationit cu viteza de 1 ml/min. Pentru compararea cu o rășină sintetică cationică s-a determinat capacitatea de schimb a rășinii slab acide Wofatit CN în aceleași condiții de lucru. În toate cazurile, efluentul a fost colectat în fracțiuni de cîte 100 ml, determinîndu-se conținutul de calciu în fiecare fracțiune. Experiența a fost continuată pînă cînd s-a constatat în efluent un conținut de calciu egal cu acela al afluentului. Scăzînd calciul total din toate fracțiunile de efluent din cantitatea de calciu aflată în soluția de sulfat de calciu trecută prin coloana de cationit, s-a dedus cantitatea de calciu reținut de cationit și s-a calculat în mech/g.

Rezultatele obținute sînt trecute în tabelele 4, 5, 6 și 7.

Tabela 4

Cationitul L_{12}. Schimbul 2 R — Na $\rightleftarrows$ R_2 — Ca

Nr. fracțiunii de efluent	1	2	3	4	5	6	7	Total
Cantitatea de lichid scurs ml.	100	100	100	100	100	100	100	700
mg. Ca în efluent	0	0	0	3,67	16,93	22,80	25,30	68,7
mg. Ca în afluent								177,1
mg. Ca reținut de cationit								108,4

Tabela 5

Cationitul L_F Schimbul $2R - Na \rightleftarrows R_2 - Ca$

Nr. fracţiunii de efluent	3	4	5	6	7	8	9	Total
Cantitatea de lichid scurs ml.	300	200	100	100	100	100	100	900
mg. Ca în efluent	0	0	3,90	6,90	16,60	20,80	23.40	71,60
mg. Ca în afluent								210,60
mg. Ca reţinut de cationit								139,00

Tabela 6

Cantionitul Wofatit CN Schimbul $2R - Na \rightleftarrows R_2Ca$

Nr. fracţiuni de efluent	5	6	7	8	9	10	11	Total
Cantitatea de lichid scurs ml.	500	100	100	100	100	100	100	11,00
mg. Ca în efluent	0	0	1,56	31,2	11,92	16,22	22,00	54,82
mg. Ca în afluent								242,00
mg. Ca reţinut de cantiont								187,18

Pe baza datelor din tabelele 4, 5 şi 6 s-a făcut tabela centralizatoare 7. Rezultatele centralizate sînt reprezentate în fig. 2.

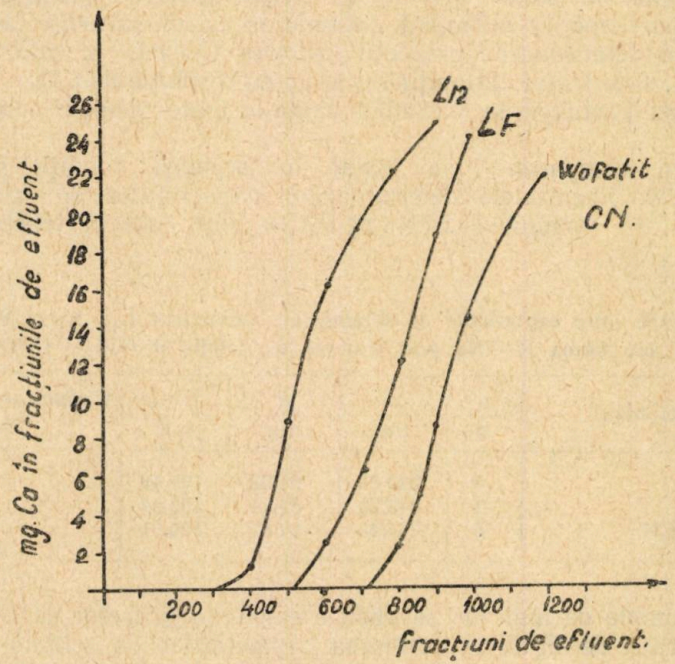


Fig. 2. Curbele de dedurizare a apei de ghips, cu ajutorul cationiţilor L_{12}, L_F şi Wofatit CN

Tabela 7

Comparația între capacitățile de schimb ale cationiților L_{12}, L_F și Wofatit CN (forma R — Na)

Cantionitul	$\frac{a}{g}$	$\frac{x}{mg}$	$\frac{y}{mg}$	$\frac{x-y}{mg}$	Capacitatea de schimb (Cs) în mech/g.
L_{12}	5	177,10	68,70	108,40	1,08
L_F	5	210,00	71,60	189,00	1,39
Wofatit CN	5	242,00	54,81	187,18	1,87

a — greutatea cationitului; x — mg Ca în afluent;
y — mg Ca în efluent; x — y — mg Ca reținut de cationit;

$$Cs = \frac{x-y}{20a} \text{ mech/g}$$

Din rezultatele de mai sus se constată că rășinile cationice respective sub forma R — Na au o capacitate de schimb mai mare de cît sub forma R — H. (vezi și tabelele 1, 2, 3).

Cationiții L_{12} și L_F preparați din lignosulfonați de sodiu au capacități de schimb destul de bune în comparație cu cationitul Wofatit CN.

Trebuie menționat că la tratarea cationiților sub forma R — H, cu o soluție de clorură de sodiu, la procesul de schimb ionic participă numai grupele puternic acide SO_3^-H și $CH_2 — SO_3H^-$; grupele slab acide $COOH^-$ participă la schimbul cationic în cazul sărurilor acizilor slabi.

Pentru determinarea prezenții grupelor $COOH^-$ în cationiții pe bază de lignină, s-au tratat cationiții L_{12} și L_F cu o soluție de CH_3— COONa 2 n, în care caz participă la schimbul cationic toate grupele acide ale cationitului.

Pentru comparație s-a tratat în aceleași condiții și cationitul Wofatit CN. Rezultatele determinărilor capacităților de schimb, pentru cationul Ca^{2+} (schimbul $2RNa \rightleftarrows R_2Ca$) sînt date în tabela 8.

Tabela 8

Comparație între capacitățile de schimb ale cationiților L_{12}, L_F și Wofatit CN, aduși sub forma R — Na prin tratarea cu soluția de CH_3 — COONa 2 n.

Cantionitul	$\frac{a}{g}$	$\frac{x}{mg}$	$\frac{y}{mg}$	$\frac{x-y}{mg}$	Capacitatea de schimb mech/g
L_{12}	5	229,68	94,22	135,46	1,35
L_F	5	245,20	65,11	180,09	1,80
Wofatit CN	5	264,48	67,67	196,81	1,96

Din datele de mai sus se deduce existența grupelor $COOH^-$ în cationiții pe bază de lignină; creșterea capacităților de schimb se datorește participării acestor grupe la procesul de schimb cationic alături de grupele sulfonice.

CONCLUZII

1. Cationiții obținuți prin tratarea lignosulfonaților alcalini și alcalino-pământoși cu acid sulfuric 98%, la temperatura ordinară, precum și cei obținuți prin condensarea acizilor lignosulfonici cu formaldehidă, au capacități de schimb apropiate de aceea a cationiților acizi slabi cum este Wofatitul CN.

2. Cationiții pe bază de lignină pot fi considerați ca schimbători selectivi, putînd fi utilizați pentru separarea cationilor Cu^{2+}, Ni^{+} și Zn^{+}, de Ca^{2+} și Mg^{2+} din soluții acide.

3. Avînd în vedere prețul de cost scăzut al cationiților pe bază de lignină, în comparație cu prețul de cost al rășinilor ionice, se întrevede posibilitatea utilizării lor economice pentru realizarea diferitelor procese tehnice de schimb cationic.

Laboratorul de tehnologie chimică generală
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *T. D. Ionescu* — Schimbători de ioni și de electroni. Institutul de documentare tehnică (I.D.T.), București, 1955.
2. *Z. Kin* — Premysl Chemiczny, nr. 5, pag. 231—235. 1955.
3. *Gh. Oprescu* — Revista de chimie, nr. 6, pag. 261—268. 1954.
4. *Nikitin* — Chimia ligninei, Moscova, 1951.
5. *O. Samuelson* — Folosirea schimbătorilor de ioni în chimia analitică, Moscova, 1955.
6. *Gh. Barbos* — Culegere de material documentar. Institutul de documentare tehnică (I.D.T.), București, 1955.
7. *Z. Kin* — Przeglad Papierniczy, nr. 4, pag. 83—91. 1953.
8. *C. Skolici* — Papir a Celulosa, nr. 3, pag. 54. 1951.
9. *H. Sorgato* — Chim. et. Ind., nr. 4, pag. 345. 1949.

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ НЕКОТОРЫХ КАТИОНИТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ЛИГНИНА

(Краткое содержание)

В настоящей работе изучаются свойства некоторых катионитов, полученных из лигносульфонатов натрия и кальция, путём обработки 98% серной кислотой или путём кондеисации лигносульфонных кислот с формальдегидом.

Установлено, что эти катиониты обладают хорошей обмениваемостью, в особенности когда они используются в натриевом виде.

Имея в виду малую себестоимостью катионтов, основанных на лигнине, по сравнению с себестоимостью катионитов, основанных на синтетических смолах, предвидится возможность их применения при обработке питьевой и промышленной воды, а также при различных химических и гидрометаллургических процессах, основанных на ионном обмене.

AN INVESTIGATION OF PROPERTIES OF SOME CATIONITES OBTAINED FROM LIGNIN

(Summary)

The present work is an investigation of properties of some cationites obtained from sodium and calcium sulfonates, by means of 98% sulphuric acid-treatment or condensation of lignosulfonic acids with formaldehyde.

It has been stated that these cationites have good change capacity, especially when they are used in sodic form.

In view of the fact that the cost of lignin cationites is considerably lower than that of the synthetical resin cationites, the use of the former to industrial and potable water-treatment, as well as to different chemical and hydrometallurgical processes based on ionic change, opens large possibilities.

L'ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DES QUELQUES CATIONITES OBTENUS DE LIGNINE

(Résumé)

Cet ouvrage presente l'étude des propriétés des quelques cationites obtenus en traitant les lignosulfonates de sodium et calcium avec de l'acide sulfurique a 98% conc., ou en condensant les acides lignosulfoniques avec l'aldehyde formique. On constate, que ces cationites ont des capacités d'echange acceptables, surtout lorsque on les utilise sous la forme sodique.

Considerant le prix de revient de ces cationites qui este beaucoup plus bas que celui des cationites preparés en partant des resines synthetiques, on entrevoit la possibilité d'ppliquer les premiers tant au traitement des eaux potables et industrielles, que dans les divers procédés chimiques et hydrometallurgiques, qui utillisent les echangeurs d'ions.

UNTERSUCHUNG DER EIGENSCHAFTEN EINIGER AUS LIGNIN GEWONNENEN KATIONITEN

(Zusammenfassung)

Die vorliegende Arbeit stellt eine Untersuchung der Eigenschaften einiger Kationiten, dar, die aus Natrium-und Kalziumsulfonaten, durch Behandlung mit 98% Schwefelsäure oder durch Kondensation der Lignosulfonsäuren, mit Formaldehyd, erzielt wurden.

Es wurde dabei festgestellt dass diese Kationiten gute Wechselfähigkeit beherschen, besonders wenn sie natriumförmig verwendet werden. Da die Ligninkationiten weitaus billiger sind als die Ersatzharzkationiten, ist die Verwendung der ersteren zur Betriebsanlagen-und Trinkwasserbehandlung wie auch bei verschiedenen, mit zugrundeliegendem Ionenwechsel, chemischen und hydrometallurgischen Prozesse, aussichtsreich.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 3

CÎȚIVA AGENȚI TENSIO-ACTIVI ÎN RECUPERAREA ȚIȚEIULUI DINTR-O CAROTĂ ARTIFICIALĂ

de IOSIF DRIMUS, ION ADAMACHE și CRINA LĂZESCU

Creșterea producției de țiței se poate realiza atît prin punerea în exploatare a unor zăcăminte noi, cît și prin aplicarea metodelor de menținerea presiunii și de recuperare secundară, ultima metodă aplicîndu-se la zăcămintele care au ajuns la un stadiu de epuizare aproape completă a energiei conținute.

În prezent se realizează prin metode primare de exploatare, factori de recuperare care pot să ajungă, în cazul unor zăcăminte obișnuite, pînă la 30—40%.

Metodele de menținerea presiunii și de recuperare secundară au ca obiectiv obținerea unor cantități suplimentare de țiței, care să conducă la mărirea factorului de recuperare, ajungîndu-se în unele cazuri pînă la dublarea valorii acestuia față de cel obținut prin metode primare de exploatare..

Dat fiindcă în R.P.R. există zăcăminte vechi la care se pune problema aplicării unor metode de recuperare secundară, în lucrarea de față se vor prezenta rezultatele unor cercetări cu caracter orientativ, care au avut ca obiectiv mărirea eficacității procesului de spălare cu apă, prin adaus de substanțe tensio--active la apa de injecție.

În stadiul actual de dezvoltare al chimiei coloizilor, nu există o teorie unitară care să explice complet mecanismul măriri factorului de recuperare secundară în cazul utilizării apei tratate cu substanțe tensio-active. Se poate presupune că acest factor depinde de: tensiunea superficială și interfacială, căldura de udare, de solubilitatea micelară a țițeiului, de solubilitatea agentului tensio-activ în țiței etc. În afară de acești factori mai intervin: natura țițeiului, compoziția chimică și granulometria rocii, precum și factori mecanici ce duc la modificarea valorii rației de mobilitate, ε dată de relația:

$$\varepsilon = \frac{\frac{K_t}{\eta_t}}{\frac{K_t}{\eta_i}}$$

unde: K = permeabilitatea mD
η = viscozitatea dinamică C. p.
(Indicii i și ț se referă la apa de injecție și respectiv la țițeiului).

Expunerea unei metode și descrierea unui aparat pentru determinarea eficienței de recuperare

Se va denumi eficiență de recuperare (Er) diferența dintre factorul de recuperare (Ft) obținut la spălarea unei carote artificiale, cu o soluție

de agent tensio-activ și factorul de recuperare (Fn), obținut în condiții identice, cu apă netratată.

Aparatul în care s-au efectuat determinările eficienței de recuperare este prezentat în fig. 1.

Aparatul se compune dintr-un tub de oțel, care se poate termostata prin intermediul unei mantale cu apă. Cele două capete ale tubului sînt

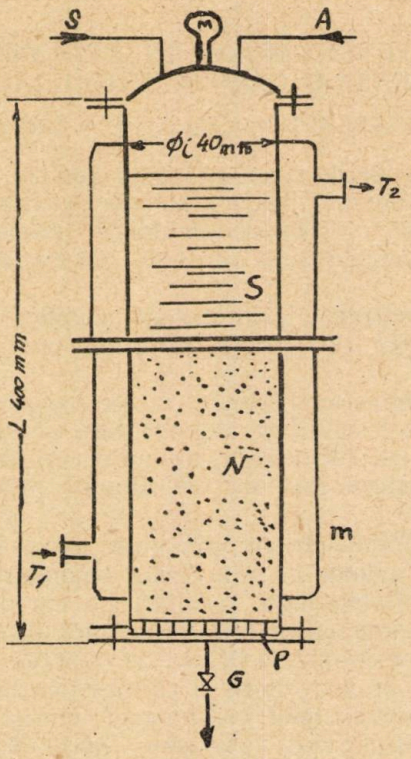


Fig. 1. Aparat pentru determinarea factorului de recuperare

M = manometru
S = soluție de spălare
A = aer comprimat
m = manta de termostatare
N = carotă de nisip neconsolidat
P = placă perforată
G = ventil de golire
T_1 T_2 = intrare-ieșire apă de termostrare
$\emptyset$ = 40 mm
L = 400 mm

prevăzute cu cîte o flanșe și intrările necesare pentru apă, țiței, soluție detergentă și aer comprimat, în partea superioară și cu un orificiu de eșire la partea inferioară. Dimensiunile principale sînt date în fig. 1. Deasupra flanșei inferioare se găsește o rondelă metalică groasă de 2 mm, prevăzută cu 20 de găuri de $\emptyset$ = 1 mm, răspîndite în mod uniform. Rondela este acoperită cu o sită metalică fină, pentru a împiedica eșirea nisipului în conducta de golire.

Pentru a obține rezultate reproductibile trebuie să se respecte procedeul de mai jos, care constă din următoarele faze:

a) Pregătirea carotei de nisip neconsolidat.

Se introduc în tub 100 g nisip uscat avînd granulația 0,10—0,20 mm și se tasează de fiecare dată în mod uniform.

b) Saturarea cu apă și determinarea porozității.

Țeava de golire (inferioară) se pune în legătură cu o trompă de vacuum. Prin partea de sus se introduc 300 ml apă. Se deschide robinetul de golire și se lasă să se scurgă cca. 200 ml apă, în decurs de 5 minute. Se închide robinetul și se varsă excesul de apă, prin răsturnare atentă. Prin cîntărirea tubului și din diferența față de greutatea satisfăcătoare pentru nevoile experienței. (In cazul experiențelor pe carota cu nisip de granulație 0,10—0,20 mm porozitatea este de 36%).

c) Saturarea cu țiței a carotei.

Peste nisipul saturat cu apă se toarnă 50 ml țiței. Se închide flanșa superioară și se ridică presiunea la 2—5 atm., după necesități. Se deschide robinetul de golire și se lasă să iasă apa cu o viteză de 2 ml pe minut. După cca. 30 ml apă apare prima picătură de țiței. Se lasă să iasă aproximativ 1 ml țiței, apoi se scade presiunea și se scoate excesul de țiței prin răsturnarea tubului. Cantitatea de țiței cu care este saturat nisipul se determină prin diferență.

In această fază țițeiul a înlocuit o parte din apa reținută în porii carotei. Cantitatea de apă rămasă în carotă este apa veterică (interstițială).

O dată aceste cifre determinate, pot servi pentru mai multe experiențe, cu condiția să nu varieze calitatea nisipului, felul țițeiului și temperatura. Se recomandă să se lucreze la temperaturile de 25°C, 50°C, 75°C.

d) Determinarea factorului de recuperare.

Peste carota saturată cu apă și țiței se adaugă apă sau soluție de detergent. Se ridică presiunea la 2—5 atm. și se reglează robinetul de golire în așa fel ca din aparat să iasă 2 ml pe minut. La început va ieși numai țiței care se prinde într-o biuretă. Se notează volumul de țiței obținut pînă la apariția apei curate. Se continuă trecerea soluției de detergent, pînă în momentul cînd practic nu se mai scoate țiței.

Factorul de recuperare este dat de raportul între cantitatea de țiței care a saturat carota și cantitatea de țiței care a fost scoasă prin trecerea unei cantități de apă sau soluție tensio-activă corespunzătoare la 5 volume de pori. Factorul de recuperare pînă la apariția apei se notează cu F_{n0}, iar cel obținut după ieșirea a 5 vol. de pori cu F_{n5}.

Experiențele prezentate în cadrul acestei lucrări au fost efectuate pe o carotă artificială. Pentru a obține rezultate mai apropiate de condițiile din zăcăminte se va putea lucra, în aparatul prezentat mai sus, pe carote sau nisipuri originale. Rezultatele care au fost obținute pe carote artificiale se consideră ca avînd un caracter orientativ.

Variația porozității și a factorului de recuperare Fn, în funcție de granulația nisipului

In vederea alegerii unui nisip de granulație potrivită, pentru carota artificială, s-a studiat variația porozității (P%) și a factorului de recuperare ($F_{n0} - F_{n5}$) în funcție de granulația nisipului. Rezultatele sînt prezentate în diagrama 2 și tabela 1.

Porozitatea poate varia teoretic, în cazul unui nisip ideal, cu granule sferice şi identice, între 47,64% (împachetare cubică) şi 25,95% (împachetare romboedrică) [1]. Valorile obţinute în această lucrare se încadrează între aceste date, cu tendinţă de creştere către granulometria fină. Aceasta nu înseamnă că porozitatea ideală ar fi funcţie de diametrul particulelor, ci se datoreşte faptului că la granulaţii mai mari împachetarea romboedrică se realizează mai uşor iar la granulaţii mai mici, se realizează mai greu.

Tabela 1

Variaţia factorului de recuperare în funcţie de proprietăţile carotei

Diametrul particulelor de nisip mm	Suprafaţă specifică cm^2/g	Factor recuperare F_{n0} %	Factor recuperare F_{n5}%	Porozitatea P%
0,06—0,1=0,08	283	25,25	34,37	38,00
0,1 —0,2 =0,15	150,20	30,75	43,0	35,75
0,2 —0,4 =0,3	75,40	41,60	48,50	35,10
0,4 —0,5 =0,45	50,20	43,50	50,35	33,85
0,5 —0,6 =0,55	41,10	46,90	51,58	33,00
0,6 —0,75=0,675	33,50	—	—	32,00
0,75—1=0,875	25,80	47,50	53,32	29,25

Factorul de recuperare scade brusc începînd de la granulaţia de 0,4 mm. La granulaţii sub 0,1 mm. permeabilitatea, fiind mică, se întîmpină dificultăţi în exploatarea aparatului din fig. 1, motiv pentru care s-a ales

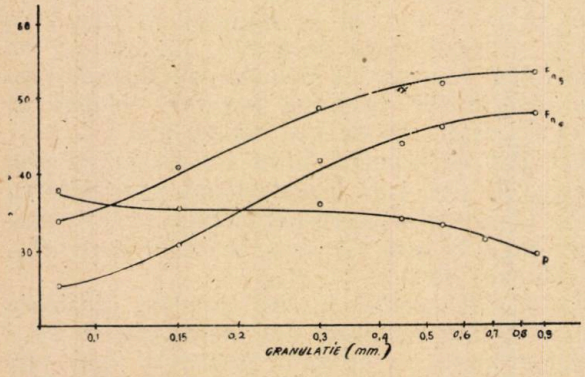


Fig. 2. Variaţia porozităţii şi a factorului de recuperare în funcţia de granulometria nisipului

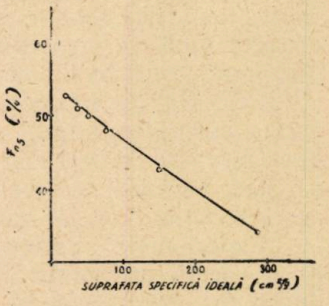


Fig. 3. Variaţia factorului de recuperare funcţie de suprafaţă specifică ideală

ca nisip standard acela cu granulaţia 0,10—0,20 mm., care dă un factor de recuperare F_{n0} de 30% şi F_{n5} de 43% avînd porozitatea de 36%. Prin această carotă apa şi ţiţeiul trec cu viteza prescrisă la o presiune de 2,5 atm.

Suprafaţa specifică ideală reprezintă suprafaţa totală a particulelor cuprinse într-un gram de nisip ideal. Suprafaţa specifică ideală este invers

proporţională cu densitatea şi cu diametrul particulei de nisip şi se determină prin relaţia :

$$S = \frac{3}{d \times \varnothing} \text{ cm}^2/\text{g}.$$

d = densitatea în g/cm²
$\varnothing$ = diametrul particulei de nisip în cm

Din determinările efectuate rezultă (vezi fig. 3) că factorul de recuperare este invers proporţional cu suprafaţa specifică ideală, în limitele care au fost explorate în figura respectivă.

Pentru a determina cantitatea de apă necesară spălării carotei se poate utiliza diagrama din fig. 4, unde se indică procentele de ţiţei recu-

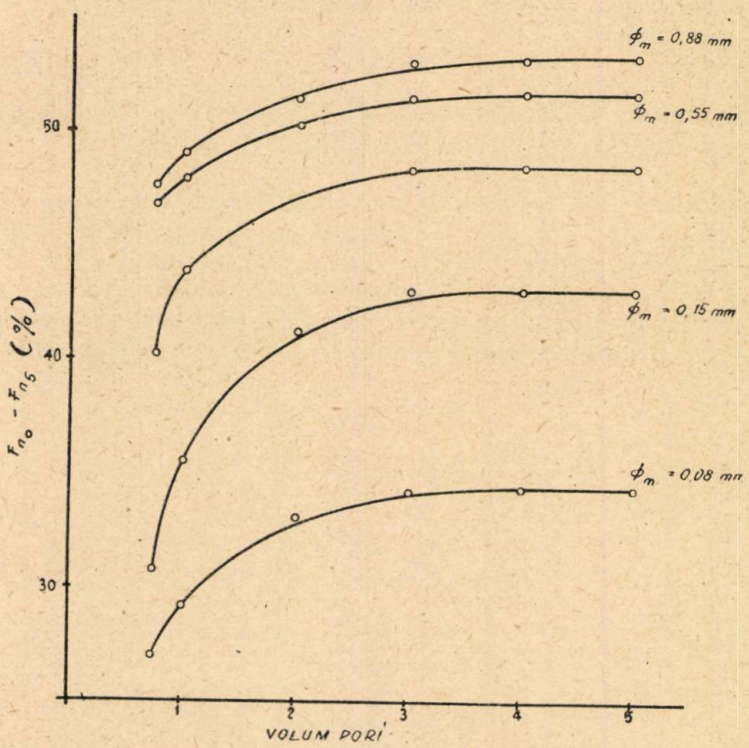


Fig. 4. Dependenţa între factorul de recuperare şi cantitatea de apă de spălare

perat din carota cu nisip de granulaţii diferite în funcţie de apa utilizată care este exprimată în volume de pori. Din examinarea acestei diagrame rezultă că o spălare cu mai mult de 4—5 volume de pori nu ameliorează cu nimic factorul de recuperare.

Toate determinările de mai sus au fost executate cu ţiţei din proba II.

In lucrările acestea sau folosit 4 calităţi de ţiţeiuri ale cărui caracteristici principale sînt arătate în *tabela 2.*

Tabela 2

Nr. Probe	Viscozitate c.p.				Greutate specifică	Tensiune superficială
	60°C	50°C	35°C	25°C		
I	2,903	3,501	6,134	8,041	0,885	—
II	2,012	2,275	3,394	5,380	0,849	26,97
III	—	65,772	230,15	432,22	0,948	—
IV	—	—	—	—	0,899	37,70

Factorul de recuperare la spălarea carotei standard cu apă creşte uşor cu temperatura şi anume de obicei cu 1,5% pentru o ridicare cu 10°C a temperaturii.

Încercări pentru mărirea factorului de recuperare cu ajutorul soluţiilor sărurilor de sodiu ale acizilor graşi sintetici

S-au utilizat sărurile de sodiu ale acizilor graşi sintetici bruţi, aşa cum rezultă de la instalaţia de distilare cu detentă după, îndepărtarea nesaponificabilelor II (2). Acest produs de culoare brună închisă conţine acizi normali cu 5 pînă la 26 atomi de carbon în moleculă. În urma faptului că sînt în amestec acizi cu 5 pînă la 14 atomi de carbon în moleculă, soluţia apoasă respectivă nu precipită cu apa sărată, ceea ce este

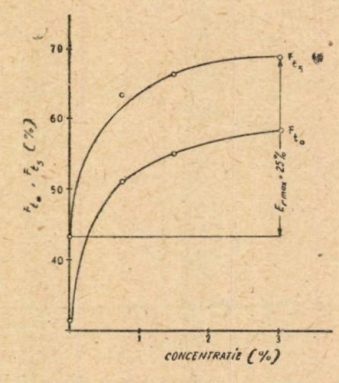


Fig. 5. Variaţia factorului de recuperare cu concentraţia soluţiei de A.G.A.

o condiţie esenţială în utilizarea acestor substanţe la recuperarea secundară a ţiţeiului.

Din graficul prezentat în fig. 5 rezultă că o soluţie de 1,5% are o eficienţă de 23%. O dublare a concentraţiei duce la o creştere neînsemnată a eficienţei. Toate aceste determinări au fost făcute pe o carotă standard şi cu ţiţei din proba nr. 2 (vezi tabela 2). Temperatura de lucru a fost 25°C.

Prin creşterea temperaturii eficienţa recuperării scade, în special în intervalul dintre 20°—40°C (vezi fig. 6). Încercări executate pe o carotă de granulaţie a nisipului 0,75—1 mm, au arătat o eficienţă nesatisfăcătoare şi în cazul concentraţiei de o,75% s-au obţinut chiar valori negative pentru eficienţă.

Încercările efectuate cu mersolaţi şi cu naftenaţi, substanţe care nu dau precipitate cu apa sărată, au dus tot la rezultate negative.

Considerăm că eficienţa satisfăcătoare, prezentată în fig. 5, se datoreşte nu atît proprietăţilor tensio-active ale substanţelor respective, ci

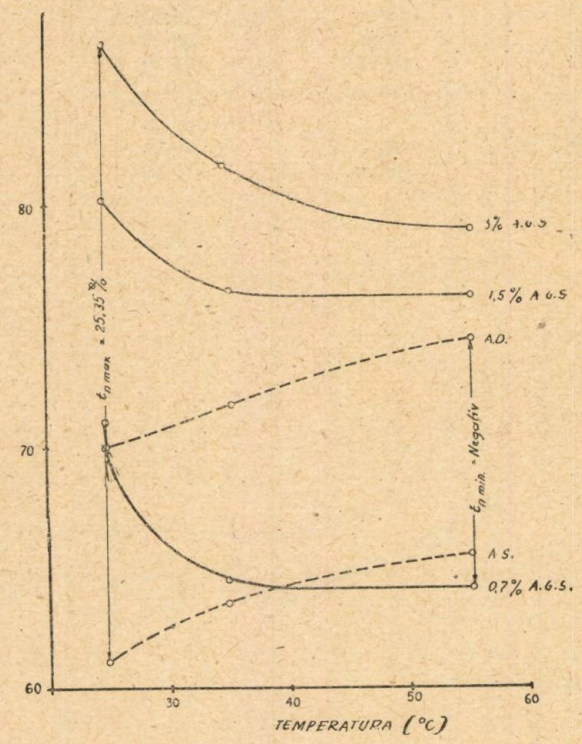


Fig. 6. Variaţia factorului de recuperare în funcţie de temperatură (pentru granulaţia 0,75—1 mm)
AD = apă obişnuită
AS = apă de sondă
AGA = Săruri de sodiu ale acizilor graşi sintetici

creşterii viscozităţii soluţiei, viscozitate care scade brusc cu temperatura, tocmai în intervalul dintre 25°—30°C.

Încercări de mărire a factorului de recuperare cu ajutorul soluţiilor de produs P.B.
(vezi colecţia de brevete R.P.R. 1959)

Precum rezultă din fig. 7, în cazul produsului P.B. se obţine o eficientă de 40% la temperatura obişnuită şi una de 20% la temperatura de 75°C. Concentraţiile utilizate au fost de ordinul 0,01—0,001%. Eficienţele obţinute pentru această substanţă sînt arătate în tabela 3.

Tabela 3

Concentraţia %		Factor de recuperare F_{t_0}%	Factor de recuperare F_{t_5}%	Eficienţa recuperării Er%
0,001	25°C	—	75,80	29,32
	45°C	62,40	71,85	23,10
	75°C	60,80	72,70	22,10
0,005	25°C	—	74,42	27,92
	45°C	58,25	69,10	20,45
	75°C	56,90	70,20	19,60
0,01	25°C	—	85,25	39,75
	45°C	59,0	70,20	21,55
	75°C	59,60	70,80	20,20
0,1	25°C	—	78,75	32,25

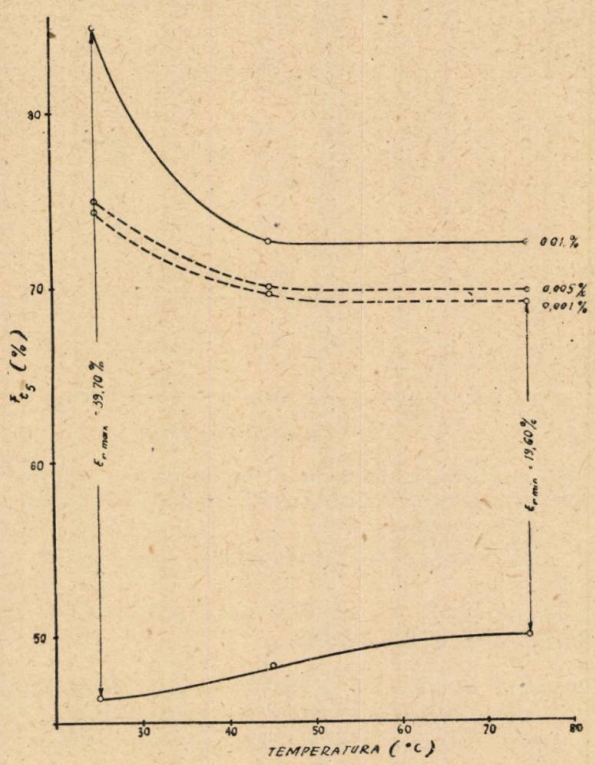


Fig. 7. Variaţia factorului de recuperare al produsului P. B.

Produsul P. B. are o bază de materii prime suficientă în R. P. R.

Concluzii.

În cadrul lucrării sînt prezentate considerațiuni preliminare privind recuperarea secundară a țițeiului din carote artificiale. Rezultatele obținute sînt încurajatoare pentru continuarea experiențelor.

Lucrările viitoare vor trebui să se apropie de condițiile naturale din zăcămînt și să țină seamă, între altele, de fenomenele de adsobție, care pot avea loc și de interacțiunile chimice între agentul tensio-activ și produsele organice sau neorganice din zăcămînt, la temperatura respectivă și la timp de reacție de ordinul lunilor și anilor.

Laboratorul de Chimie tehnologică
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Cristea N.* — Hidraulica subterană, Buc. Editura Tehnică, 1956.
2. *Drimus I.* — Fabricarea acizilor grași, Revista de Chimie A.S.I.T.
3. *Miller C.* și *Power H.* — Surfactant Influence on Flood recovery I.P.T., 1955.
4. *Scheneider, Grünwald* — Surfactant can hill Wather — injection rate, Oil and Gas, 1958.

К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ПОВЕРХНОСТНО АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ ПРИ ВТОРИЧНЫХ МЕТОДАХ ДОБЫЧИ НЕФТИ

(Краткое содержание)

Описывается серия предварительных исследований относительно нефтеотдачи, полученной исскуственным керном несцементированного песка.

Было исследовано влияние концентрации, температуры и гранулометрического состава песка на нефтеотдачу. Исследуя разные растворы поверхностно-активных веществ, были получены очень хорошие результаты прн использовании вещества P.B.

SOME TENSIO-ACTIVE AGENTS IN THE RECOVERY OF CRUDE-OIL FROM AN ARTIFICIAL CORE

(Summary)

A series of preliminary research regarding the recuperation of crude-oil from an artificial core, made from unconsolidated sand, are described.

The influence of the concentration, the temperature and granulation of the sand on the recovering factor, are studied herein. On tring sundry sollutions of tensio-active agents, remerkable results have been achieved with the P.B. product.

SUR DES AGENTS TENSIOACTIFS DANS LA RÉCUPÉRATION D'HUILE D'UNE CAROTTE ARTIFICIELLE

(Résumé)

On décrit une série de recherches préliminaires, concernant la récupération d'huile d'une carotte artificielle de sable non consolidé.

On étudie l'nfluence de la concentration, de la température et de la granulation du sable sur le facteur de récupération. En essayant diverses solutions d'agents tensio-actifs, on a abtenu des résultats remarquables avec le produit P.B.

EINIGE OBERFLÄCHEN AKTIVEN STOFFE BEI DER OELVERDRÄNGUNG AUS KÜNSTLICHEN KERNEN

(Zusammenfassung)

Die Verfasser beschreiben eine Reihe von einleitenden Forschungen in Hinblick auf die Oelverdrängung aus künstlichen, unvertestigten Sandkernen.

Es wird die Einwirkung von Konzentration, Temperatur und Korngrösse auf den Entölungsgrad erforscht, wenn Wasser und zwei oberflächen aktiven Lösungen, von denen eine bemerkenswerte Resultate ergab, verwendet wird.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 3

ELECTROTEHNICA

624.392

ASUPRA DEFINIRII DENSITĂȚII DE VOLUM A FORȚEI *)

de ALEXANDRU TIMOTIN

Densitatea de volum a forței este o mărime derivată introdusă în Fizica mediilor continue pentru caracterizarea locală a acțiunilor ponderomotoare ale unui cîmp de forțe. În general această mărime e definită de limita cîtului dintre forța elementară de volum exercitată de cîmp asupra unei mici porțiuni de corp și volumul acestei mici porțiuni, cînd ultimul tinde către zero. Cum asupra unei mici porțiuni dintr-un corp se exercită forțe și de către materialul învecinat — sub formă de tensiuni localizate superficial — numai suma dintre forța de volum și rezultanta forțelor superficiale e o mărime accesibilă în principiu măsurării. De aceea se pune problema stabilirii condițiilor de univocitate ale definiției densității de volum a forței, problemă pe care o examinăm mai jos și care prezintă importanță în stabilirea solicitărilor la care e supus un material în cîmpul electromagnetic.

§ 1. Fie $\bar{f}$ densitatea de volum a forței; $\overline{\overline{T}}$ tensorul simetric al tensiunilor; $\bar{\gamma} = \tau \bar{v}$ densitatea de volum a impulsului mecanic al corpului; $\bar{v}$ viteza locală (presupusă variind continuu; τ densitatea de masă care satisface legea de conservare (ecuația de continuitate) $\frac{d\tau}{dt} + \tau \operatorname{div} \bar{v} = 0$; p densitatea de volum a puterii transmisă de cîmp corpurilor, reversibil (cum e puterea transmisă în procesul de polarizare electrică și magnetică lineară a materialelor) sau ireversibil (cum e puterea transmisă prin efect Joule-Lenz); $\bar{q}$ vectorul densitate a fluxului de căldură; ε densitatea de volum a energiei corpului (care include și energia cinetică). Ecuația de mișcare a materialului conținut într-un volum V_Σ (mărginit de suprafața închisă Σ cu normala exterioară $\bar{n}$) și ecuația corespunzătoare a bilanțului energetic sînt:

$$\int_{V_\Sigma} \bar{f}\, dv + \oint_{\Sigma} [\bar{n} \cdot \overline{\overline{T}}]\, dA = \frac{d}{dt} \int_{V_\Sigma} \bar{\gamma}\, dv \tag{1}$$

$$\int_{V_\Sigma} (\bar{f}\bar{v} + p)\, dv + \oint_{\Sigma} ([\bar{n} \cdot \overline{\overline{T}}]\, \bar{v} - \bar{q}\bar{n})\, dA = \frac{d}{dt} \int_{V_\Sigma} \varepsilon\, dv \tag{2}$$

dv și dA fiind elementele de volum și de arie.

*) Lucrare prezentată la Sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București din 18—19 octombrie 1958.

În afară de aceste două relații *singurele relații în cari mai intervin mărimile $\bar{f}$ și p sînt ecuațiile corespunzătoare ale bilanțului de impuls și de energie ale cîmpului fizic care le condiționează.* Dacă $\bar{g}$ e densitatea de volum a impulsului, $\overline{\overline{\Gamma}}$ tensorul densitate a fluxului de impuls $\bar{S}$ vectorul densitate a fluxului de energie și w densitatea de volum a energiei ale acestui cîmp, ecuațiile sînt

$$-\int_{V_\Sigma} \bar{f}\, dv - \oint_{\Sigma} [\bar{n}\cdot\overline{\overline{\Gamma}}]\, dA = \int_{V_\Sigma} \frac{\partial \bar{g}}{\partial t}\, dv \tag{3}$$

$$-\int_{V_\Sigma} (\bar{f}\,\bar{v} + p)\, dv - \oint_{\Sigma} \bar{S}\,\bar{n}\, dA = \int_{V_\Sigma} \frac{\partial w}{\partial t}\, dv. \tag{4}$$

(Trebuie menționat că natura vectorială, respectiv tensorială, a mărimilor $\bar{S}$ și $\bar{q}$, respectiv $\overline{\overline{\Gamma}}$ și $\overline{\overline{T}}$, rezultă chiar din forma generală compatibilă cu principiul localizării tuturor acțiunilor fizice, a legilor de conservare a impulsului și energiei [1], [2], [3], [4]).

Funcțiile de punct $\overline{\overline{T}}$, ε, $\overline{\overline{\Gamma}}$, $\bar{g}$, $\bar{S}$, w care intervin în relațiile de mai sus și cari nu sînt direct măsurabile nu pot fi determinate univoc de aceste relații la $\bar{f}$, p, $\bar{q}$, γ dați decît dacă se impune condiția ca ele să fie *funcții de starea* locală și instantanee a corpurilor respectiv a cîmpului. Această condiție definitorie este de mult cunoscută din teoria elasticității și din teoria cîmpului. Ele sînt deci funcții de $\bar{r}$ și t numai prin intermediul mărimilor de stare, corespunzătoare. Dacă notăm cu simbolul $\mathcal{C}$ ansamblul mărimilor de stare ale cîmpului (cum sînt S, $\bar{D}$, $\bar{B}$, $\bar{H}$ pentru cîmpul electromagnetic), cu $\mathcal{C}'$ ansamblul mărimilor de stare comune, adică al funcțiilor de starea cîmpului care sînt totodată mărimi de stare ale corpurilor (cum sînt polarizația electrică și magnetizația $\bar{P} = \bar{D} - \varepsilon_0 \bar{E}$; $\bar{M} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{H}$) și cu $\mathfrak{M}$ ansamblul mărimilor de stare ale corpului și numai ale lui (cum sînt tensorul deformațiilor $\overline{\overline{X}}$ cu componentele $X_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$, tensorul viteselor de deformație $\overline{\overline{Y}} = \frac{d\overline{\overline{X}}}{dt}$ cu componentele $Y_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)$ temperatura, densitatea de masă τ, viteza $\bar{v} = \frac{d\bar{u}}{dt}$), precizarea acestei dependențe se poate face scriind

$$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}(\mathfrak{M}, \mathcal{C}') \quad (5) \quad ; \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathfrak{M}, \mathcal{C}') \quad (6)$$

$$\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\overline{\Gamma}}(\mathcal{C}); \quad \bar{S} = \bar{S}(\mathcal{C}); \quad \bar{g} = \bar{g}(\mathcal{C}); \quad w = w(\mathcal{C}) \quad (7)$$

Toate funcțiunile de starea cîmpului, adică de $\mathcal{C}$ sau $\mathcal{C}'$ mai au proprietatea că se anulează identic în „lipsa" cîmpului adică în condițiile

de anulare a tuturor mărimilor de stare ale acestuia, într-o regiune de dimensiuni finite în jurul punctului considerat.

Vom nota cu $\mathcal{C}_0$, respectiv $\mathcal{C}_0'$ această stare „identic nulă a cîmpului ($\bar{E} = 0$, $\bar{D} = 0$, $\bar{B} = 0$, $\bar{H} = 0$ în cazul cîmpului electromagnetic).

În corpurile elastice, relația (5) include legea lui Hooke. iar $\mathcal{C}'$ poate cuprinde prevederea eventualei dependențe de starea de polarizație electrică și magnetică. Din punct de vedere termodinamic ecuațiile (6) care sînt legi de material, reprezintă, la evoluții reversibile, ecuațiile caracteristice termice. Ecuațiile (7) sînt teoreme generale ale teoriei cîmpului respectiv.

Formele locale ale relațiilor (1), (2), (3) și (4) se obțin considerînd volume V_Σ arbitrar de mici și aplicînd teorema Gauss-Ostrogradski

$$(1') \quad \bar{f} + \operatorname{Div} \overline{\overline{T}}\,(\mathfrak{M}, \mathcal{C}') = \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} + \operatorname{Div}(\bar{v}\,;\,\bar{\gamma}) \;^*)$$

$$(2') \quad \bar{f}\,\bar{v} + p + \operatorname{div}[\overline{\overline{T}}\,(\mathfrak{M}, \mathcal{C}') \cdot \bar{v}] - \operatorname{div} \bar{q} = \frac{d\varepsilon(\mathfrak{M}, \mathcal{C}')}{dt} + \varepsilon(\mathfrak{M}, \mathcal{C}') \operatorname{div} \bar{v}$$

$$(3') \quad \bar{f} = -\operatorname{Div} \overline{\overline{\Gamma}}\,(\mathcal{C}) - \frac{\partial \bar{g}(\mathcal{C})}{\partial t}$$

$$(4') \quad \bar{f}\,\bar{v} + p = -\operatorname{div} \bar{S}\,(\mathcal{C}) - \frac{\partial w\,(\mathcal{C})}{\partial t}.$$

Vom folosi în cele de mai jos notația $\equiv$ pentru egalități valabile oricare ar fi corpul considerat și, în particular, oricare ar fi proprietățile lui de material.

În problemele obișnuite ale mecanicii mediilor continue se studiază unicitatea definirii tensiunilor $\overline{\overline{T}}$ din (1) la $\bar{f}$ și $\bar{v}$ dați cu concluzia că existența unei funcții de stare (5) constituie o condiție suficientă pentru această unicitate. Cu alte cuvinte, ecuația (1') nu poate avea soluții în $\overline{\overline{T}}$, neidentic nule la $\bar{f} = 0$, $\bar{v} = 0$, independent de proprietățile de material:

$$\operatorname{Div} \overline{\overline{T}}\,(\mathfrak{M}, \mathcal{C}') \equiv 0 \rightarrow \overline{\overline{T}}\,(\mathfrak{M}, \mathcal{C}') \equiv 0. \tag{8}$$

În teoria cîmpului se studiază unicitatea definirii mărimilor $\overline{\overline{\Gamma}}$, $\bar{S}$, $\bar{g}$ și w (cari sînt chiar componentele tensorului energie-impuls) cu concluzia că definirea lor ca funcții de stare (7) e suficientă. Ecuațiile (3) și (4) nu pot deci avea soluții neidentic nule la $\bar{f} = 0$; $p = 0$, independent de corpul considerat (în vid ele au asemenea soluții):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Div} \overline{\overline{\Gamma}}\,(\mathcal{C}) + \frac{\partial \bar{g}\,(\mathcal{C})}{\partial t} &\equiv 0 \\ \operatorname{div} \bar{S}\,(\mathcal{C}) + \frac{\partial w\,(\mathcal{C})}{\partial t} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} &\overline{\overline{\Gamma}} \equiv 0, \quad \bar{g} \equiv 0 \\ &\bar{S} \equiv 0, \quad w \equiv 0 \end{aligned}\right. \tag{9}$$

*) Cu $(\bar{v}\,;\,\bar{\gamma})$ se notează tensorul diadic a cărui componentă curentă c_{jk} este $c_{jk} = v_j \gamma_k$.

§ 2. Problema determinării unicității lui $\overline{\overline{T}}, \overline{\overline{\Gamma}}, \bar{g}, \bar{S}$ și w nu e însă pusă corect deoarece p și $\bar{f}$ *nu sînt mărimi direct măsurabile.* Se pune așadar problema determinării unice a mărimilor cari nu sînt direct măsurabile (de fapt definite implicit de (1), (2), (3), (4), (5), (6) și (7) deoarece ele nu mai apar în nici o altă relație a Fizicii) în funcție de mărimile cari sînt direct măsurabile adică de mărimile de stare ale cîmpului ($\mathfrak{C}$) și ale corpului ($\mathfrak{M}$ și $\mathfrak{C}'$).

Fie $\bar{f}', p', \overline{\overline{T}}', \varepsilon', \overline{\overline{\Gamma}}', \bar{g}', \bar{s}', w'$ și $\bar{f}'', p'', \overline{\overline{T}}'', \varepsilon'', \overline{\overline{\Gamma}}'', \bar{g}'', \bar{s}'', w''$ două grupuri de astfel de mărimi cari prin ipoteză corespund unor aceloraşi $\bar{v}, \gamma, \bar{q}, \overline{\overline{X}}, \overline{\overline{Y}}, \theta$ (temperatura) etc. Fie $\bar{f}^d = \bar{f}' - \bar{f}''$; $p^d = p' - p''$; $\overline{\overline{T}}^d = \overline{\overline{T}}' - \overline{\overline{T}}''$; $\varepsilon^d = \varepsilon' - \varepsilon''$; $\overline{\overline{\Gamma}}^d = \overline{\overline{\Gamma}}' - \overline{\overline{\Gamma}}''$; $\bar{g}^d = \bar{g}' - \bar{g}''$; $\bar{S}^d = \bar{S}' - \bar{S}$; $w^d = w' - w''$ mărimile *„diferență"* corespunzătoare. Ele trebuie să satisfacă ecuațiile obținute scăzînd una din alta cele două grupuri de ecuații (1)′...(4)′ satisfăcute de $\bar{f}'$, respectiv $\bar{f}''$, etc. independent de proprietățile corpului considerat (în caz contrar experiențe făcute în medii diferite ar putea stabili o diferență măsurabilă între cele două grupuri de mărimi)

$$\bar{f}^d + \operatorname{Div} \overline{\overline{T}}^d (\mathfrak{M}, \mathfrak{C}') \equiv 0 \tag{11}$$

$$\bar{f}^d \bar{v} + p^d + \operatorname{div} [\overline{\overline{T}}^d (\mathfrak{M}, \mathfrak{C}') \cdot \bar{v}] \equiv \frac{\mathrm{d}\, \varepsilon^d (\mathfrak{M}, \mathfrak{C}')}{\mathrm{d}t} + \varepsilon^d (\mathfrak{M}, \mathfrak{C}') \operatorname{div} \bar{v} \tag{12}$$

$$\bar{f}^d \equiv - \operatorname{Div} \overline{\overline{\Gamma}}^d (\mathfrak{C}) - \frac{\partial \bar{g}^d (\mathfrak{C})}{\partial t} \tag{13}$$

$$\bar{f}^d \bar{v} + p^d \equiv - \operatorname{div} \bar{S}^d (\mathfrak{C}) - \frac{\partial w^d (\mathfrak{C})}{\partial t}. \tag{14}$$

Demonstrăm mai jos că aceste „identități" (în raport cu proprietățile particulare ale corpului considerat sau cu valorile particulare ale mărimilor de stare, care — într-un punct dat — sînt toate independente între ele) permit stabilirea formei generale a funcțiunilor „diferență", și, în particular, a termenilor de neunivocitate $\bar{f}^d$ și p^d din expresiile generale ale densității de volum a forței și a puterii.

§ 3. Înlocuind (13) în (11) se obține

$$\operatorname{Div} \overline{\overline{T}}^d (\mathfrak{M}, \mathfrak{C}') \equiv \operatorname{Div} \overline{\overline{\Gamma}}^d (\mathfrak{C}) + \frac{\partial \bar{g}^d (\mathfrak{C})}{\partial t}. \tag{15}$$

Membrul drept depinde numai de starea cîmpului de aceea $\overline{\overline{T}}^d$ poate diferi de o funcție de stare a cîmpului (adică de $\mathfrak{C}'$) numai cu o funcție care să satisfacă ecuația (8) și care e deci identic nulă. Rezultă deci că tensiunile diferență sînt exclusiv funcții de starea cîmpului

$$\overline{\overline{T}}^d (\mathfrak{M}, \mathfrak{C}') \equiv \overline{\overline{T}}^d (\mathfrak{C}') \tag{16}$$

iar (15) se scrie:

$$\operatorname{Div}\left[\overline{\overline{\Gamma}}^{d}(\mathcal{C}) - \overline{\overline{T}}^{d}(\mathcal{C}')\right] + \frac{\partial \bar{g}^{d}(\mathcal{C})}{\partial t} \equiv 0. \tag{17}$$

Aceasta e însă o ecuație de forma (9) care admite numai soluții identic nule. Rezultă

$$\overline{\overline{\Gamma}}^{d}(\mathcal{C}) \equiv \overline{\overline{T}}^{d}(\mathcal{C}'); \qquad \bar{g}^{d}(\mathcal{C}) \equiv 0 \tag{18}$$

și, cu (13)

$$\bar{f}^{d} \equiv -\operatorname{Div}\overline{\overline{T}}^{d}(\mathcal{C}'). \tag{19}$$

Au rămas nefolosite ecuațiile (12) și (14). Ținînd seama de (18) și (19) și dezvoltînd divergența produsului tensorului $\overline{\overline{T}}^{d}$ cu $\bar{v}$

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{T}}^{d} \cdot \bar{v}) = \bar{v}\operatorname{Div}\overline{\overline{T}}^{d} + (\overline{\overline{T}}^{d} \cdot \operatorname{grad})\bar{v} = -\bar{v}\bar{f}^{d} + \overline{\overline{T}}^{d} \cdot \overline{\overline{Y}} =$$

$$= -\bar{v}\bar{f}^{d} + \overline{\overline{T}}^{d} \cdot \frac{d\overline{\overline{X}}}{dt} \; *)$$

se obține, după scăderea ecuațiilor (12) și (14)

$$-\operatorname{div}\bar{S}^{d}(\mathcal{C}) - \frac{\partial w^{d}(\mathcal{C})}{\partial t} - \bar{v}\bar{f}^{d} + \overline{\overline{T}}^{d} \cdot \frac{d\overline{\overline{X}}}{dt} - \varepsilon^{d}(\mathfrak{M}, \mathcal{C}')\operatorname{div}\bar{v} \equiv \frac{d\varepsilon^{d}(\mathfrak{M}, \mathcal{C}')}{dt}. \tag{20}$$

§ 4. Pentru a interpreta corect ultima relație observăm că ea trebuie să subsiste la orice $\bar{v}$ și $\overline{\overline{Y}} = \frac{d\overline{\overline{X}}}{dt} = \text{def}\ \bar{v}$ și considerăm starea particulară a corpului cînd local el e în repaos și nedeformat ($\bar{v} = 0$; $\overline{\overline{X}} = 0$; $\overline{\overline{Y}} = 0$), stare pe care o notăm cu indicele inferior 0 ($\mathfrak{M}_0$). Rezultă

$$\operatorname{div}\bar{S}^{d}(\mathcal{C}) + \frac{\partial w^{d}(\mathcal{C})}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^{d}(\mathfrak{M}_0, \mathcal{C}')}{\partial t} \equiv 0$$

($\mathcal{C}$ și $\mathfrak{M}$ sînt local independente) sau

$$\operatorname{div}\bar{S}^{d}(\mathcal{C}) + \frac{\partial}{\partial t}\left[w^{d}(\mathcal{C}) + \varepsilon^{d}(\mathfrak{M}_0, \mathcal{C}')\right] \equiv 0. \tag{21}$$

Aceasta e însă o relație de forma (9), care admite numai soluții identic nule. Rezultă

$$\bar{S}^{d}(\mathcal{C}) \equiv 0; \qquad w^{d}(\mathcal{C}) \equiv -\varepsilon^{d}(\mathfrak{M}_0, \mathcal{C}'). \tag{22}$$

Introducînd aceste rezultate în (20), observînd că

$$\varepsilon^{d}\operatorname{div}\bar{v} = \varepsilon^{d}\overline{\overline{1}} \cdot \frac{d\overline{\overline{X}}}{dt}; \qquad \frac{\partial w^{d}}{\partial t} = \frac{dw^{d}}{dt} - \bar{v}\operatorname{grad}w^{d}$$

*) Produsul $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}$ a doi tensori este scalarul $\sum_j \sum_k A_{jk} B_{jn}$.

($\overline{\overline{1}}$ e tensorul unitate de componente δ_{jk}) și înmulțind cu dt, rezultă

$$d\underbrace{[\varepsilon^d(\mathfrak{M}, \mathcal{C}') + w^d(\mathcal{C})]}_{\Phi} \equiv [\overline{\overline{T}}^d(\mathcal{C}) - \overline{\overline{1}}\varepsilon^d(\mathfrak{M}, \mathcal{C}')]\, d\overline{\overline{X}} + [\operatorname{grad} w^d(\mathcal{C}) - \bar{f}^d]\, d\bar{u}. \tag{23}$$

Introducem funcțiunea Φ definită de suma densităților de energie ε^d și w^d. care în conformitate cu (22) se anulează la $\bar{v} = 0$ și $\overline{\overline{X}} = 0$ și care se reduce la ε^d în „lipsa" cîmpului:

$$\Phi = \Phi(\mathfrak{M}, \mathcal{C}) \equiv \varepsilon^d(\mathfrak{M}, \mathcal{C}') + w^d(\mathcal{C})$$

cu

$$\Phi(\mathfrak{M}_0, \mathcal{C}) \equiv 0\,; \qquad \Phi(\mathfrak{M}, \mathcal{C}_0) \equiv \varepsilon^d(\mathfrak{M}, \mathcal{C}'_0) \tag{24}$$

și relația de mai sus devine, trecînd la componente scalare,

$$d\Phi \equiv \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} [T_{ij}^d(\mathcal{C}') - \varepsilon^d(\mathfrak{M}, \mathcal{C}')\delta_{ij}]\, dX_{ij} + \sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial w^d(\mathcal{C})}{\partial x_j} - f_j^d\right] du_j. \tag{25}$$

§ 5. Am obținut mai sus dezvoltarea diferențialei totale în variabilele X_{ij} și u_j a unei funcții de aceste variabile care trebuie să fie *o funcție universală* (deoarece nu depinde de proprietățile de material, cari pot fi si ireversibile, principiul II al termodinamicii nefiind folosit)

$$\Phi \equiv \Phi(X\,;\, u_j) \equiv \Phi_{ij}(\overline{\overline{X}}, \bar{u})$$

cu (26)

$$\Phi(0\,;\, 0) \equiv 0.$$

Demonstrăm că această funcție e identic nulă. În adevăr din (25) rezultă cu (19)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \equiv -f_j^d + \frac{\partial w^d(\mathcal{C})}{\partial x_j} \equiv \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{kj}^d(\mathcal{C}')}{\partial x_k} + \frac{\partial w^d(\mathcal{C})}{\partial x_j}$$

și cum membrul drept depinde numai de starea cîmpului, care poate fi luată și „identic nulă", astfel ca această expresie să se anuleze, rezultă

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \equiv 0 \qquad \text{adică} \qquad \Phi = \Phi(X_{ij})$$

depinde numai de starea de deformație. Din (25) însă mai rezultă

$$\frac{\partial \Phi(X_{ij})}{\partial X_{kl}} \equiv T_{kl}(\mathcal{C}) \qquad \text{pentru} \qquad k \neq l$$

ceea ce nu se poate decît cu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_{ki}} \equiv 0 \quad (k \neq l) \qquad \text{adică} \qquad \Phi = \Phi(X_{11}, X_{22}, X_{33})$$

depinde numai de alungirile specifice. Din (25) mai rezultă, pentru $i = j$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_{jj}} \equiv T^{d}_{jj}(\mathcal{C}') - \varepsilon^{d}(\mathfrak{M}, \mathcal{C}').$$

Considerînd starea cîmpului „identic nulă" $\mathcal{C}'_0$ (în care toate funcțiile ei de stare se anulează) membrul stîng e neschimbat, iar în membrul drept

$$T^{d}_{jj}(\mathcal{C}'_0) \equiv 0, \quad \varepsilon^{d}(\mathfrak{M}, \mathcal{C}'_0) \equiv \Phi$$

și deci

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_{jj}} \equiv -\Phi, \qquad j = 1, 2, 3$$

cu soluția

$$\Phi(X_{jj}) \equiv \Phi(0)\, e^{-(X_{11}+X_{22}+X_{33})}$$

și cum $\Phi(0) = 0$ v. (26) rezultă

$$\Phi(X_{ij};\ u_j) \equiv 0. \tag{27}$$

§ 6. Deoarece funcția universală Φ e identic nulă din (24) și (25) rezultă imediat

$$\begin{aligned} w^{d}(\mathcal{C}) &\equiv w^{d}(\mathcal{C}') \\ \varepsilon^{d}(\mathfrak{M}, \mathcal{C}') &\equiv -w^{d}(\mathcal{C}') \\ \overline{\overline{T}}^{d}(\mathcal{C}') &\equiv -\overline{\overline{1}}\, w^{d}(\mathcal{C}') \\ \bar{f}^{d} &\equiv \operatorname{grad} w^{d}(\mathcal{C}') \end{aligned} \tag{28}$$

iar cu (14), (18) și (22) rezultă

$$p^{d} \equiv -\frac{\partial w^{d}}{\partial t} - \bar{v} \operatorname{grad} w^{d} \equiv -\frac{\mathrm{d} w^{d}(\mathcal{C}')}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\Gamma}}^{d}(\mathcal{C}) &\equiv -\overline{\overline{1}}\, w^{d}(\mathcal{C}') \\ \bar{g}^{d}(\mathcal{C}) &\equiv 0 \\ \bar{S}^{d}(\mathcal{C}) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Se poate deci enunța următoarea teoremă:

Dacă $\bar{f}$ și p sînt două funcții de punct și timp, interpretabile ca densități de volum ale forței respectiv puterii transmise de un cîmp fizic asupra corpului și care constituie deci soluții ale ecuațiilor (1), (2), (3), (4) compatibile cu o stare *măsurabilă* dată, orice alt sistem de funcții $\bar{f}$, respectiv p, care diferă de acestea prin gradientul unei funcții scalare $\alpha(\mathcal{C}')$ de mărimile de stare comună corpului și cîmpului, respectiv prin derivata substanțială cu semn schimbat a acestei funcții scalare, admit aceeași interpretare.

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\varphi}' &= \bar{f}' + \operatorname{grad} \alpha(\mathcal{C}') \\ p' &= p - \frac{\mathrm{d}\alpha(\mathcal{C}')}{\mathrm{d}t} \end{aligned}} \tag{30}$$

În aceste condiții, noile funcțiuni de stare sînt

$$\overline{\overline{T}}' = T - \overline{\overline{1}}\,\alpha\,; \qquad \varepsilon' = \varepsilon - \alpha$$

$$\overline{\overline{\Gamma}}' = \Gamma - \overline{\overline{1}}\,\alpha\,; \qquad w' = w + \alpha$$

iar densitatea de impuls și densitatea fluxului de energie asociate cîmpului rămîn neschimbate

$$\bar{S}' = \bar{S}\,; \qquad \bar{g}' = \bar{g}.$$

Dacă se impune în plus invarianța tuturor relațiilor la schimbarea sistemului inerțial de referință, mai rezultă ca $\alpha(\mathcal{E}')$ trebuie să fie o *funcție scalară invariantă.*

Transformarea de gradient (30) aplicată densității de forță este echivalentă din punct de vedere cuadridimensional cu trecerea unui cuadritensor energie-impuls diagonal, funcție de starea „comună", de la corp la cîmp.

Definirea univocă a noțiunii de densitate de forță implică deci, în general, stabilirea unui *criteriu definitoriu* suplementar care să fixeze funcția α. Acest criteriu poate fi, de exemplu, alegerea stării de referință pentru densitatea de energie w, asociată cîmpului. El determină totodată univoc și expresiile cuadritensorilor energie- impuls ai cîmpului și corpului, cari altfel sînt determinate numai pînă la un cuadritensor diagonal funcție de starea „comună". Dacă însă nu există mărimi de stare ale corpului cari să fie și funcții de starea cîmpului, sau invers, adică dacă $\mathcal{E}' \equiv \mathcal{E}'_0$, atunci $\alpha \equiv 0$ și densitatea de volum a forței e definită univoc de relațiile (1), (2), (3) și (4), o dată cu densitățile de putere, energie, impuls, flux de energie și flux de impuls. Acesta este de exemplu cazul cîmpului electromagnetic în medii nepolarizabile.

Catedra de Electrotehnică I
Institutul Politehnic București

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОБЪЕМНОЙ ПЛОТНОСТИ СИЛЫ

(Краткое содержание)

В статье изложен анализ условий при которых возможно однозначное определение объемной плотности сил вызванных физическим полем над веществом.

ON THE DEFINITION OF THE VOLUME DENSITY OF THE FORCE

(Summary)

The paper contains an analysis of the conditions in which can be defined the volume density of the force f exercised by a physical field on the matter.

The other notations are : p the volume density of the power transmitted by the field on the matter (as the Joule-effect); $\bar{\gamma} = \tau \bar{v}$ the volume density of the mechanical momentum, $\bar{v} = \frac{d\bar{u}}{dt}$ the velocity, τ the mass density ; $\bar{\bar{T}}$ the strength tensor ; $\bar{q}$ the surface density of the heat flow, ε the volume density of the matter energy, $\bar{g}$ the volume density of the field momentum; $\bar{\bar{\Gamma}}$ the surface density of the momentum transfer ; $\bar{S}$ the surface density of the filds energy transmission ; w the volume density of the field energy With these notations, the only equations in which appear $\bar{f}$ and p are (1), (2), (3), (4), and considering the state function character of the quantities $\bar{\bar{T}}, \varepsilon, \bar{\bar{\Gamma}}, \bar{S}, \bar{g}, w$ the author states the following theorem : Any two functions $\bar{f}'$ and p' correlated with $\bar{f}$ and p by the relations (30) can be interpretated as volume density of the force and of the power, if α is a scalar function of the field state expressible by state quantities of the matter. The volume density of the force is therefore unambigously defined, only if such function does not exist. Otherwise, a supplementary criterion — for exemple the choice of the field energy reference state — must be employed.

SUR LA DEFINITION DE LA DENSITÉ VOLUMIQUE DE LA FORCE

(Résumé)

L'article contient une analyse des conditions nécessaires pour la definiton univoque de la densité volumique de la force $\bar{f}$ exercée par un champ physique sur la matière.

UBER DIE DEFINITION DER KRAFTDICHTE

(Zusammenfassung)

Der aufsatz enthält eine Untersuchung der Bedingungen unter denen die Dichte der von einen Felde ausgeübten Kraft eindeutig bestimmt werden kann.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XX — 1958; Fascicola 3

621.313.2

ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО МОМЕНТА, РАЗВИВАЕМОГО АСИНХРОННОЙ МАШИНОЙ

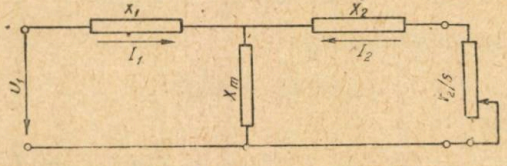
ВАСИЛЕ НЕДЕЛКУ

В технической литературе, посвященной исследованию переходных процессов синхронной машины для асинхронного вращающего момента встречается следующее выражение [1], [2], [3]:

$$m_a = \frac{u_1^2 s\,[T_{22} - T'_{22}]}{x_{11}\,[1 + s^2 T'^2_{22}]} \tag{1}$$

где $T_{22} = x_{22}/r_2$ — постоянная времени роторной обмотки при открытой статорной обмотки и при единичном скольжении:
$T'_{22} = x'_{22}/r_2$ — переходная постоянная времени при единичном скольжении;
$x_{11} = x_1 + x_m$ — полный реактанц обмтоки статора;
$x_{22} = x_2 + x_m$ — полный реактанц обмотки ротора;
$x'_{22} = x_2 + x_m$ — переходный реактанц обмотки роотра;
x_m — взаимнный реактаиц между обмоткими статора и ротора;
x'_m — переходный взаимный реактанц со стороны ротора;
r_2 — сопротивление обмотки ротора:
u_1 — напряжение, приложенное к зажимам статора;
s — скольжение.

Все параметры выражены в относительных единицах по отношению к номинальным (базисным) величинам.



Фиг. 1. Электрическая схема замещения асинхронного трансформатора.

Цель настоящей работы показать соответствие между формулой (1) и класической формулой (2) для електромагнитного момента, развиваемого асинхронной машиной [4] ($r_1 = 0$):

$$m_a = i_2^2 r/s \tag{2}$$

Для этого будем исходить из электрической схемы замещения асинхронного трансформатора, пердставленной на фиг. 1.

Выражение тока i_2 в зависимости от напряжения u_1 и параметров схемы замещения легко можно найти, если иметь в виду уравнения четырехполюсника (фиг. 1):

$$jx_{11}i_1 + jx_m i_2 = u_1 \tag{3}$$

$$\left[\frac{r_2}{s} + jx_{22}\right] i_2 + jx_m i_1 = 0 \tag{4}$$

Если подставить в (3) значение i_2 из (4):

$$i_2 = -\frac{jx_m i_1}{\left[\frac{r_2}{s} + jx_{22}\right]} = -\frac{jsx_m i_1}{r_2 + jsx_{22}} \tag{5}$$

то для i_1 найдем:

$$i_1 = \frac{u_1}{j\left[x_{11} - \frac{jx_m^2}{\frac{r_2}{s} + jx_{22}}\right]} = \frac{u_1}{jx_{11}\left[1 - \frac{jx_m^2/x_{11}}{\frac{r_2}{s} + jx_{22}}\right]} =$$

$$= \frac{u_1}{jx_{11}\left[\frac{r_2/s + j(x_{22} - x_m^2/x_{11})}{r_2/s + jx_{22}}\right]} = \frac{u_1[r_2 + jsx_{22}]}{jx_{11}[r_2 + jsx'_{22}]}. \tag{6}$$

Подставляя найденные выражения для i_1 в (5) получим:

$$i_2 = -\frac{sx_m u_1}{x_{11}[r_2 + jsx'_{22}]}. \tag{7}$$

Модуль i_2 будет:

$$i_2 = \frac{sx_m u_1}{x_{11}[r_2^2 + s^2 x'^2_{22}]^{1/2}}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (2):

$$m_a = \frac{x_m^2}{x_{11}} \frac{su_1^2}{x_{11} r_2 [1 + s^2 T'^2_{22}]} \tag{9}$$

или, если учесть выражение x'_{11}:

$$x'_{22} = x_{22} - x_m^2/x_{11} \tag{10}$$

то, для m_a найдем:

$$m_a = \frac{su_1^2[x_{22} - x'_{22}]}{x_{11} r_2 [1 + s^2 T'^2_{22}]} = \frac{su_1^2[T_{22} - T'_{22}]}{x_{11}[1 - s^2 T'^2_{22}]}. \tag{11}$$

Если двигатель работает при номинальном напряжении на зажимах, то $u_1 = 1$ и выражение для m_a будет:

$$m_a = \frac{s[T_{22} - T'_{22}]}{x_{11}[1 + s^2 T'^2_{22}]}. \tag{12}$$

Из последних равенств следует, что формулы (1) и (2) идентичны. Формулу (16) можно видоизменить:

$$m_a = \frac{sT_{22}\left[1-\frac{T'_{22}}{T_{22}}\right]}{x_{11}T'^2_{22}\left[\alpha'^2_{22}+s^2\right]} = \frac{x_{11}-x'_{11}}{x'_{11}\,x_{11}}\,\frac{s\alpha'_{22}}{\alpha'^2_{22}+s^2} \tag{13}$$

так как:

$$T'_{22} = \frac{x'_{22}}{x_{22}}T_{22} = \frac{x'_{11}}{x_{11}}T_{22}; \qquad \alpha'_{22} = 1/T_{22}$$

формула (13) также часто встречается в литературе.

Максимальное значение m_a можно найти, если в (17) подставить значение критического скольжения, полученного при решении уровнения $dm_a/ds = 0$:

$$s_k = \alpha'_{22} \tag{14}$$

и

$$m_{a\,max} = \frac{1}{2}\,\frac{x_{11}-x'_{11}}{x_{11}\,x'_{11}}. \tag{15}$$

Кафедра електрических машин.
Бухарестского Политехнического Института

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Я. Казовский:* Электромагнитный вращающий момент синхронной машины при набросе нагрузки „Электросила" № 5, 1948 г. стр. 33—48.
2. *М. П. Костенко:* Электрические машины (спец. часть) ГЭИ 1949 стр. 533—550.
3. *Г. Лайбль:* Теория синхронной машины при переходных процессах. ГЭИ 1957 стр. 99—124.
4. *П. С. Сергеев:* Электрические машины ГЭИ 1955, стр. 94—97.

ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО МОМЕНТА, РАЗВИВАЕМОГО АСИНХРОННОЙ МАШИНОЙ

(Краткое содержание)

В работе доказывается соответствие между формулами (1) и (2).

ON THE EXPRESSION OF THE ELECTROMAGNETIC TORQUE DEVELOPED BY ASYNCHRONOUS MACHINE

(Summary)

It is established a correspondence between the relations (1) and (2)

SUR L'EXPRESSION DU COUPLE ELECTROMAGNETIQUE DEVELOPPÉ DANS LES MACHINES ASYNCHRONES

(Résumé)

On établit une correspondance entre les relations (1) et (2).

UBER DEN AUSDRUCK DES VON EINER ASYNCHRONEN MASCHINE ENTWICKELTEN ELEKTROMAGNETISCHEN DREHMOMENTES.

(Zusammenfassung)

Im Artikel wird die Uebereinstimmung zwieschen den Formeln (1) und (2) gezeigt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 3

UNDE ELECTROMAGNETICE

621.392

ON THE NETWORK EQUATIONS IN ANTENNA THEORY

by EDMOND NICOLAU

1. It has long been realized that at the antenna arrays a liniar relationship exists between the input tension $\underline{U}_j$ of the j antenna, the mutual impedance $\underline{Z}_{jk}$, and the input current $\underline{I}_{ko}$ of the k antenna:

$$\underline{U}_j = \sum_{j=1}^{N} \underline{Z}_{jk}\, \underline{I}_{ko} \tag{1}$$

where N is the the total number of radiators.

The relation (1) is very important but we don't know any demonstration of it. The aim of this paper is to establish the relation (1) and to give a formula of the mutual impédance Z_{jk}.

2. We have to start from the Poynting's theorem:

$$\nabla (\overline{E} \times \overline{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) - \overline{E}\,\overline{J} \tag{2}$$

The Poynting's theorem expresses the conservation of energy. The Poynting vector

$$\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H}$$

is interpreted as the intensity of flow of energy. The quantities $\varepsilon E^2/2$ and $\mu H^2/2$ represent the densities of electric and magnetic energy, respectively. The term $\overline{E}\,\overline{J}$ measures the rate of dissipation or production of electromagnetic energy per unit volume. If EJ is positive, it is a dissipation term; if it is negative, it represents production of electromagnetic energy.

If the field has a harmonical time dependence, in a perfect dielectric, (2) become

$$\int_{\Sigma} \overline{\overline{S}}\,\overline{n}\, da = -\frac{1}{2} Re \int_{V} \overline{E}\,\overline{J}\, dv \tag{3}$$

the overline denoting the time-exerage value. Here $\overline{n}$ is the unit normal, the region V being enclosed by the surface Σ.

We are considering now an antenna array consisting of N radiators. We turn now to a cosideration of the power radiated by the array. Let $\underline{P}$ be the complex power radiated :

$$2\underline{P} = \int_V \underline{\bar{E}}\,\underline{\bar{J}}^x \,\mathrm{d}v = \Sigma_j \int_{V_j} \underline{\bar{E}}_j\,\underline{\bar{J}}_j^x \,\mathrm{d}v_j \tag{4}$$

where V_j is the region in which the j antenna is situated.

A coordonate ξ_j along the j antenna is introduced and we put

$$\underline{J}_j(\xi_j) = \underline{\bar{i}}_j(\xi_j)\,\underline{J}_j(\xi_j) \tag{5}$$

where i_j is a unit vector directed along the j antenna.

The complex power radiated by the j antenna is

$$\underline{P}_j = \int_{V_j} \underline{\bar{E}}_j\,\underline{\bar{J}}_j^x \,\mathrm{d}v_j = \int_A \mathrm{d}\xi_j \int_\Sigma \underline{\bar{E}}_j\,\underline{\bar{i}}_j\,\underline{J}_j^x \,\mathrm{d}a_j$$

where A_j and B_j are the extremities of the j antenna, Σ_j the transverse area of the this antenna. The line integral is taken along the antenna.

If the transverse area is very small, and if we suppose that E_j is constant and has a finite value different from zero in Σ_j, then

$$2\underline{P} = \int_{Aj}^{Bj} \underline{\bar{E}}_j\,\underline{\bar{i}}_j\,\underline{I}_j^x \,\mathrm{d}\xi_j \tag{6}$$

where

$$I_j(\xi_j) = \int_{\Sigma_j} J_j \,\mathrm{d}a_j \tag{7}$$

is the total current flowing through Σ_j.

In reality, $E_j = O$ in Σ_j if the antenna is made of a perfect conducting material. We overcome this difficulty considering the cross section area as very small.

We assume the distribution of the current along the antenna as being of the form

$$I(\xi_j) = I_{jo}\, f_j(\xi) \tag{8}$$

where $f_j(\xi_j)$ is a function of ξ_j only.

From Eqs. (6) and (8) it is seen immediately that

$$2\underline{P}_j = \underline{I}_{jo}^x \int_{Aj}^{Bj} \underline{\bar{E}}_j\,\underline{\bar{i}}_j\, f_j(\xi_j)\,\mathrm{d}\xi_j \tag{9}$$

The problem of the power radiated by the antennas can be approached from another point of view. We have

$$2\underline{P}_j = \underline{U}_j\,\underline{I}_{jo}^x. \tag{10}$$

It is evident from Eqs. (9) and (10) that

$$U_j = \int_{Aj}^{Bj} \underline{\bar{E}}_j\,\underline{\bar{i}}_j\, f_j(\xi_j)\,\mathrm{d}\xi_j \tag{11}$$

But from the superposition principle

$$\underline{\bar{E}}_j = \sum_k \underline{\bar{E}}_{jk} \tag{12}$$

where $\underline{\bar{E}}_{jk}$ is the electric field produced by the k antenna in the region occupied by the j antenna. The field E_{jk} is proportional to the current I_{ko}:

$$\underline{\bar{E}}_{jk} = \underline{\bar{T}}_{jk}\, \underline{I}_{ko} \tag{13}$$

so that

$$\underline{U}_j = \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{Aj}^{Bj} \underline{T}_{jk}\, \underline{i}_j\, f_j(\xi)\, d\xi_j \right) \underline{I}_{ok} \tag{14}$$

The voltage U_j, according to Eq. (14) is

$$\underline{U}_j = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z}_{jk}\, I_{ko} \tag{15}$$

where

$$\underline{Z}_{jk} = \int_{Aj}^{Bj} \underline{T}_{jk}\, \underline{I}_j\, f_j(\xi_j)\, d\xi_j \tag{16}$$

is the mutual impedance between the j and k antennas.

Equations (15) are the network equations. So we have proved this statement.

2. Eqs. (16) can be put in a more convenient form. Let

$$\underline{\bar{E}} = \nabla \nabla\, \underline{\bar{\Pi}} + k^2\, \underline{\bar{\Pi}} \tag{17}$$

where $\bar{\Pi}$ is the hertzian potential, satisfying the wave equation:

$$\Box\, \underline{\bar{\Pi}} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\, \underline{\bar{J}} \tag{18}$$

The solution is easily carried out to give the following expression for the potential $\bar{\Pi}$:

$$\underline{\bar{\Pi}} = -\frac{1}{4\pi j\omega\varepsilon} \int [\underline{\bar{J}}]\, dv$$

where

$$[\underline{\bar{J}}] = \underline{\bar{J}} \left(t - \frac{r}{v} \right).$$

The field produced by the k antenna, is calculated from the $\underline{\bar{\Pi}}_k$ potential. Let

$$\underline{\bar{\Pi}}_k = -\frac{1}{4\pi j\omega\varepsilon} \int_{A_k}^{B_k} \underline{I}_k\, \underline{i}_k\, \frac{\exp(-jkr)}{r}\, d\xi_k$$

where r is the distance between the point P_k in which is situated k the element $I_k \, d\xi_k$, and the point P in which is calculated $\underline{\Pi}_k$.

Let

$$\underline{\psi} = \frac{\exp(-jkr)}{r}.$$

A few additional transformation are necessary:

$$\underline{\Pi}_k = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \underline{I}_{ko} \int_{A_k}^{B_k} f_k(\xi_k) \, \bar{i}_k \, \underline{\psi}_{jk} \, d\xi_k.$$

By use of these, Eqs. (17) can be given the desired form:

$$\underline{E}_{jk} = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \underline{I}_{ko} \int_{A_k}^{B_k} (\nabla\nabla + k^2) f_k(\xi_k) \, \bar{i}_k \, \underline{\psi}_{jk} \, d\xi_k. \tag{19}$$

From Eqs. (13) and (19) we obtain

$$\underline{T}_{jk} = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{A_k}^{B_k} (\nabla\nabla + k^2) f_k(\xi_k) \bar{i}_k \, \underline{\psi}_{jk} \, d\xi_k$$

and finally

$$\underline{Z}_{jk} = \int_{A_j}^{B_j} \int_{A_k}^{B_k} ((\nabla\nabla + k^2) f_k(\xi_k) \bar{i}_k \, \underline{\psi}_{jk}) \, d\xi_k \, f_j(\xi_j) \, \bar{i}_j \, d\xi_j \tag{20}$$

3. Another problem to be considered is the justification of the assumption that the mutual impedances satisfy the reciprocity relation:

$$\underline{Z}_{jk} = \underline{Z}_{kj} \tag{21}$$

We shall not make use of the Lorentz reciprocity theorem.
From Eqs. (20) we obtain

$$\underline{Z}_{jk} = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{A_j}^{B_j} \int_{A_k}^{B_k} (\bar{i}_k \, \bar{i}_j f_k f_j (\nabla\nabla \underline{\psi}_{jk}) + k^2 \bar{i}_k \, \bar{i}_j f_k f_j \underline{\psi}_{jk}) \, d\xi_j \, d\xi_k \tag{22}$$

and

$$\underline{Z}_{kj} = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{A_k}^{B_j} \int_{Ai}^{B_k} (\bar{i}_j \, \bar{i}_k f_j f_k (\nabla\nabla \underline{\psi}_{jk}) + k^2 \bar{i}_j \, \bar{i}_k f_j f_k \underline{\psi}_{kj}) \, d\xi_k \, d\xi_j \tag{23}$$

But

$$\underline{\psi}_{jk} = \underline{\psi}_{kj} \tag{24}$$

and

$$\nabla\nabla\,\underline{\psi}_{jk} = \nabla\nabla\,\underline{\psi}_{kj}\,. \tag{25}$$

Consequently, by virtue of the functions $\underline{\psi}_{jk}$, from Eqs. (22) and (23) it follows that

$$\underline{Z}_{jk} = \underline{Z}_{kj}\,.$$

4. The final problem to be considered is the demonstration of some general properties of the mutual impedances $\underline{Z}_{jk}$.

Eqs. (20) are adequate for predicting the properties of linear antennas. In this case the unit vectors $\bar{i}_j$ and $\bar{i}_k$ are independent of ξ_j and ξ_k. If

$$\bar{i}_j\,\bar{i}_k = 0$$

i.e. if the antennas are orthogonal,

$$\underline{Z}_{jk} = 0\,.$$

It is also easy to obtain information concerning the magnitude of Z_{kj} from the above formulae.

At great distances between the two antennas, in the integrand of (23) apper serval terms, but of different magnitudes. The most important is the term in $\underline{\psi}_{jk}$ But

$$\underline{\psi}_{jk} = \frac{\exp(-jkr)}{r} = \frac{\cos kr}{r} - j\frac{\sin kr}{r} \tag{26}$$

i.e. R_{jk} and X_{jk} are aut of phase by $\frac{\pi}{2}$. They have a variation of magnitude of 1/r, and et the same time a periodical variation versus r, of period λ.

We point out that an isolated system of antennas can never deliver energy, i. e.

$$P = R_e\,\underline{P} = \sum_{j=1}^{N} R_e\,\underline{P}_j \geqslant 0 \tag{27}$$

To evaluate (27), we start from

$$2\,\underline{P}_j = \underline{U}_j\,\underline{I}^x_{jo} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z}_{jk}\,\underline{I}_{ko}\,\underline{I}^x_{jo} \tag{28}$$

Rearranging (28) we get

$$2\,\underline{P} = \sum_j \sum_k \underline{Z}_{jk}\,I_{ko}\,I_{jo}\cos\varphi_{jk} \tag{29}$$

where

$$\varphi_{jk} = \varphi_j - \varphi_k$$

$(\underline{I}_{ko} = I_{ko}\exp j\varphi_k)$.

This yelds the expression

$$2P = \sum_j \sum_k R_{jk} I_{jo} I_{ko} \cos \varphi_{jk} . \tag{30}$$

P is not negative if the determinant

$$| R_{jk} \cos \varphi_{jk} | \geqslant 0 . \tag{31}$$

If we are considering only two antennas, then (31) is equivalent to

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \cos \varphi_{12} \\ R_{21} \cos \varphi_{21} & R_{22} \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{32}$$

for every φ_{12}. Finally we get

$$R_{11} R_{22} - R_{12}^2 \geqslant 0. \tag{33}$$

This is a necessary condition for every antennas.

Department of Electronics
Polytechnical Institute of Bucharest

О ТЕОРЕМЕ СЕТЕЙ ДЛЯ МНОГОВИБРАТОРНЫХ АНТЕН

(Краткое содержание)

Установится теорем сетей двя многовибраторными антенами:

$$\underline{U}_j = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z}_{jk} \underline{I}_k$$

Даются выражение взаимных сопротивлении:

$$\underline{Z}_{jk} = \int_{Aj}^{Bj} \int_{Ak}^{Bk} ((\nabla \nabla + k^2) f_k (\xi_k) \bar{i}_k \underline{\psi}_{jk}) \, d\xi_k f_j (\xi_j) \bar{i}_j \, d\xi_j$$

и доказываются некоторые св иства для Z_{jk}:

1. $\underline{Z}_{jk} = 0$ — если системы перпендикулярны
2. $\overline{R}_{jk} \leqslant \sqrt{R_{jj} R_{kk}}$.

ON THE NETWORK EQUATIONS IN ANTENNA THEORY

(Summary)

It is established the theorem:

$$\underline{U}_j = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z}_{jk} \underline{I}_k$$

It is shown that

$$\underline{Z}_{jk} = \int_{Aj}^{Bj} \int_{Ak}^{Bk} ((\nabla \nabla + k^2) f_k (\xi_k) \bar{I}_k \underline{\psi}_{jk}) \, d\xi_k f_j (\xi_j) \bar{i}_j \, d\xi_j$$

and that

1. $\underline{Z}_{jk} = 0$ — if the two radiators ore orthogonal;
2. $\overline{R}_{jk} \leqslant \sqrt{R_{jj} R_{kk}}$.

UN THÉORÈME POUR LES SYSTÈMES D'ANTENNES

(Résumé)

On établit le théorème :

$$U_j = \sum_{k=1}^{N} Z_{jk} I_k$$

On établit aussi une formule (20) qui permet de calculer l'impédance mutuelle Z_{jk} entre deux antennes :

$$Z_{jk} = \int_{Aj}^{Bj} \int_{Ak}^{Bk} ((\nabla \nabla + k^2) f_k(\xi_k) i_k \psi_{jk}) \, d\xi_k \, f_j(\xi_j) i_j \, d\xi_j$$

De cette formule il en résulte que :

1. $Z_{jk} = 0$ si les antennes sont orthogonalles ;
2. $R_{jk} \leqslant \sqrt{R_{jj} R_{kk}}$.

NETZTHEOREM FÜR MEHRFACHANTENNEN

(Zusammenfassung)

Das Netzheorem für Mehrfachantennen

$$U_j = \sum_{k=1}^{N} Z_{jk} I_j$$

wird festgelegt. Eine Formel (20)

$$Z_{jk} = \int_{Aj}^{Bj} \int_{Ak}^{Bk} ((\nabla \nabla + k^2) f_k(\xi_k) i_k \psi_{jk}) \, d\xi_k \, f_j(\xi_j) i_j \, d\xi^j$$

für die Gegenimpedanz Z_{jk} zweishen zwei Antenen wird abgereitet und aus ihr werden einige Eigenschaften für Z_{jk} gefolgert, u.zw. :

1. $Z_{jk} = 0$ wenn die Antennen orthogonal sind ;
2. $R_{jk} \leqslant R_{jj} R_{kk}$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 3

621.392

CALCULUL CU APROXIMAȚIE AL FRECVENȚELOR CRITICE ALE GHIDURILOR DE UNDĂ CU SECȚIUNE POLIGONALĂ

de AUREL MILLEA

Introducere.

In regim permanent sinusoidal cîmpul electromagnetic din ghidurile de undă drepte, de secțiune uniformă, cu dielectric omogen și cu pereți perfect conductori poate fi descompus în unde transversal-magnetice (*TM*) și transversal-electrice (*TE*). In cazul undelor de tip *TM* componenta longitudinală a intensității cîmpului electric satisface ecuația :

$$\Delta_2 E_z + (k^2 - \gamma^2) E_z = 0 \tag{1}$$

cu condiția la limită

$$E_z\big|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

iar în cazul undelor de tip *TE* componenta longitudinală a intensității cîmpului magnetic satisface ecuația :

$$\Delta_2 H_z + (k^2 - \gamma^2) H_z = 0 \tag{3}$$

cu condiția la limită :

$$\frac{\partial H_z}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0. \tag{4}$$

In aceste relații $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$, Γ e frontiera secțiunii transversale a ghidului de undă, n e versorul normal la această frontieră, Δ_2 e operatorul laplasian bidimensional iar γ e constanta de propagare (reală).

Pentru ambele tipuri de unde, toate celelalte componente ale cîmpului electromagnetic se pot deduce în funcțiune de E_z, respectiv de H_z. De asemenea, se arată ușor că dacă E_z și H_z satisfac condițiile la limită (2) respectiv (4), toate celelalte componente vor satisface și ele condițiile la limită pe suprafața perfect conductoare a ghidului [1].

Problema determinării cîmpului electromagnetic în ghidurile de undă de secțiune uniformă (independentă de z) se reduce deci la găsirea funcțiunilor proprii și valorilor proprii pentru problema la limită plană, caracterizată prin ecuația :

$$\Delta_2 u + h u = 0 \tag{5}$$

cu condiția la limită :

$$u\big|_\Gamma = 0, \tag{6}$$

respectiv :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{7}$$

după cum modul de propagare e *TM* sau *TE*.

Această problemă e echivalentă cu cea a vibrațiilor mici ale membranei de același contur ca și secțiunea ghidului de undă, avînd marginea fixată, respectiv liberă.

Problema se poate rezolva riguros, prin metoda coordonatelor curbilinii și prin separarea variabilelor, în cazul domeniilor Ω de formă geometrică simplă : dreptunghi, cerc, elipsă. Pentru alte forme ale secțiunii s-au dat numai soluții aproximative, obținute de obicei prin metode foarte laborioase.

În practică de multe ori nu interesează atît cunoașterea exactă a funcțiunilor proprii corespunzătoare unei anumite secțiuni, cît cunoașterea valorilor proprii respective h_i și mai ales a valorii proprii minime, diferită de zero. Aceasta determină frecvența critică fundamentală a ghidului de undă, adică frecvența minimă la care propagarea poate avea loc în ghid. Frecvența critică fundamentală e legată de valoarea proprie minimă h_{min} prin relația :

$$\omega_{cr\ min} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{h_{min}}. \tag{8}$$

De obicei valorile proprii ale ecuației (5) și deci frecvențele critice ale ghidurilor de undă de o anumită secțiune se determină concomitent cu aflarea funcțiunilor proprii respective. Deoarece acest mod de calcul, după cum am amintit, e laborios în cazul secțiunilor de formă oarecare, prezintă importanță metodele de determinare directă a valorilor proprii ale problemei de mai sus, fără a determina și funcțiunile proprii corespunzătoare. În lucrarea de față vom folosi o asemenea metodă directă de calcul, prin aproximație, al frecvențelor critice ale ghidurilor de undă, pe care o vom aplica la ghidurile de undă de secțiune poligonală.

Principiul metodei folosite

Se știe că rezolvarea ecuației (5) cu condițiile la limită (6) sau (7) e echivalentă cu următoarea problemă variațională : să se găsească funcțiunea de punct u care satisface condițiile la limită și care realizează minimul funcționalei :

$$I = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 \, dA \tag{9}$$

cu condiția suplimentară :

$$\int_{\Omega} u^2 \, dA = 1. \tag{10}$$

Minimul funcționalei I, cu condiția (1), va fi egal cu cea mai mică valoare proprie, pe care o notăm cu h_1. Fie u_1 funcțiunea proprie cores-

punzătoare. Minimul funcționalei I, cu condiția (10) și cu condiția suplimentară :

$$\int_{\Omega} u\, u_1\, dA = 0 \tag{11}$$

e egal cu cea de a doua valoare proprie h_2.

În același mod pot fi determinate și celelalte valori proprii h_3, h_4...

Aplicînd membrului drept al relației (9) formula lui Green :

$$\int_{\Omega} (\text{grad}\, u)^2\, dA = -\int_{\Omega} u\, \Delta u\, dA + \int_{\Gamma} u\, \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \tag{12}$$

și observînd că ultima integrală e nulă, conform condițiilor la limită ale problemei, valoarea proprie minimă poate fi exprimată prin minimul următoarelor două funcționale :

$$h_1 = \min \left(\frac{\int_{\Omega} (\text{grad}\, u)^2\, dA}{\int_{\Omega} u^2\, dA} \right) = \min \left(-\frac{\int_{\Omega} u\, \Delta u\, dA}{\int_{\Omega} u^2\, dA} \right). \tag{13}$$

Din cele de mai sus rezultă că dacă în expresia (13) se introduce o funcțiune oarecare u, diferită de funcțiunea proprie u_1 a problemei, se obține totdeauna o valoare mai mare decît valoarea proprie h_1. Valoarea astfel obținută va fi cu atît mai mult diferită de h_1, cu cît funcțiunea u adoptată diferă mai mult de funcțiunea proprie u_1 corespunzătoare. Calculele efectuate de autor arată însă că se pot obține rezultate destul de apropiate de h_1 și dacă funcțiunea u, aleasă arbitrar, diferă local relativ mult de funcțiunea proprie u_1, cu condiția ca ea să satisfacă condițiile la limită ale problemei și ca alura sa să fie în linii mari aceeași cu a funcțiunii proprii corespunzătoare. Pe această bază, se poate folosi următoarea metodă pentru calculul cu aproximație al frecvenței critice fundamentale :

Se alege o funcțiune de două variabile u arbitrară, care să satisfacă condițiile la limită (6) sau (7) și care să aibă o alură asemănătoare cu cea a funcțiunii proprii fundamentale u_1 a problemei (această alură se poate aprecia pe baza unor considerații directe, în fiecare caz concret) și se introduce în una din expresiile (13); rezultatul obținut aproximează superior valoarea proprie fundamentală.

Această metodă are următoarele avantaje :

a) Valoarea obținută e totdeauna mai mare decît cea reală, deci funcțiunea u se poate alege în mai multe moduri și din rezultatele obținute se va reține cel de valoare mai mică.

b) Calculele nu sînt prea complicate și permit nu numai rezolvări numerice, dar și găsirea unor formule de aproximație pentru h_1.

Menționăm că ideea rezolvării cu aproximație a problemelor la limită căutînd funcțiuni care satisfac numai condițiile la limită ale problemei și nu satisfac ecuația cu derivate parțiale aparține lui Rayleigh [2]; metodele bazate pe această idee s-au dezvoltat însă numai în ultimele decenii. În general, ele au fost aplicate la foarte

puține probleme de cîmp electromagnetic. O metodă de acest gen e folosită în lucrarea [3] pentru calculul permeanțelor, capacităților și conductanțelor în cîmpuri statice și staționare.

Construirea funcțiunilor aproximante

Vom examina modul de construire a funcțiunilor aproximante u în cazurile în care secțiunea ghidului de undă e limitată de o curbă poligonală. Construirea funcțiunilor aproximante se face în mod diferit pentru cazul condiției la limită (6) corespunzătoare undelor *TM* și pentru cazul condiției la limită (7) corespunzătoare undelor *TE*.

Să considerăm mai întîi undele de primul tip. Funcțiunea u, pe lîngă faptul că trebuie să satisfacă condiția la limită (6), trebuie să fie aleasă în așa fel încît să nu se anuleze în interiorul domeniului, adică să aibă același semn în toate punctele din Ω. Acest lucru rezultă considerînd modul în care vibrează pe frecvența fundamentală o membrană fixată la margini.

Dacă domeniul Ω e mărginit de poligonul convex Γ, ale cărui laturi au ecuațiile:

$$F_i(x, y) = 0 ; \qquad i = 1, 2 \ldots n, \tag{14}$$

orice funcțiune de forma:

$$u = F_1 \cdot F_2 \ldots F_n \cdot P(x, y), \tag{15}$$

unde $P(x,y)$ e un polinom algebric sau trigonometric, satisface condițiile la limită ale problemei, iar coeficienții polinomului pot fi aleși astfel încît funcțiunea (x,y) să fie pozitivă în Ω. În particular funcțiunea

$$u(x, y) = F_1 \cdot F_2 \ldots F_n, \tag{16}$$

corespunzătoare cazului $P(x, y) \equiv 1$, reprezintă cea mai simplă formă a funcțiunii aproximante pentru acest caz.

Dacă domeniul Ω e mărginit de un poligon concav sau e multiplu conex, acest mod de a construi funcțiunea u nu se poate aplica, deoarece funcțiunea u s-ar anula de-a lungul unor drepte în interiorul domeniului. În acest caz domeniul trebuie împărțit în subdomenii, în așa fel încît fiecare subdomeniu să fie mărginit de un poligon convex, iar funcțiunea u trebuie dată separat pentru fiecare subdomeniu. În lungul dreptelor de separație a subdomeniilor trebuie să coincidă atît funcțiunile u_i, cît și derivatele lor după normala la dreaptă.

Construirea funcțiunilor aproximante e ceva mai dificilă în cazul condițiilor la limită de tipul (7) (unde *TE*). Pentru domeniile mărginite de un poligon convex funcțiunea u trebuie construită pornind de la un polinom cu coeficienți nedeterminați și impunînd condițiile:

$$\bar{n}_i \operatorname{grad} u \Big|_{\Gamma_i} = 0 ; \qquad i = 1, 2 \ldots n, \tag{17}$$

unde $\bar{n}_i$ e un vector normal la latura Γ_i a poligonului Γ. Dacă domeniul Ω e concav sau e multiplu conex trebuie împărțit în subdomenii. Alegînd un polinom de grad suficient de mare, satisfacerea condițiilor (17) e totdeauna posibilă.

În general, pentru acest tip de unde, în cazul modului de oscilație fundamental, funcțiunea u trebuie să se anuleze numai de-a lungul unei singure curbe din interiorul domeniului Ω; de obicei această curbă se sprijină pe frontiera Γ a domeniului.

Trebuie să mai remarcăm relativ la cazul undelor TE că valoarea proprie minimă a ecuației (5) pentru condițiile la limită (7) e nulă și corespunde funcției proprii egală cu o constantă. Din această cauză, valoarea proprie minimă diferită de zero reprezintă de fapt a doua valoare proprie ca mărime și pentru determinarea ei pe cale variațională trebuie impusă și condiția suplimentară (11), unde se poate lua $u_1 \equiv 1$. Deci pentru undele TE funcțiunii aproximative u trebuie să i se impună și condiția:

$$\int_{\Omega} u \, dA = 0. \tag{18}$$

Practic această condiție poate fi impusă după ce au fost determinați coeficienții polinomului din condițiile (17), adăugînd acestuia o constantă (care nu intervine în condițiile (17)), astfel încît să fie satisfăcută relația (18).

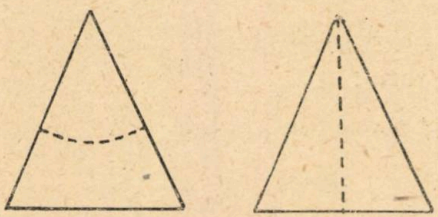


Fig. 1. Două forme posibile ale liniei nodale pentru modul TE.

Mai trebuie observat că în general există, pentru o secțiune dată, două moduri de oscilații TE cu o singură linie nodală; de exemplu la secțiunea dreptunghiulară aceste moduri sînt TE_{10} și TE_{01}. La o secțiune avînd forma de triunghi isocel, linia nodală poate avea forma din fig. 1a sau 1b. Pentru a calcula frecvența critică fundamentală, funcțiunea u trebuie aleasă în așa fel încît să aibă linia nodală corespunzătoare valorii proprii minime. De exemplu, linia nodală din fig. 1a conduce la frecvența critică minimă în cazul în care înălțimea triunghiului e mare față de baza lui, iar cea din fig. 1b în cazul contrar.

Verificarea metodei la cîteva cazuri simple

Calculăm cu ajutorul metodei prezentate frecvențele critice fundamentale pentru cîteva cazuri simple, la care se cunosc rezultatele exacte, pentru a putea aprecia precizia care se obține. Considerăm mai întîi

un ghid de undă de secțiune dreptunghiulară (fig. 2) de dimensiuni $2a$ și $2b$. Conform celor arătate mai sus, alegem funcțiunea aproximantă sub forma cea mai simplă:

$$u = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2). \tag{19}$$

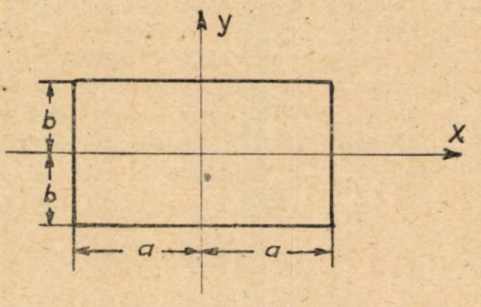


Fig. 2. Domeniul Ω de formă dreptunghiulară.

Efectuînd calculele se găsește:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \frac{128}{45}(a^5 b^3 + a^3 b^5); \tag{20}$$

$$\int_{\Omega} u^2\,dx\,dy = \frac{256}{225}\,a^5 b^5, \tag{21}$$

deci valoarea proprie fundamentală este

$$h_1 = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right). \tag{22}$$

Valoarea reală a lui h_1 este

$$h_1 = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right). \tag{23}$$

Valoarea aproximativă o întrece deci pe cea exactă cu cca 1,3%. Eroarea la determinarea frecvenței critice minime va fi aproximativ jumătate din aceasta, adică 0,65% (deoarece frecvența critică e proporțională cu $\sqrt{h_1}$).

Rezolvăm aceeași problemă în cazul undelor *TE*. Se știe că, dacă $a > b$, frecvența critică fundamentală corespunde unei unde ale cărei componente depind numai de x. Alegem funcțiunea u de forma:

$$u = x^3 - 3a^2 x. \tag{24}$$

care satisface condițiile la limită (7) și condiția suplimentară (18). Se obține:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \frac{96}{5}\,a^5 b; \tag{25}$$

$$\int_{\Omega} u^2\,dx\,dy = \frac{272}{34}\,a^7 b. \tag{26}$$

Rezultă pentru valoarea proprie fundamentală expresia:

$$h_1 = \frac{42}{17}\frac{1}{a^2} = 2{,}471\frac{1}{a^2}. \qquad (27)$$

Valoarea reală a lui h_1 este:

$$h_1 = \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{a^2} = 2{,}465\frac{1}{a^2}. \qquad (28)$$

Eroarea la determinarea frecvenței critice este de 0,12%.

Pentru secțiunea sub formă de triunghi dreptunghi de catete a și b (fig. 3), în cazul undelor *TM*, se poate alege funcțiunea aproximantă în modul următor:

$$u = xy\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right). \qquad (29)$$

Se găsește:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \frac{a^3 b^3}{180}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right); \qquad (30)$$

$$\int_{\Omega} u^2\, dx\, dy = \frac{a^3 b^3}{5040}, \qquad (31)$$

de unde rezultă:

$$h_1 = 28\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right). \qquad (32)$$

Valoarea exactă a lui h_1 se cunoaște pentru cazul triunghiului dreptunghi isocel ($a = b$) și are valoarea:

$$h_1 = \frac{5\pi^2}{a^2}$$

față de $h_1 = 56/a^2$ cît rezultă din calculul cu aproximație. Eroarea determinării frecvenței critice e de cca. 6,4%.

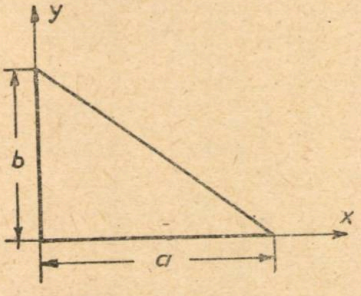


Fig. 3. Domeniul Ω avînd forma de triunghi dreptunghi.

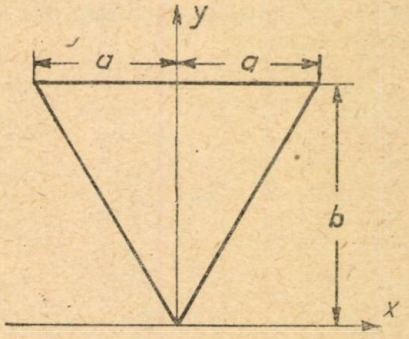


Fig. 4. Domeniul Ω de forma unui triunghi isoscel.

Aplicație la ghidul de undă de secțiune triunghiulară

Ca aplicație calculăm, cu ajutorul metodei de aproximație prezentate, frecvențele critice fundamentale pentru ghidul de undă a cărui secțiune are forma unui triunghi isocel (fig. 4).

În cazul undei TM alegem funcțiunea aproximantă de forma:

$$u = \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)(b-y) = \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)(b-y). \tag{33}$$

Aplicînd formulele date se găsește:

$$\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \frac{2}{45}a^2 ; + \frac{2}{15}b^2 ; \tag{34}$$

$$\int_{\Omega} u^2\, dx\, dy = \frac{2}{315}a^2 b^2, \tag{35}$$

de unde rezultă:

$$h_1 = 7\left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}\right). \tag{36}$$

Pentru triunghiul isoscel dreptunghi ($a = b$) se obține $h_1 = 28/a^2$, adică același rezultat ca și cel obținut anterior.

În cazul triunghiului echilateral ($b = a\sqrt{3}$) se obține $h_1 = 42/b^2$. Valoarea exactă se cunoaște pentru acest caz din [2], vol. I, pag. 338 și este egală cu $h_1 = 4\pi^2/b^2 = 39{,}5/b^2$, deci formula obținută dă un rezultat mai mare decît cel real cu cca. 3,2% (pentru frecvența critică).

În cazul undei TE alegem funcțiunea aproximantă sub forma unui polinom de gradul 4:

$$u = \sum_{i,j=0}^{4} \alpha_{ij}\, x^i\, y^j , \tag{37}$$

ai cărui coeficienți α_{ij} urmează să fie determinați astfel ca derivata lui u după normala la frontieră să fie nulă. Aceste condiții se pot scrie în modul următor:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} \equiv 0 ; \tag{38}$$

$$-b\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-\frac{a}{b}y} + a\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=-\frac{a}{b}y} \equiv 0 ; \tag{39}$$

$$b\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{a}{b}y} + a\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=\frac{a}{b}y} \equiv 0 . \tag{40}$$

Înlocuind expresia lui u și anulînd coeficienții polinoamelor în x, respectiv în y care se obțin rezultă 12 ecuații independente pentru determinarea celor 15 coeficienți α_{ij}. Deoarece α_{00} nu intervine în aceste relații, iar unul din coeficienți trebuie ales arbitrar, căci sistemul de ecuații în α_{ij} e omogen (alegem $\alpha_{20} = 1$), rămîn 12 ecuații cu 13 necunoscute,

deci încă un coeficient e arbitrar. Alegem $\alpha_{22} = 0$, pentru a obține o expresie mai simplă a funcțiunii u. În acest mod se găsește:

$$u = -\frac{1}{2a^2}x^4 - \frac{1}{2b^2}y^4 + x^2 + y^2 + \alpha_{00}. \tag{41}$$

Coeficientul α_{00} se determină punînd condiția

$$\int_{\Omega} u \, dx \, dy = 0. \tag{42}$$

Se găsește:

$$\alpha_{00} = -\frac{1}{15}(2a^2 + 5b^2). \tag{43}$$

Deci expresia funcțiunii aproximante este:

$$u = -\frac{1}{2a^2}x^4 - \frac{1}{2b^2}y^4 + x^2 + y^2 - \frac{1}{15}(2a^2 + 5b^2). \tag{44}$$

După cum am arătat, funcțiunea u, pe lîngă îndeplinirea condiției la limită (7), trebuie să se anuleze în lungul unei singure curbe în interiorul domeniului Ω (linia nodală), pentru ca să obținem valoarea proprie fundamentală. Anulînd expresia (44) a lui u, se găsește că linia nodală are forma din fig. 5a pentru valori mici ale raportului a/b și forma din fig. 5b pentru valori mari ale acestui raport. În acest ultim caz forma (44) a funcțiunii u nu ne va duce la valoarea proprie fundamentală.

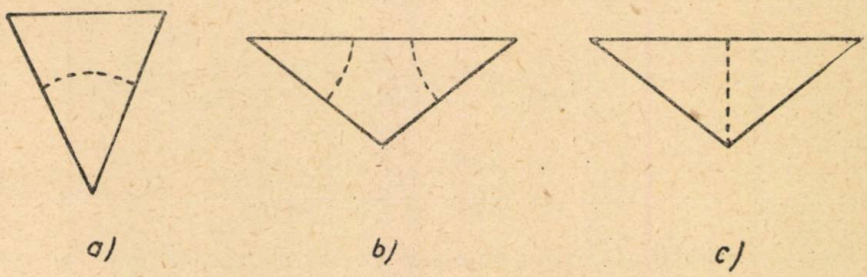


Fig. 5. Linii nodale la modul TE în ghidul triunghiular.

Efectuînd calculele cu expresia (44) a funcțiunii u se găsește:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx \, dy = \frac{29}{105}a^3 b + \frac{1}{3}ab^3; \tag{45}$$

$$\int_{\Omega} u^2 \, dx \, dy = \frac{59}{3150}a^5 b + \frac{1}{50}a^3 b^3 + \frac{1}{45}ab^5; \tag{46}$$

$$h_1 = \frac{870a^2 + 1050b^2}{59a^4 + 63a^2 b^2 + 70b^4}. \tag{47}$$

Putem evalua eroarea dată de această formulă pentru valori mici ale raportului a/b ; în acest caz se obține $h_1 \approx 15/b^2$. O valoare mai exactă e dată de valoarea proprie corespunzătoare modului TE_{10} din ghidul de undă de secțiune circulară, valabilă și pentru un sector circular ; pentru unghiuri de deschidere mici sectorul circular de rază $r = b$ coincide cu triunghiul isoscel pentru care $a \to 0$. Această valoare proprie e dată de prima rădăcină a derivatei de ordinul întîi a funcțiunii Bessel de ordinul zero și e egală cu $h_1 = 3{,}83^2/b^2 = 14{,}67/b^2$. Eroarea la determinarea frecvenței critice este deci 1,1%.

Pentru valori mari ale raportului a/b linia nodală are forma din fig. 5c. În acest caz vom căuta funcțiunea aproximantă în așa fel încît să se anuleze pentru $x = 0$. Datorită simetriei, vom defini funcțiunea u numai pentru $x \geqslant 0$ și vom calcula funcționalele care intervin numai pentru jumătatea triunghiului Ω corespunzătoare valorilor pozitive ale lui x, multiplicîndu-le apoi cu 2. Căutînd funcțiunea u sub forma unui polinom de gradul 3 și procedînd ca mai sus, se găsește expresia :

$$u = \frac{2a^2 - b^2}{3a^2} x^3 + x y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a} x^2 - 2bxy, \tag{48}$$

definită pentru $x \geqslant 0$. Datorită antisimetriei în raport cu axa $x = 0$ condiția (18) e satisfăcută. Se verifică ușor că funcțiunea u astfel definită se anulează numai pentru $x = 0$, în domeniul Ω. Efectuînd calculele se obține :

$$\int_\Omega \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy = 2\left[\frac{1}{15} a^5 b + \frac{1}{9} a^3 b^3 + \frac{4}{45} a b^5\right]; \tag{49}$$

$$\int_\Omega \int u^2\, dx\, dy = 2\left[\frac{1}{105} a^7 b + \frac{8}{315} a^5 b^3 + \frac{2}{105} a^3 b^5\right]; \tag{50}$$

$$h_1 = \frac{7}{a^2} \frac{3a^4 + 5a^2 b^2 + 4b^4}{3a^4 + 8a^2 b^2 + 6b^4}. \tag{51}$$

Pentru verificare considerăm cazul particular al triunghiului isoscel dreptunghi ($a = b$), în care relația (51) devine $h_1 = 84/17a^2 = 4{,}941/a^2$. Valoarea reală a lui h_1 se poate deduce observînd că funcțiunea proprie în acest caz particular este $u = \sin \frac{\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{\pi}{2a} y$, deci $h_1 = \pi^2/2a^2 = 4{,}935/a^2$, de unde rezultă o eroare de 0,06% la determinarea frecvenței critice. Se mai observă că tot pentru $a = b$, formula (47) ne dă $h = 10/a^2$, care e a doua valoare proprie în acest caz ; valoarea ei reală este $h_2 = \pi^2/a^2 = 9{,}869/a^2$, egală cu valoarea proprie corespunzătoare modului TE_{11} în ghidul a cărui secțiune e un patrat de latură $\sqrt{2}a$.

În concluzie, în cazul modului TE valoarea proprie fundamentală poate fi calculată cu formula (47) pentru valori mici ale raportului a/b și cu formula (51) pentru valori mari ale aceluiași raport. Cele două formule dau aceeași valoare pentru h_1 dacă $a/b \approx 0{,}58$: în această situație există deci o degenerare.

Concluzii.

Metoda de aproximație folosită, după cum am amintit, are avantajul de a permite obținerea unor formule, în locul calculului numeric care trebuie folosit aproape totdeauna în cazul metodelor obișnuite de aproximație: metoda rețelelor [4], metoda divizării în subdomenii în care problema se poate rezolva exact [5], metodele Ritz și Galerkin [6,], etc. De fapt, metoda prezentată poate fi privită și ca prima aproximație a metodelor Ritz și Galerkin; această primă aproximație poate să ducă la rezultate destul de imprecise în ceea ce privește determinarea funcțiunilor proprii, însă la calculul valorilor proprii fundamentale, după cum reiese din exemplele date, erorile sînt în general acceptabile.

Din exemplele de calcul prezentate reiese că eroarea determinării valorii proprii fundamentale h_1 e în general mai mică la modul *TE* decît la modul *TM*. Acest lucru se datorește probabil faptului că la undele *TE* funcțiunea aproximantă se determină din mai multe condiții decît la undele *TM*, datorită condiției suplimentare (18).

Menționăm că metoda de aproximație descrisă poate fi aplicată și la ghiduri de undă de altă secțiune decît cea poligonală. De asemenea, ea se poate folosi pentru calculul frecvențelor proprii ale cavităților rezonante.

Catedra de Bazele Electrotehnicii I
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *A. N. Tihonov, A. A. Samarski* — Ecuațiile fizicii matematice. Editura Tehnică, București, 1956, p. 473—482.
[2] *I. V. Rayleigh* — Teoria zvuka. Moscova, 1955.
[3] *A. Țugulea* — Calculul prin încadrare al permeanțelor în cîmpuri cu simetrie. Teză de disertație, Institutul Politehnic, București, 1958.
[4] *L. Kollatz* — Cislennîe metodî reșenia differențialnîh uravnenii. Moscova, 1953.
[5] *A. Iaşkin* — Rasciot kriticeskoi volnî nizșevo tipa dlia priamougolnîh volnovodov s prodolnîmi priamougolnîmi kanavkami i vîstupami. Radiotehnika, (Moscova), vol. 13 nr. 3, martie 1958, p. 8—15.
[6] *S. G. Mihlin* — Priamîe metodî v matematicescoi fizike. Moscova, 1950.
[7] *L. V. Kantorovici, V. I. Krilov* — Priblijennîe metodî vîșșevo analiza. Moscova, 1950, cap. IV.

ПРИВЛИЖЁННЫЙ РАСЧЁТ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ ВОЛНОВОДОВ МНОГОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

(Краткое содержание)

Используя вариационный принцип, автор излагает в статье приближённый метод расчёта критических частот основного типа волноводов. Метод основан на приближённом представлении распределения электромагнитного поля в виде функции $u(x, y)$, удовлетворяющей граничным условиям, и не удовлетворяющей волновое уравнение. Рассматривается построение функции $u(x, y)$ для волноводов многоугольного сечения. Преимущество метода состоит в том, что он приводит к сравнительно простым формулам расчёта и не нуждается в численных рясчётах. В статье даны примеры расчётов для волноводов трёхугольного сечения; полученные результаты показывают хорошее совпадение с точными результатами известными для частных случаев.

APPROXIMATE COMPUTATION OF THE CRITICAL FREQUENCIES IN POLYGONAL SECTION WAVEGUIDES

(Summary)

One presents a method for the approximate computation of the critical frequencies, founded on a variational principle. The method makes use of a function $u(x,y)$ wich approximates the transversal variation of the electromagnetic field. This function will satisfy the condition on the boundary but will not satisfy exactly the wave equation. Indications are given concerning the function $u(x,y)$ in polygonal waveguides. The advantage of the method lies in the fact that relatively simple formulae on obtained and no numerical computing is necessary. The case of a triangular waveguide is worked out; the results are in good agreement with the exact values previously known for certain particular cases.

LE CALCUL APPROXIMATIF DES FRÉQUENCES DE COUPURE POUR LES GUIDES D'ONDES Á SECTION POLYGONALE

(Résumé)

On présente une méthode d'approximation pour le calcul des fréquences de coupure fondamentales des guides d'ondes, à l'aide d'un principe variationnel. La méthode est fondée sur l'approximation de la répartition de l'intensité du champ électromagnétique par une fonction $u(x, y)$ qui satisfait aux conditions aux limites et ne satisfait pas à l'équation des ondes. On montre comment peut-on construire la fonction $u(x, y)$ dans le cas des guides d'ondes à section polygonale. L'avantage de la méthode est qu'elle permet d'obtenir des formules assez simples et n'implique pas des calculs numériques. On donne des exemples de calcul pour les guides d'ondes à section triangulaire ; les résultats obtenus sont en très bonne concordance aves les valeurs exactes, connues pour quelques cas particuliers.

NÄHERUNGSBERECHNUNG DER GRENZFREQUENZEN VON HOLLEITERN MIT VIELECKIGEM QUERSCHNITT

(Zusammenfassung)

Es wird ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Grenzfrequenzen von Hohlleitern dargelegt, unter Verwendung eines Variationsprinzips. Das Verfahren gründet sich auf die annähernde Darstellung der Verteilung des elektromagnetischen Feldes als eine Funktion $u(x, y)$, welche den Grenzbedingungen Genüge leistet, aber nicht der Wellengleichung. Es werden Anleitungen betreffend die Auffindung der Funktion $u(x, y)$ im Falle von Hohlleitern mit vieleckigem Querschnitt gegeben. Der vorteil des Verfahrens besteht darin, dass es die Erhaltung von verhältnismässig einfachen Formeln gestattet und dass keine numerischen Rechnungen nötig sind. Die Genauigkeit des Verfahrens ist genügend hoch, wie aus einigen gegebenen Berechnungsbeispielen hervorgeht.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 3

REZISTENȚA MATERIALELOR

c.z. 620.172

ETUDE DES CONTRAINTES DANS LE VOISINAGE DES OUVERTURES D'EVACUATION DES FOURS ROTATIFS

par GHEORGHE BUZDUGAN et AUREL CONSTANTINESCU

1. BUT DE CE TRAVAIL

A certains fours rotatifs utilisés dans l'industrie du ciment, on a signalé, après quelques années de fonctionnement, l'apparition de fissures dans la paroi en acier, dans le voisinage des ouvertures d'évacuation, là où le clinker incandescent passe du four dans les refroidisseurs. On a remédié à ces défauts après quelques brèves interruptions de fonctionnement, par le soudage de certaines éclisses, à l'extérieur ou à l'intérieur du four.

On a envisagé, pour la construction future des fours, de rechercher la cause de ces défauts, et de préconiser des mesures pour en éviter la répétition. Evidemment, la première chose à faire était une vérification de la résistance, afin de connaître les contraintes qui prennent naissance dans les endroits où apparaissent les fissures et de les comparer ensuite à la contrainte admissible du matériel utilisé.

Etant donnée la forme complexe du four, due à l'existence de ses 12 ouvertures d'évacuation de forme rectangulaire, on a eu l'idée de tirer des enseignements très précis à l'aide des jauges extensométriques à fil résistant. Parallèlement à ces mesures, on a fait aussi un calcul des contraintes, partant de la théorie des voiles minces cylindriques.

A la suite de ces calculs, on a procédé à un examen de laboratoire du matériel, qui a permis de tirer des conclusions sur les causes des défauts.

On reproduira, dans ce travail, de manière succinte, les étapes principales de l'étude entreprise.

2. ETUDE EXPERIMENTALE DES CONTRAINTES

2.1. *Appareils utilisés*

Les mesures ont été exécutées à l'aide d'un extensomètre électrique Kovo de type S.A.-1, en utilisant des jauges à fil résistant fabriquées en Roumanie.

2.2. *Tarage des jauges à fil résistant*

Avant la mesure, on a déterminé dans le laboratoire, la sensibilité des jauges à fil résistant, c'est-à-dire le rapport entre la variation relative de la résistance du fil de la jauge et l'allongement unitaire qui l'a produite :

$$s = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\varepsilon}.$$

Le montage utilisé est représenté (figure 1). La jauge R_t est collée sur une pièce métallique plane, très lisse, et parallèlement on attache au pont des jauges, une grande résistance supplémentaire, $R_s = 300000\,\Omega$. On y lit l'indication du microampèremètre de l'extensomètre. On enlève ensuite la résistance supplémentaire — ce qui fait varier l'indication du microampèremètre — et on charge la pièce métallique, par traction ou par flexion, jusqu'à ce que le microampèremètre montre de nouveau l'indication du montage initial. En notant avec ε l'allongement unitaire de la pièce métallique, respectivement avec σ la contrainte, et avec E le module d'élasticité (module de Young), la sensibilité de la jauge est :

$$s = \frac{R_t}{R_t + R_s}\,\frac{1}{\varepsilon} = \frac{R_t}{R_t + R_s}\cdot\frac{E}{\sigma}. \qquad (1)$$

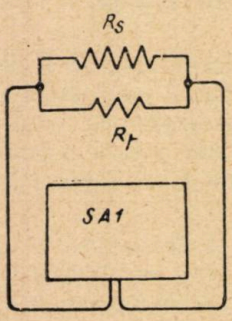


Fig. 1.

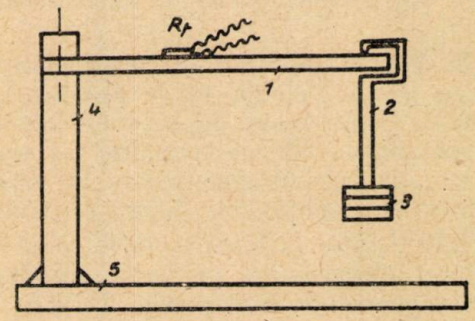


Fig. 2.

L'appareil pour étalonnage est montré (figure 2). Il se compose de la barre étalon 1, du support 2, des poids 3 et du système de soutènement 4—5. La barre étalon est un corps d'égale résistance à la flexion. La jauge étalon peut être posée sur cette barre à n'importe quelle place, à condition qu'elle soit parallèle à l'axe longitudinal de la barre. Dans le cas de l'appareil utilisé, compte tenu des dimensions de la barre étalon, la relation de calcul des contraintes (indifférement de la position de la jauge) a été

$$\sigma = 98\,P \qquad (2)$$

où P représente le poids noté 3 (fig. 2), exprimé en kgf, et σ en kgf/cm^2.

Les résultats des mesures effectuées avec deux jauges de l'espèce utilisée, sont montrés dans le tableau 1, la valeur s étant calculée par

la formule (1). Partant des valeurs obtenues, on a pris le chiffre moyen $s = 2$, qu'on a utilisé à la détermination expérimentale des contraintes.

Tableau 1

Nr. crt.	Résistance de la jauge R_t Ω	Résistance supplémentaire R_s Ω	Indication du micro-ampèremètre de l'extensomètre	Charge à l'appareil d'étalonnage P kgf	Contrainte σ kgf/cm²	Sensibilité de la jauge s
1	116,03	300 000	8 605	4,050	397	2,04
2	116,01	300 000	8 325	4,160	408	1,99

2.3. *Position des jauges à fil résistant sur la paroi du four*

Les jauges à fil résistant ont été collées dans différents secteurs du four, après le polissage préalable de la tôle. Elles ont été placées dans le voisinage des trois ouvertures d'évacuation disposées à 90° l'une par rapport à l'autre, notées par I, II et III, comme on le voit (fig. 3).

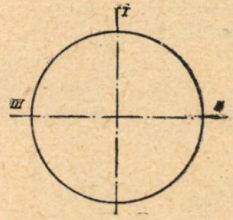


Fig. 3.

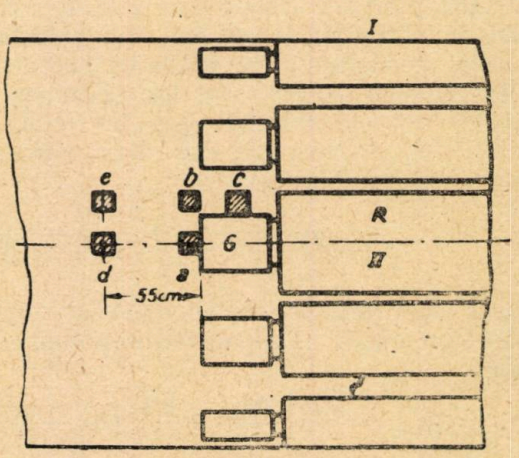


Fig. 4.

Le collage a été fait quand la position du four était celle de la figure 3, donc celle qui correspond à l'état naturel (sans contrainte) des jauges. A chacune de ces trois ouvertures d'évacuation on a disposé les jauges aux endroits marqués (figure 4) :

a — en marge de l'ouverture d'évacuation, sur son axe longitudinal ;

b — au coin de l'ouverture d'évacuation ;

c — sur la partie de tôle qui se trouve entre deux ouvertures voisines.

En plus, on a placé devant l'ouverture d'évacuation du refroidisseur II, des jauges à fil résistant, ainsi que sur les surfaces plus éloignées, marquées *d* et *e*.

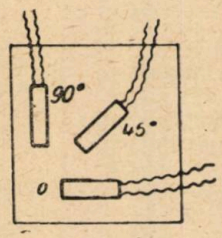


Fig. 5.

Sur chaque surface mentionnée, on a collé une rosette, ou jauge tri-directionnelle, comme on le voit (figure 5) :

0^0 — direction horizontale, parallèle à l'axe longitudinal du four ;
90^0 — direction circonférentielle, perpendiculaire à la première ;
45^0 — direction de la bisectrice de l'angle formé par les précédentes.

2.4. *Relations de calcul*

Pour l'exécution des mesures on a pris comme point de départ les indications de l'extensomètre au moment où la jauge correspondante se trouvait dans sa position la plus haute, qu'elle ait ou non été collée dans cette position, c'est-à-dire indifféremment si dans cette position elle est en état naturel ou non. En calculant les différences existantes entre cette position et les positions successives, on trouve la variation des allongements unitaires sur les directions des jauges. Les déformations principales ont été calculées par les relations connues dans la théorie de l'élasticité, en fonction des déformations tri-directionnelles, qui ont été mesurées experimentalement

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{45})^2 + (\varepsilon_{45} - \varepsilon_{90})^2}$$

Dans cette formule, les allongements unitaires doivent être remplacés par des variations d'allongement unitaire de sorte qu'on obtient la relation :

$$\Delta\varepsilon_{1,2} = \frac{\Delta\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{90}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\Delta\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon_{45})^2 + (\Delta\varepsilon_{45} - \Delta\varepsilon_{90})^2} \qquad (3)$$

A l'aide de cette formule on détermine *les variations des contraintes principales* :

$$\left.\begin{aligned} \Delta\sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\Delta\varepsilon_1 + \mu\Delta\varepsilon \\ \Delta\sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\Delta\varepsilon_2 + \mu\Delta\varepsilon_1) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Il est évident que dans l'étude expérimentale qu'on a faite on n'a pas réalisé un état naturel (sans contraintes) du four, pouvant déterminer

les déformations et les contraintes de l'état non naturel. Comme solution, on a tenu compte du fait que la paroi du four est sollicitée par un cycle symétrique de traction-compression, et, par conséquent :

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - (-\sigma_{max}) = 2\sigma_{max}$$

ou encore

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2}\Delta\sigma. \qquad (5)$$

2.5. *Résultats des expériences*

On a noté les indications de l'extensomètre pour chaque jauge, en imprimant au four un mouvement de rotation de 90° à 90°. La première notation a été faite quand la jauge se trouvait dans la partie supérieure du four, et la dernière notation (la cinquième), quand la jauge revenait dans la même position.

Les indications du potentiomètre tensométrique, inscrites sur un tableau, ont été transformées d'abord en variations des allongements unitaires sur les directions des jauges. On a calculé ensuite les variations des allongements unitaires principaux avec la formule (3), et, enfin, les variations des contraintes principales, avec la formule (4). Ces dernières valeurs sont exposées dans le tableau 2.

Tableau 2

Groupe de jauges	Symbôle de la surface sur laquelle sont collées les jauges	Les variations des contraintes principales							
		Dans le plan médian, horizontal, gauche		En bas		Dans le plan médian, horizontal, droit		En haut	
		$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$
		kgf/cm²	kgf/cm²	kgf/cm²	kgf/cm²	kgf/cm²	kgf/cm²	kgf/cm²	kgf/cm²
10, 11, 12	a	—22	—202	—329	—465	48	—231	—71	—169
19, 20, 21	a	57	—162	—238	—330	—558	—154	0	— 45
13, 14, 15	b	171	— 36	— 95	—250	38	— 23	126	23
7, 8, 9	c	117	48	27	—327	156	—290	—16	—119
16, 17, 18	c	88	— 8	—107	—266	164	—194	70	19
28, 29, 30	d	113	—188	—157	—384	19	—154	33	— 92

En examinant les valeurs du tableau 2, et compte tenu de la formule (5) on a élaboré le tableau 3, qui donne les valeurs maxima des contraintes déterminées par voie expérimentale.

Tableau 3

Jauges	Surface	σ_{max} kgf/cm²
10, 11, 12	a	233
19, 20, 21	a	279
13, 14, 15	b	125
7, 8, 9	c	164
16, 17, 18	c	133
28, 29, 30	d	192

2.6. *Remarques sur les résultats des expériences*

En examinant les tableaux 2 et 3, on constate ce qui suit :

a) les plus grandes variations ont lieu quand la jauge se trouve en position inférieure, chose évidente, si l'on tient compte de la manière qui préside au choix de l'origine. Les valeurs obtenues avec les jauges 19, 20, et 21, qui font exception à cette constatation, sont dues problablement à une défection survenue pendant le mesurage.

b) autour de l'ouverture d'évacuation, la contrainte maximum mesurée est de 279 kgf/cm², et sur la surface *d*, à 55 cm de l'ouverture, elle est seulement de 192 kgf/cm² ;

c) les valeurs $\Delta\sigma_2$ quand la jauge arrive au niveau du plan médian, à gauche et à droite, sont suffisamment rapprochées entre elles pour les surfaces, *a*, *b* et *d* ; en échange, aux surfaces *c* les différences sont grandes, mais sans atteindre les valeurs des contraintes principales.

L'étude expérimentale a eu de nombreuses causes d'erreurs, dues aux conditions défavorables de température, le mesurage étant effectué en hiver. En plus, il est possible qu'il ait existé à certaines ouvertures d'évacuation du four examiné, des soudures de renforcement à la partie intérieure, dont on n'a pas connu l'emplacement exact. D'ici la nécessité d'un calcul théorique à comparer avec le resultat des expériences.

3. ETUDE THEORIQUE DES CONTRAINTES

3.1. *Méthode de calcul.*

Le calcul des contraintes dans la paroi du four peut se faire sur la base de la théorie des voiles minces. En utilisant comme guide du calcul théorique une étude due à l'ingénieur Wingerter [4], il s'ensuit que dans une section quelconque x du four en console, figure 6, (justement notre cas) les efforts sur l'unité de longueur de la paroi sont les suivants :

$$T_1 = -qr\cos\varphi$$

$$T_2 = q\frac{x^2}{r}\cos\varphi \qquad (6)$$

$$S = -2qx\sin\varphi.$$

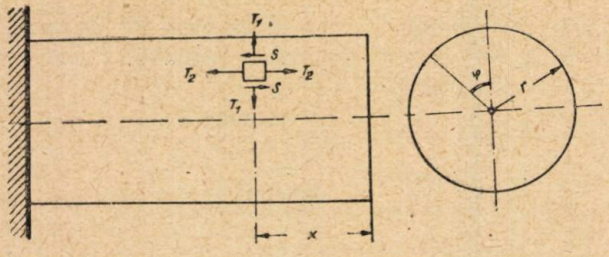


Fig. 6.

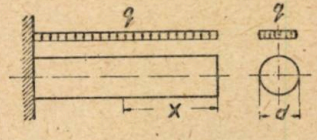


Fig. 7.

Dans ces relations, les grandeurs T_1, T_2 et S, sont exprimées en kgf/cm, étant indiquées sur le dessin, l'angle φ est aussi celui de la figure, r est le rayon extérieur du four, et q est la charge uniformément

distribuée, exprimée en kgf/cm² (charge qui représente le poids du four ainsi que d'autres charges continues, divisées par la longueur et par le double du diamètre du four, figure 7).

Pour $\varphi=0$ et $\varphi=\pi$ les grandeurs T_1 et T_2 sont maxima, tandis que S est maximum, là où T_1 et T_2 sont nuls. Par conséquent, nous étudions seulement les valeurs maxima de T_1 et T_2 qui sont les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} T_{1\,max} &= -qr \\ T_{2\,max} &= \frac{qx^2}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$T_{2\,max}$ est le plus grande et c'est lui qui donnera naissance à la contrainte maximum:

$$\sigma_2 = \frac{T_{2\,max}}{h} = \frac{qx^2}{rh} = \frac{2qx^2}{dh} \qquad (8)$$

où h est l'épaisseur de la paroi du four.

La relation (8) peut se transformer compte tenu que $q = \frac{p}{2d}$ où p est la charge uniformément distribuée sur l'unité de longueur du four, en kgf/cm.

Il s'ensuit que :

$$\sigma_2 = \frac{2\,\frac{p}{2d}\,x^2}{dh} = \frac{px^2}{d^2h} \qquad (9)$$

et parce que le moment fléchissant produit par la charge p dans la section x est

$$M = \frac{px^2}{2}$$

il s'ensuit

$$\sigma_2 = \frac{2M}{d^2h}. \qquad (10)$$

Dans le cas qui nous intéresse, la charge n'est pas uniformément distribuée, mais le four est sollicité par une complexité de charges. Puisque les charges concentrées sont éloignées de la section qu'on étudie, suivant le principe de Saint Venant, elles donnent un effet égal si elles sont equivalentes, du point de vue statique à une charge uniformément distribuée. Comme suite, on a calculé le moment fléchissant M des charges réelles dans la section dangeureuse, et ensuite on a appliqué la relation (10).

3.2. *Les charges qui sollicitent le four*

Le schéma de calcul pour le moment fléchissant est représenté (figure 8). On a considéré dans le calcul les charges suivantes :

a) la composante du poids des refroidisseurs, appliquée à l'extrémité du four : 37,2 tonnes ;

b) la seconde composante du poids des refroidisseurs : 8,76 tonnes ;

c) les pièces d'entrée dans les refroidisseurs, dont le poids s'élève à 8,4 tonnes ;

d) le poids propre de la paroi, sur une longueur de 2,20 m est de 2 t/m, et ensuite, sur une longueur de 0,86 m ce poids est de 2,7 t/m.

e) le poids du garnissage à partir des ouvertures d'évacuation jusqu'à l'extrémité du four est de 17,8 tonnes et on l'a considéré comme étant appliqué à 1,93 m de la section dangeureuse du four.

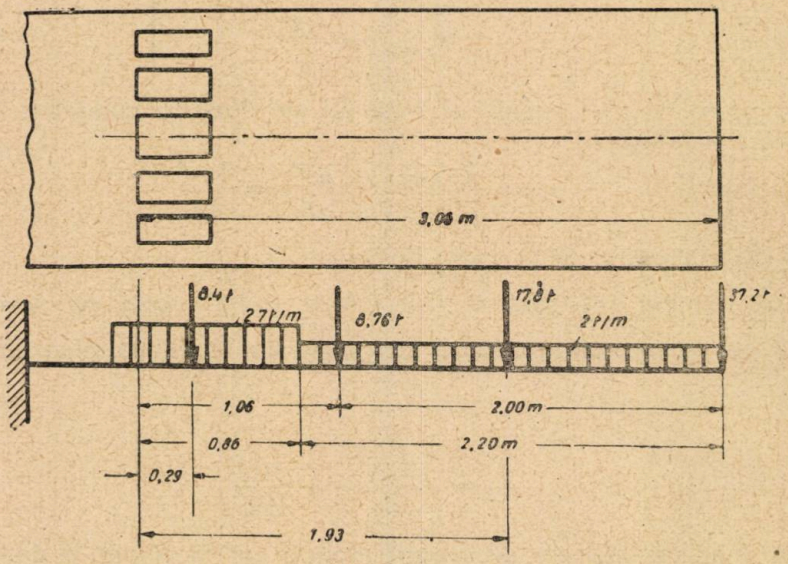


Fig. 8.

3.3. *Calcul des contraintes*

a) *Dans la section dangeureuse.*

Cette section se trouve à l'extrémité des ouvertures d'évacuation c'est-à-dire là où l'on a appliqué les jauges à fil résistant sur les surfaces *a* et *b* de la figure 4. Conformément à la figure 8, le moment fléchissant dans cette section a la valeur

$$M = 37{,}2 \times 3{,}06 + 17{,}8 \times 1{,}93 + 8{,}76 \times 1{,}06 + 8{,}4 \times 0{,}29 + 2 \times 2{,}2 \times$$

$$\times 1{,}96 + \frac{1}{2} \times 2{,}7 \times 0{,}86^2 \approx 170 \text{ tm.}$$

Parce que $d = 300$ cm et $h = 3{,}2$ cm, partant de la formule (10), il résulte :

$$\sigma_2 = \frac{2M}{d\,h} = \frac{2 \times 170 \times 10^5}{300^2 \times 3{,}2} = 118 \text{ kgf/cm}^2.$$

Cette contrainte prendrait naissance si la paroi du four était continue. Mais étant donné qu'il existe les ouvertures d'évacuation et les trous des rivets, qui produisent un affaiblissement de la paroi, on peut calculer la

contrainte maximum approximativement, compte tenu de la section nette. Dans le cas du four mis à l'étude, la section réelle n'est que de 52,5% de la section brute, et par conséquent, on peut considérer comme contrainte réelle maximum, la valeur

$$\sigma_{max} = \frac{118}{0{,}525} = 225 \text{ kgf/cm}^2. \qquad (11)$$

b) *Dans une section éloignée de 55 cm de la section dangeuresue*

Partant d'un calcul semblable et en tenant compte que l'épaisseur de la paroi dans cette section est $h = 2{,}4$ cm, il s'ensuit

$$M = 37{,}2\,(3{,}06 + 0{,}55) + 17{,}8\,(1{,}93 + 0{,}55) + 8{,}76\,(1{,}06 + 0{,}55) + \\ + 8{,}4\,(0{,}29 + 0{,}55) + 2 \times 2{,}2\,(1{,}96 + 0{,}55) + 2{,}7 \times \\ \times 0{,}86\,(0{,}43 + 0{,}55) = 213 \text{ tm}.$$

$$\sigma_1 = \frac{2M}{d^2 h} = \frac{2 \times 213 \times 10^5}{300^2 \times 2{,}4} = 197 \text{ kgf/cm}^2. \qquad (12)$$

4. COMPARAISON ENTRE LES VALEURS DES CONTRAINTES DETERMINÉES EXPERIMENTALEMENT ET CELLES QUI SONT DETERMINÉES PAR CALCUL

En comparant les valeurs du tableau 3 à celles des formules (11) et (12), on arrive aux conclusions suivantes :

a) dans la section éloignée de la section dangeureuse (d de la figure 4), la contrainte calculée est de 197 kgf/cm², et celle qui a été déterminée par expérience est de 192 kgf/cm². Il y a donc une concordance parfaite entre les deux modes de calcul ;

b) dans la section dangeureuse, le calcul théorique donne 225 kgf/cm², et le calcul expérimental donne des valeurs de 233 ... 279 kgf/cm². Là aussi, le phénomène physique étant assez complexe, la concordance est satisfaisante ;

c) il en résulte donc qu'on peut considérer que la contrainte maximum du four ne dépasse point 280 kgf/cm².

5. L'ETUDE EXPERIMENTALE DU MATERIEL

Les valeurs déterminées pour les contraintes devaient être comparées aux caractéristiques mécaniques du matériel. Dans ce but, on a trouvé nécessaires les déterminations expérimentales suivantes :

— l'analyse chimique ;
— la structure métallographique ;
— les essais de rupture par traction à chaud ;
— les essais de fluage ;
— les essais de fatigue par traction-compression à chaud.

On a effectué les trois premières sortes de déterminations. Les essais de fluage, dont la durée est plus longue, sont encore en cours. Les derniers essais n'ont pas pu être effectués étant donné le manque d'outillage.

L'étude expérimentale a considéré trois qualités standardisées d'acier, parmi celles qu'on utilise à la construction des fours rotatifs :

— OL 42 à moins de 0,18% C ;
— OL 42 à plus de 0,24% C ;
— OL K 1

5.1. *Composition chimique*

Les matériaux examinés ont eu la composition chimique indiquée dans le tableau 4.

Tableau 4

Composition chimique des aciers étudiés

Dénomination du matériel	STAS	Eléments %				Impuretés %	
		C	Mn	Si	Cu	S	P
OL 42 à moins de 0,18% C	500-49	0,09	0,30	0,01	—	0,025	0,015
OL 42 à plus de 0,24% C	500-49	0,27	0,60	0,20	—	0,02	0,02
OL K 1	2883-55	0,15	0,48	0,01	0,30	0,04	0,02

5.2. *Microstructures du matériel*

On a reproduit figures 9, 10 et 11 les microstructures obtenues à l'examen métallographique des trois épreuves d'acier.

Fig. 9.

La figure 9 correspond à l'acier 42 à moins de 0,18% charbon et la figure 10 se rapporte à l'acier à plus de 0,24% charbon. La figure 11 correspond à l'acier OLK1 et indique un contenu de charbon compris entre ceux des aciers précédents.

De l'examen des structures micrographiques il ressort entre autres, une orientation des cristaux, due tant au laminage de la tôle, qu'au fait que les épreuves ont été prises des éprouvettes soumises au préalable à des épreuves de traction.

Fig. 10.

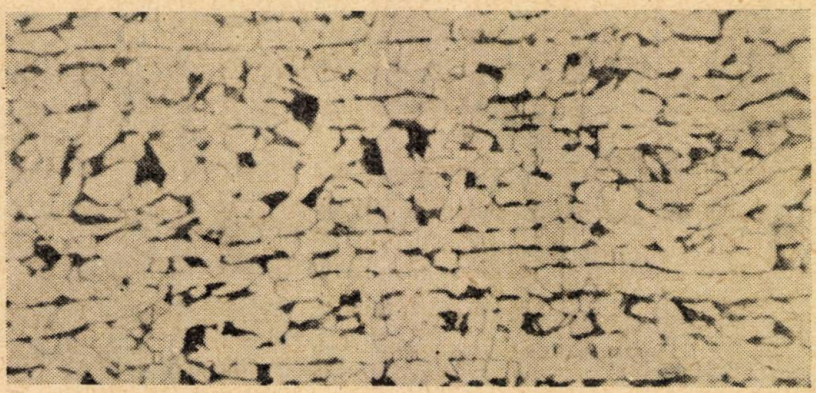


Fig. 11.

5.3. *Essais de rupture par traction, à chaud*

On sait que la résistance limite des aciers augmente avec la température jusqu'à environ 200°C et qu'ensuite elle baisse relativement vite. On a fait des essais de rupture, pour les trois sortes d'acier, à des températures de 20, 200, 300, 400, 500, 600 et 700°C avec des éprouvettes à longueur initiale de 100 mm. Etant donné que la résistance limite varie sensiblement avec la durée de l'éssai (mesurée entre le moment où l'on applique la charge et celui de la rupture) on a choisi une durée de 3 minutes en effectuant des interpolations et des extrapolations, là où il

fallait. Cette durée relativement courte a été imposée par les caractéristiques de la machine, qui n'a pas permis de réaliser une vitesse moindre d'application de la charge.

On a représenté (figure 12) les courbes qui donnent la variation de la résistance limite σ_r, de l'allongement unitaire à la rupture ε_r et de la striction ψ, avec la température pour OL 42 à moins de 0,18% C.

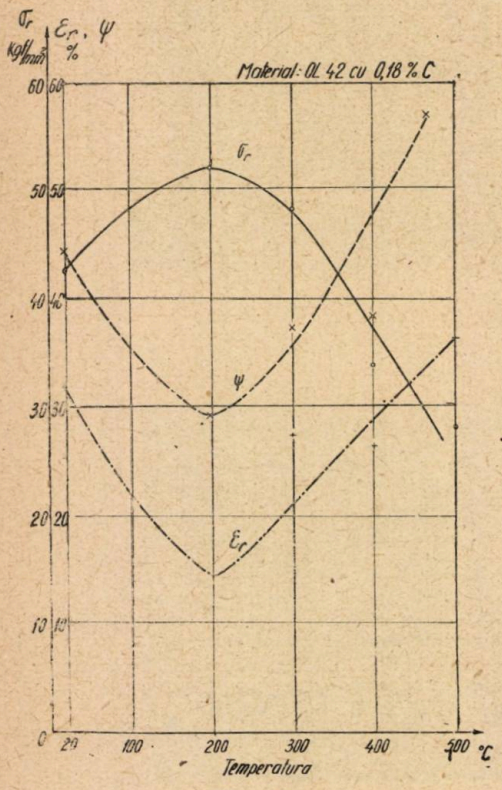


Fig. 12.

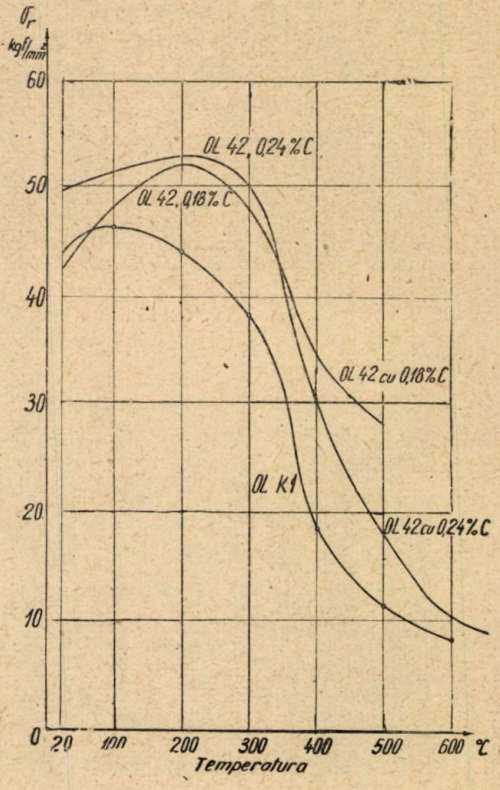


Fig. 13.

On a construit aussi des courbes semblables pour les deux autres sortes d'acier.

On a représenté (figure 13) la variation de la résistance limite en rapport à température, pour toutes les trois espèces d'acier.

Il est à retenir que pour OLK-1, qui est le plus influencé par l'effet de la température, on a trouvé :

— à 400°C : $\sigma_r = 18{,}6$ kgf/mm²
— à 500°C : $\sigma_r = 11{,}2$ kgf/mm²
— à 600°C : $\sigma_r = 8{,}3$ kgf/mm².

6. LE CALCUL DE LA RESISTANCE A LA FATIGUE

La paroi du four est sollicitée à la fatigue par des cycles symétriques de traction-compression. En notant par σ_{-1t} la résistance à la fatigue du matériel qui correspond à cette sorte de sollicitation, et par σ_{max} la contrainte maximum du cycle réel de sollicitation, on trouve le coefficient de sureté à la fatigue :

$$c = \frac{\sigma_{-1t}}{\sigma_{max}}. \qquad (13)$$

La littérature technique spéficie qu'à la température normale la résistance à la fatigue au cycle symétrique de traction-compression satisfait la relation approximative

$$\sigma_{-1t} = 0{,}30\ \sigma_r.$$

En étendant également cette correlation à des températures élevées, on obtient pour OLK-1 :

— à 400°C : $\sigma_{-1t} = 0{,}30 \times 18{,}6 \approx 5{,}6$ kgf/mm²

— à 600°C : $\sigma_{-1t} = 0{,}30 \times 8{,}3 \approx 2{,}5$ kgf/mm².

Compte tenu que $\sigma_{max} = 280$ kgf/mm² (déterminé par l'étude théorique et expérimentale) résultent les valeurs du coefficient de sureté, par la formule (13) :

— à 400°C : $c = \frac{5{,}6}{2{,}8} = 2$

— à 600°C : $c = \frac{2{,}5}{2{,}8} = 0{,}9 < 1.$

Il résulte que, tandis qu'à une température de 400°C la paroi du four n'est pas en danger, à 600°C la rupture par fatigue est certaine.

Pendant le fonctionnement, on a remarqué, à certains fours, l'écoulement du clinker incandenscent par les trous des boulons des ouvertures d'évacutaion. Ce fait dénote d'une part une isolation défectueuse, et d'autre part, un échauffement excessif de la tôle, pouvant même dépasser 600°C.

7. CONCLUSIONS

De l'étude effectuée il résulte que :

a) Dans le four examiné, les contraintes ne dépassent point la valeur de 280 kgf/cm².

b) Jusqu-à la température de 400°C — qui n'est pas dépassée dans le cas d'une exploitation normale — les matériaux étudiés correspondent, parce que les contraintes produites ne sont pas dangeureuses. A des températures élevées, la rupture par fatigue devient possible.

c) Il s'ensuit que les fissures constatées à certains fours ont été produites par la détérioration du garnissage réfractaire dans la zone étudiée, fait qui a mené à l'échauffement excessif de la tôle. On a donc étudié une solution constructive meilleure, permettant d'éviter la dégradation du garnissage réfractaire dans la zone des ouvertures d'évacuation, en évitant ainsi un contact entre le clinker et la paroi du four.

Chaire de la Résistance des Matériaux
Institut Polytehnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. Измерение механических величин электрическими методами, под редакцией Н. И. Пригоровского, Машгиз, 1952 (Mesure des grandeurs mécaniques par des méthodes électriques, recueil d'articles sous la rédaction du Prof. N. I. Prigorovski).
2. Применение тензометрии в машиностроении, под редакцией П. З. Петухова и А. В. Казанцева, Машгиз, 1956 (Application de la tensométrie dans la construction des machines, recueil d'articles sous la rédaction de P. Z. Petuhov et A. V. Kazanțev).
3. A. M. TURICIN, Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice, București, Edit. Tehnică, 1956 (Mesure électrique des grandeurs non-électriques).
4. F. WINGERTER, Berechnung der Drehöfen, VDI — Zeitschrift, Nr. 27/28, 1943 (Calcul des fours rotatifs).

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕПОСРЕДСТВЕННОМ СОСЕДСТВЕС ВЫПУСКИМИ ОКОНА ЦЕМЕНТНЫХ ПЕЧЕЙ

(Краткое содержание)

Статья воспроизводит вкратце исследование, проделанное с целью установлепия причин, приводивших к появлению трещин у некоторых цементных печей. Единичные усилия, возникающие в кожухе печи, были определены как тензометрическим путём, так и рассётным. Сопоставление результатов этих дв х способов определения показали, что максимальное единичное усилие в кожухе не превосходит 28 кГ/см². Впоследствии в лаборатории установились тепловые механические характеристики применяемых сталей и была произведена проверка на усталость. Заключением было то, что для темпер тур до 400°C кожух печи выдерживает, следовательпо, изчяны были обя аны превышению этой температуры вследствие разрушения огнеупорной футеровки. В качестве решения была предложена лучшая защита кожуха печи.

A STUDY ON THE STRESSES IN THE VICINITY OF DISCHARGE OPENINGS OF CEMENT FURNACES

(Summary)

Paper presents a study carried out for establishing the cause which led to the occurance of cracks in certain cement furnances. The stresses in the furnance shell were determined both by means of extensometers and by computations. A comparison of the results showed that the maximum stress in the shell does not exceed 280 kg/cm^2. Hot steel mechanical characteristcs were then determined in the laboratory and the fatigue resistance tested. Authors conclude that the shell is resisting up to 400°C, hence the cracks are due to exceeding this temperature as a result of the refractory coating deterioration. A better protection of the shell is suggested.

ETUDE DES CONTRAINTES DANS LE VOISINAGE DES OUVERTURES D'EVACUATION DES FOURS ROTATIFS

(Résumé)

L'article résume les études effectuées en vue d'établir les causes qui ont provoqué l'apparition de fissures dans les parois de certains fours rotatifs. Les sollicitations qui prennent naissance dans ces parois ont été déterminées autant par la méthode tensométrique, que par le calcul théorique.

La comparaison des résultats obtenus par ces deux voies a montré que la contrainte maximum dans la paroi, ne depasse pas 280 kgf/cm^2. On a déterminé, par des essais de laboratoire, les propriétés mécaniques à chaud des aciers utilisés, en effectuant en même temps un calcul de fatigue.

La conclusion en est que la paroi du four n'a rien à souffrir à cause des temperatures, celles-ci ne depassant pas 400°C. Il s'ensuit donc que les fissures constatées dans le cas de quelques fours, avaient été causées par suite de la détérioration du garnissage réfractaire, dans les zones intéressées. On a été amené ainsi à préconiser une solution constructive, qui permet d'éviter la dégradation du garnissage refractaire.

ÜBER DIE IN DER NÄHE DER ENTLEERUNGSÖFFNUNGEN VON ZEMENTÖFEN AUFTRETENDEN SPANNUNGEN

(Zusammenfassung)

Der Aufsatz enthält das Ergebnis einer Untersuchung zur Feststellung der Ursachen welche bei einigen Zementöfen Rissbildungen verursacht haben. Die in dem Mantel auftretenden Spannungen wurden sowohl mittels Dehnungsmessungen als auch rechnerisch bestimmt. Aus dem Vergleich der nach beiden Methoden erhaltenen Ergebnisse geht hervor, dass die im Mantel auftretende grösste Zugspannung 280 kg/cm^2 nicht überschreitet. Weiterhin wurden im Laboratorium die mechanischen Eigenschaften der verwendeten Stahlsorten bei Einwirkung hoher Temperaturen bestimmt. Desgleichen wurde der Ofen auf Dauerfestigkeit rechnerisch geprüft. Dabei ergab sich, dass der Mantel nur bei Temperaturen bis zu 400°C widerstandsfähig ist. Folglich sind die aufgetretenen Schäden durch die, infolge der Zerstörung der Schamottebekleidung erfolgten Überhitzung des Mantels, verursacht worden. Zur Beseitigung solcher Schäden, wird ein wirksamerer Schutz des Ofenmantels vorgeschlagen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958 ; Fascicola 3

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS LE CAS DU FLAMBAGE DES BARRES DROITES PAR CHOC AXIAL

par AUGUSTIN PETRE

On considère comme valables les lois de Hooke et l'hypothèse de Bernoulli.

On admet, aussi, que les surfaces de contact sont parfaitement planes et parallèles.

Enfin, on suppose que le rapport entre la vitesse de choc et la vitesse de propagation des ondes le long de la barre respective est petit si on le compare au rapport entre la raccourcissement totale et la longueur de la barre.

La dernier hypothèse rend possible l'elimination de l'effet d'onde.

Considérons une barre articulée à une extrémité et guidée latéralement à l'autre. Alors, les déplacements dans le plan de déformation de la barre u et v d'un point M sur l'axe de la barre, peuvent être exprimés sous la forme

$$u_c = \delta \frac{x}{l} \tag{1}$$

$$v_i = \sum q_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{2}$$

ou δ et q_n sont des fonctions de temps et représentent, respectivement la raccourcissement de la barre par compression, et l'amplitude de l'harmonique i de fléchissement. Les autres notations ont la signification de la figure 1.

Pour la sveltesse des barres pratiquement utilisées, les déformations de la barre jusqu'à la limite de proportionnalité ne peuvent pas être trop grandes, de sorte que le rapprochement des extrémités de la barre par fléchissement peut être écrit sous la forme

$$\int_0^l (ds - dx)\, x \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \approx \frac{\pi}{4l} \sum n^2 q_n^2. \tag{3}$$

Les équations de mouvement seront écrites sous la forme de Lagrange. On considère, à cette fin, les énergies cinétique et potentielles du systhème à un moment donné.

L'énergie produite par un poids P qui tombe verticalement et axialement sur l'extrémité guidée de la barre est

$$P\left(h+\delta+\frac{\pi^2}{4\,l}\sum n^2\,q_n^2\right). \tag{4}$$

Cette énergie est cédée á la barre et se retrouve sous forme d'énergie cinétique et potentielle.

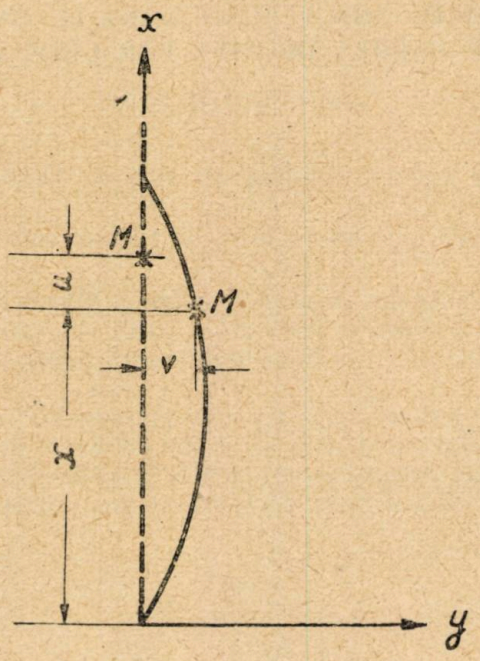


Fig. 1.

L'énergie potentielle acquise par compression est

$$E_{pc}=\frac{EA}{2\,l}\delta^2. \tag{5}$$

L'énergie potentielle acquise par la barre par fléchissement a la forme

$$E_{pi}=\frac{EI\,\pi^4}{4\,l^3}\sum n^4\,q_n^2. \tag{6}$$

L'energie potentielle acquise par le glissement produit par les composantes de la force axiale dans le plan de la section transversale déformée, sera

$$E_{pc}=\frac{\alpha^2p^2}{AG}\frac{\pi^2}{4\,l}\sum n^2\,q_n^2=(1+\mu)\,\alpha^2\,\delta^2\,EA\,\frac{\pi^2}{2l^3}\sum n^2\,q_n^2. \tag{7}$$

L'énergie cinétique de la barre s'établit en tenant compte du déplacement et de la rotation d'une section quelconque de la barre par compression et fléchissement.

Ces déplacements sont

$$u(x, t) = u_c + u_i \tag{8}$$

$$v(x, t) = v_i \tag{9}$$

où u_c et v_i ont, respectivement, les expressions (1) et (2)

$$u_i = \frac{1}{2}\int_0^x \sum \frac{n^2\pi^2}{l^2} q_n^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{\pi}{2l}\sum \frac{nq_n^2}{4}\left(\sin\frac{2n\pi x}{l} + \frac{2n\pi x}{l}\right). \tag{10}$$

L'énergie cinétique de la barre due aux déplacements lateraux est

$$E_{c_v} = \int_0^l \frac{\gamma}{2g} A dx \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = \gamma \frac{A}{2g}\sum q_n'^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l}\, dx = \gamma \frac{Al}{4g}\sum q_n'^2 .$$

Si on note le poids de la barre $G = \gamma Al$ sur cette relation peut s'écrire

$$E_{c_v} = \frac{G}{4g}\sum q_n'^2. \tag{11}$$

L'énergie cinétique de la barre qui se produit par le déplacement axial est ;

$$E_{c_u} = \int_0^l \frac{\gamma}{2g} A \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = \gamma \frac{A}{2g}\int_0^l \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\partial \frac{x}{l} + \frac{\pi}{2l}\sum \frac{n q_n^2}{4}\left(\sin\frac{2n\pi x}{l} + 2\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\right\}^2 dx \tag{12}$$

ou

$$E_{c_u} = \frac{\gamma A}{2g}\int_0^l \left[\delta'^2 \frac{x^2}{l^2} + \delta' \frac{\pi x}{l^2}\sum \frac{n q_n q_n'}{2}\left(\sin\frac{2n\pi x}{l} + 2\frac{n\pi x}{l}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\pi^2}{4l^2}\left(\sum \frac{nq_n^2}{4}\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4l^2}\left(\sum \frac{nq_n q_n'}{2}\cdot\frac{2n\pi x}{l}\right)^2 +$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{4l}\sum \frac{nq_n q_n'}{2}\sin\frac{2n\pi x}{l}\sum \frac{nq_n q_n'}{2}\cdot\frac{2n\pi x}{l}\right] dx.$$

En intégrant la série terme par terme, on obtient

$$\frac{\gamma A}{2g}\int_0^l \delta'^2 \frac{x^2}{l^2}\, dx = \gamma \frac{A}{2g}\delta'^2 \frac{l^3}{3l^2} = \frac{1}{3}\frac{G}{2g}\delta'^2 \tag{13}$$

$$\gamma\frac{A}{2g}\int_0^l\frac{\delta'\pi x}{l^2}\sum\frac{nq_nq_n'}{2}\sin\frac{2n\pi x}{l}\,dx=\gamma\frac{A}{2g}\frac{\pi\delta'}{l^2}\sum\frac{nq_nq_n'}{2}\int_0^l x\sin\frac{2n\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\gamma\frac{A}{2g}\frac{\pi\delta'}{l^2}\sum\frac{nq_nq_n'}{2}\frac{l}{4\pi^2i^2}\int_0^l\frac{2\pi nx}{l}\sin\frac{2n\pi x}{l}\,d\frac{2n\pi x}{l}=-\frac{G}{8g}\frac{\delta'}{l}\sum q_nq_n' \qquad (14)$$

$$\gamma\frac{A}{2g}\frac{\pi\delta'}{l^2}\int_0^l\sum\frac{nq_nq_n'}{2}\frac{l}{4\pi^2i^2}\,dx=\gamma\frac{A}{2g}\frac{\delta'\pi}{l^3}\sum\frac{n^2q_nq_n'l^3}{3}=\frac{1}{3}\frac{G\pi^2}{2g}\frac{\delta'}{l}\sum n^2q_nq_n' \qquad (15)$$

$$\gamma\frac{A}{2g}\frac{\pi^2}{4l^2}\int_0^l\left(\sum\frac{nq_nq_n'}{2}\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)^2dx=\frac{G}{4g}\frac{\pi^2}{4^2l^2}\sum n^2q_n^2q_n'^2 \qquad (16)$$

$$\gamma\frac{A}{2g}\frac{\pi^2}{4l^2}\int_0^l\left(\sum\frac{n^2\pi q_nq_n'}{l}x\right)^2dx=\frac{1}{3}\frac{G}{2g}\frac{\pi^4}{4l^4}\left(\sum n^2q_nq_n'\right)^2 \qquad (17)$$

$$\gamma\frac{A}{2g}\frac{\pi}{4l^2}\int_0^l\left(\sum\frac{nq_nq_n'}{2}\sin\frac{2nx\pi}{l}\sum\pi n^2q_nq_n'\frac{x}{l}\right)dx=$$

$$=-\frac{G}{2g}\frac{\pi^2}{4^2l^2}\left(\sum n^2q_nq_n'\right)^2\left(\sum q_nq_n'\right). \qquad (18)$$

Donc

$$E_{c_u}=\frac{1}{3}\frac{G}{2g}\left(\delta'+\frac{\pi^2}{2l}\sum n^2q_nq_n'\right)^2-\frac{G}{8g}\frac{\delta'}{l}\sum q_nq_n'+$$

$$+\frac{G}{4g}\frac{\pi^2}{4^2l^2}\sum n^2q_n^2q_n'-\frac{G}{2g}\frac{\pi^2}{4^2l^2}\left(\sum n^2q_nq_n'\right)\left(\sum q_nq_n'\right) \qquad (19)$$

respectivement

$$E_{c_u}=\frac{1}{3}\frac{G}{2g}\left(\delta'+\frac{\pi^2}{2l}\sum n^2q_nq_n'\right)-\frac{G}{8g}\frac{\delta'}{l}\sum q_nq_n'-$$

$$-\frac{G}{2g}\frac{\pi^2}{4^2l^2}\left(\sum n^2q_nq_n'\right)\left(\sum q_nq_n'\right)_{n\neq m}$$

L'énergie cinétique due à l'inertie de rotation est

$$E_{c_r}=\int_0^l\frac{l\gamma}{2g}I_z\left(\frac{\partial^2v}{\partial x\,\partial t}\right)^2dx=\frac{G}{g}i_z^2\frac{\pi^2}{4l^2}\sum n^2q_n'^2. \qquad (20)$$

L'énergie cinétique du poids P qui se déplace avec la vitesse de l'extrémité mobile de la barre est

$$E_{c_p} = \frac{P}{2g}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l} = \frac{P}{2g}\left(\delta' + \frac{\pi^2}{2l}\sum n^2 q_n q_n'\right)^2. \tag{21}$$

L'énergie cinétique totale du système sera à un moment donné

$$E_c = \frac{P+\frac{G}{3}}{2g}\left(\delta' + \frac{\pi^2}{2l}\sum n^2 q_n q_n'\right)^2 + \frac{G}{4g}\sum q_n' + \frac{G}{g} i_z^2 \frac{\pi^2}{4l^2}\sum n^2 q_n'^2 -$$
$$- \frac{G}{8g}\frac{\delta'}{l}\sum q_n q_n' - \frac{G}{2g}\frac{\pi^2}{4}\frac{}{l^2}\left(\sum n^2 q_n q_n'\right)\left(\sum q_n q_n'\right)_{n\neq m}. \tag{22}$$

L'énergie potentielle du système est

$$E_p = -P\left(n+\delta+\frac{\pi^2}{4l}\sum n^2 q_n^2\right) + \frac{E I \pi^4}{4 l^3}\sum n^4 q_n^2 + \frac{E A}{2l}\delta^2 +$$
$$+ (1+\mu)\alpha^2\delta^2 E A \frac{\pi^2}{2l^3}\sum n^2 q_n^2. \tag{23}$$

Pour écrire les équations de Lagrange on fait le calcul des expressions

$$\frac{\partial E_c}{\partial \delta'} = \frac{P+\frac{G}{3}}{g}\left(\delta' + \frac{\pi^2}{2l}\sum n^2 q_n q_n'\right) - \frac{G}{8gl}\sum q_n q_n'' \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \delta'}\right) = \frac{P+\frac{G}{3}}{g}\left[\delta'' + \frac{\pi^2}{2l}\sum n^2 (q_n'^2 + q_n q_n'')\right] - \frac{G}{8gl}\sum (q_n'^2 + q_n q_n'' \tag{25}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial q_i'} = \frac{P+\frac{G}{3}}{g}\frac{\pi^2}{2l} i^2 g_i\left(\delta' + \frac{\pi^2}{2l}\sum n^2 q_n q_n'\right) + \frac{G}{2g} g_i' + \frac{G}{g} i_z^2 \frac{\pi^2}{2l^2} i^2 q_i' -$$
$$- \frac{G}{8g}\frac{\delta'}{l} q_i - \frac{G}{2g}\frac{\pi^2 i^2}{4^2 l^2} q_i \sum q_n q_n'_{n\neq i} \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial q_i'}\right) = \frac{P+\frac{G}{3}}{g}\frac{\pi^2 i^2}{2l} q_i\left[\delta'' + \frac{\pi^2}{2l}\sum n^2 (q_n'^2 + q_n q_n'')\right] +$$
$$+ \frac{P+\frac{G}{3}}{g}\frac{\pi^2 i^2}{2l} q_i'\left(\delta' + \frac{\pi^2}{2l}\sum n^2 q_n q_n'\right] + \frac{G}{2g} q_i'' + \frac{G}{g} i_z \frac{2\pi^2}{2l^2} i^2 q_i'' -$$
$$- \frac{G}{8g}\frac{\delta'}{l} q_i' - \frac{G}{8g}\frac{q_i}{l}\delta'' - \frac{G}{2g}\frac{\pi^2 i^2}{4^2 l^2}\left[q_i' \sum q_n q_n' + q_i \sum (q_n'^2 + q_n q_n'')\right]_{n\neq i} \tag{27}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial q_i}=\frac{P+\frac{G}{3}}{2g}\frac{\pi^2 i^2}{2l}\,q_i'\left(\delta'+\frac{\pi^2}{2l}\sum n^2\,q_n\,q_n'\right)-\frac{G}{8g}\frac{\delta'}{l}\,q_i'-\frac{G\pi^2}{2g\,4^2 l^2}\,q_i'\sum_{n\neq i} q_n\,q_n' \tag{28}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \delta}=-P+\frac{EA}{l}\delta+(1+\mu)\,\alpha^2\,EA\,\frac{\pi^2}{l^3}\sum n^2\,q_n^2\,\delta \tag{29}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_i}=-\frac{\pi^2 i^2 P}{2l}q_i+\frac{EI\pi^4 i^4}{2l^3}q_i+(1+\mu)\,\alpha^2\delta^2\,EA\,\frac{\pi^2 i^2}{l^3}\,q_i \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \delta'}\right)+\frac{\partial E_q}{\partial \delta}&=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_i}+\frac{\partial E_p}{\partial q_i}&=0.\qquad i=1,2,\ldots n\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Si l-on porte maintenant les expressions (24—30) dans le système (31) on obtient

$$\delta''+\frac{g}{1+\frac{G}{3P}}\frac{EA}{Pl}\left[1+\frac{\pi^2}{l^2}(1+\mu)\,\alpha^2\sum n^2\,q_n^2\right]\delta+\frac{\pi^2}{2l}\sum n^2\,(q_n'^2+q_n\,q_n'')-$$

$$-\frac{g}{1+\frac{G}{3P}}-\frac{G}{P\left(1+\frac{G}{3l}\right)}\frac{1}{8l}\sum(q_n'+q_n\,q_n'')=0 \tag{32}$$

$$q_i\left\{\left[1-\frac{G}{4\pi^2 i^2 P\left(1+\frac{G}{3P}\right)}\right]\delta''+\frac{\pi^2}{2l}\sum n^2\,(q_n'^2+q_n\,y_n'')+\right.$$

$$\frac{G}{P\left(1+\frac{G}{3P}\right)}\frac{l}{\pi^2 i^2}\left(1+\frac{i_z^2}{l^2}\pi^2 i^2\right)\frac{q_i''}{q_i}-\frac{G}{4^2\,l\,P\left(1+\frac{G}{3P}\right)}\sum_{n+1}(q_n'^2+q_n\,q_n'')+$$

$$\left.+\frac{g}{1+\frac{G}{3P}}\left[\frac{\pi^2 EI\,i^2}{Pl^2}-1+2\,(1+\mu)\,\alpha^2\delta^2\frac{EA}{Pl^2}\right]\right\}_{i=1,2\ldots n}=0 \tag{33}$$

d'ou l'on tire ainsi $n+1$ équations différentielles qui contiennet les fonctions inconnues de temps δ, q_1, q ,.... q_n.

La résolution du système d'équations (32—33) ainsi obtenu, résoudra le problème proposé.

Pour des différents cas particuliers, le système (32—33) peut être simplifié, permettants une résolution plus facile.

Si nous, négligeons le poids G de la barre frappée par rapport au poids P qui frappe et la déformation produite par les tension de cisaillement, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\delta''+\frac{g}{\delta_{st}}\,\delta+\frac{\pi^2}{2l}\sum n^2\,(q_n'^2+q_n\,q_n'')-g=0\\ &q_i\left[\delta''+\frac{\pi^2}{2l}\sum n^2\,(q_n'^2+q_n\,q_n'')-g+\frac{\pi^2\,EI\,i^2}{Pl^2}\,g\right]_{i=1,2,\ldots n}=0 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

où on a introduit la notation $\delta_{st}=\dfrac{Pl}{EA}$.

Ce système admet plusieurs genres de solutions.

Ainsi, le système (34) admet les solutions du système

$$\left.\begin{aligned} &q_i\equiv 0\\ &\delta''+\frac{2}{\delta_{st}}\,\delta-g=0 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

ou nous obtenons

$$\delta=-\delta_{st}\cos\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}\,t+\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}\,v_0\sin\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}\,t+\delta_{st} \tag{36}$$

où v_0 représente la vitesse avec la quelle le poids P atteint l'extrémité libre de la barre. Cette vitesse peut s'écrire aussi fonction de la hauteur de la chute

$$v_0=\sqrt{2gh} \tag{37}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \delta_{max}&=\delta_{st}\left(1+\sqrt{1+\frac{v_0^2}{g\,\delta_{st}}}\right)\\ \delta_{max}&=\delta_{st}\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

et parce que $q_i=0$, le système ne flambera pas.

On obtient, ainsi, le cas classique de la sollicitation des barres à la compression par choc axial.

Un autre genre de solutions pour le système (34) est obtenu en considérant $q_i\neq 0$.

On obtient le système

$$\left.\begin{aligned} &\delta''+\frac{g}{\delta_{st}}\,\delta+\frac{\pi^2}{2l}\sum n^2\,(q_n'^2+q_n\,q_n'')-g=0\\ &\delta''+\frac{\pi^2}{2l}\sum n^2\,(q_n'^2+q_n\,q_n'')-g+\frac{\pi^2\,EI\,i^2}{Pl^2}\,g=0\\ &\qquad\qquad i=1,2,\ldots n \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

En soustrayant la premiere equation de la seconde, il en resulte

$$-\frac{g}{\delta_{st}}\delta+\frac{\pi^2 EI\,i^2}{Pl^2}g=0$$

respectivement

$$\delta=\delta_{st}\frac{\pi^2 EI\,i^2}{Pl^2} \tag{40}$$

ou

$$\delta=\delta_{st}\frac{P_i}{P}$$

où on a noté avec $P_i=\frac{\pi EIi^2}{l^2}$ la force critique de flambage pour le mode de flambage respectiv.

D'où l'on remarque que δ = const. Pour arriver jusqu à cette situation, le systeme ne peut se déformer que d'après des formes qui sont les solutions du système (35).

En partant l'expression (40) dans l'une des equations du système (39) on obtient

$$\frac{\pi^2}{2l}\sum n^2(q_n'^2+q_n\,q_n'')+g\left(\frac{P_i}{P}-1\right)=0. \tag{41}$$

En intègrant cette équation il en résulte

$$\sum_{i=1,\,2,\ldots n} n^2 k_n^2=\frac{gl}{\pi^2}\left(1-\frac{P_i}{P}\right)t^2+C_1 t+C_2 \tag{42}$$

et on obtient un nombre de n équations telles.

Les n solutions du système (42) seront

$$\left.\begin{aligned} &q_1=q_2=\ldots=q_{i-1}=q_{i+1}=q_{i+2}=\ldots=q_n=0\\ &q_i=\sqrt{\frac{gl}{\pi^2 i^2}\left(1-\frac{P_i}{P}\right)t^2+C_1+C_2}\qquad i=1,\,2\ldots n\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Pour déterminer les constantes on considère l'origine du temps au commencement du déplacement lateral, respectivement

$$\left.\begin{aligned} q_i&=0\\ t&=0\end{aligned}\right\}\rightarrow C_2=0. \tag{44}$$

La vitesse en ce moment v, se determine en tenant compte que le co nmencement du déplacemnt latéral ne peut se produire que si la déformation axiale a atteint la valeur donnée par (40). Cette déformation est atteinte par la voie indiquée par le système (35), donc par compression axiale.

Energétiquement on peut écrire

$$\frac{Pv_1^2}{2g}=P\left(\delta-\frac{\delta^2}{2\delta_{st}}+\frac{v_0^2}{2g}\right) \tag{45}$$

ou en utilisant la relation (40) on obtient

$$\frac{Pv_1^2}{2g}=P\delta_{st}\left(\frac{P_i}{P}-\frac{P_i^2}{2P^2}+\frac{v_0^2}{2g}\right). \tag{46}$$

La constante c, sera déterminée en posant la condition que la vitesse verticale à l'extrémité mobile de la barre pour $t=0$ soit v_1.

En utilisant les relations (43) et (3) on obtient

$$\frac{\pi^2 i^2}{2l} q_i^2 = \frac{g}{2}\left(1 - \frac{P_i}{P}\right) t^2 + \frac{\pi^2 i^2}{2l} C_1 t = \int_0^l (ds - dx)$$

d'où

$$v_1 = \frac{d}{dt}\int_0^l (ds - dx) = g\left(1 - \frac{P_i}{P}\right) + \frac{\pi^2 i^2}{2l} C_1 \tag{47}$$

en obtenant ainsi

$$C_1 = \frac{2 l v_i}{\pi^2 i^2}. \tag{48}$$

La solution (43) non nulle devient

$$q_i = \sqrt{\frac{gl}{\pi^2 l^2}\left(1 - \frac{P_i}{P}\right) t^2 + \frac{2l v_1}{\pi^2 i^2}}\, t. \tag{49}$$

On obtient la valeur maxima de ce déplacement en annulant la dérivée. Elle sera produite après le temps.

$$t = -\frac{v_1}{g\left(1 - \frac{P_i}{P}\right)} \tag{50}$$

en obtenant ainsi

$$q_{i\,max} = \frac{1}{\pi i}\sqrt{\frac{2l\delta_{st}}{\frac{P_i}{P} - 1}\left[\frac{P_i}{P} - \frac{P_i^2}{2P^2} + \frac{v_0^2}{2g}\right]}$$

ou en utilisant l'expression de v, de la relation (46)

$$q_{i\,max} = \frac{1}{\pi i}\sqrt{\frac{l v_i^2}{g\left(\frac{P_i}{P} - 1\right)}} \tag{51}$$

relation similaire à celle qui a été trouvée par une autre voie dans l'ouvrage [1].

La Chaire de la Résistance des Matériaux
Institut Polytehnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *A. Petre,* Le flambage des barres droites par choc axial, R.M.A. Tome I, 1956 Nr. 2.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ ПРЯМЫХ БАЛОК ОТ АКСИАЛЬНОГО УДАРА

(Краткое содержание)

В работе устанавливаются уравнения аксиальных и боковых движений поперечных сечений прямой балки под действием аксиального удара при малой скорости, когда балка испытывает продольный

изгиб от этого удара. При составлении этих уравнений учитывалась и собственная масса ударенной болки. При помощи этих соотношений проверяется ранее рассмотренный случай автором настоящей работы, причем не учитывалась собственная масса ударенной балки, а также развитие продольного изгиба под действием удара в зависимости от времени. (Зная деформации можно, очевидно, определить и нагружения).

MOTION EQUATIONS FOR STRAGHT BEAM BUCKLING UNDER AXIAL IMPACT

(Summary)

Paper presents the equations of axial and lateral motions of beam cross-sections subjected to a low velocity axial impact when the beam begins to buckle under this impact.

By means of these relations the case previously dealt with by the same author is verified when the beam mass is not taken into account, and the whole buckling process is also described. Since the strains are known, the stresses may be evidently determined.

LES EQUATIONS DU MOUVEMENT DANS LE CAS DU FLAMBAGE DES BARRES DROITES PAR CHOC AXIAL

(Résumé)

Dans l'étude présente, on établit d'abord les équations des mouvements axiaux et latéraux des sections transversales d'une barre soumise au flambage sous l'effet d'un choc axial imprimé a vitesse réduite à partir du moment ou la phenomène de flambage commence a se manifester, en tenant compte de l'influence du poids propre de la barre sollicitée.

Puis, à l'aide de ces relations, on vérifie le cas traité antérieurement par le mème auteur en negligeant l'influence du poids de la barre soumise au choc.

On indique aussi la relation qui permet d'exprimer les déformations par rapport au temps, pour le cas étudie, ce qui permet de déterminer les contraintes si ces déformatons sont connu.

BEWEGUNGSGLEICHUNGEN IM FALLE DER KNICKUNG DER GERADEN TRÄGERN DURCH AXIALEN STOSS

(Zusammenfassung)

In der Arbeit werden die Axialen-und Querbewegungsgleichungen des Querschnittes eines Trägers, unter der Wirkung eines Axialen mit kleiner Geschwindigkeit erhaltenen Stoss, es wenn der Träger sich zu knicken aufängt, geschrieben.

Man hat in diesen Gleichungen auch den Einfluss der eigenen Masse des gestossenen Trägers in Rechnung genommen.

Mit diesen Formeln wird dann ein Fall nachgeprüft der von den selben Vefasser behandelt wurde, unter Vernachlässigung der eigenen Masse des gestossenen Trägers, Beschreibung der Knickung durch Stoss auf die Dauer.

Es ist klar das man auch die Spannungen feststellen kann, wenn die Deformationen bekant sind.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 3

INFORMAȚII

ASPIRANȚII CARE ȘI-AU SUSȚINUT LUCRAREA DE DISERTAȚIE ÎN CADRUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI ÎN PERIOADA 1.XI.1957—1.VII.1958

Nr. crt.	Numele și Pronumele candidatului	Titlul lucrării de disertație	Conducătorul științific
1	Constantin Manea	Contribuțiuni la studiul procesului de injecție.	Prof. Gh. Bărănescu
2	Mustafa R. Mustafa	Contribuții la studiul comportării lagărelor de alunecare cu luarea în considerare a cuplului lubrefiant cuzinet și cu aplicații la materialele indigene.	Prof. Dr. Gh. Manea
3	Alexandru Timotin	Proprietățile dinamice ale cîmpului electromagnetic macroscopic în medii oarecare	Prof. Dr. R. Rădulet, membru corespondent al Academiei R.P.R.
4	Andrei Țugulea	Calculul prin încadrare al permeanțelor în cîmpuri cu simetrie.	Prof. Dr. R. Rădulet, membru corespondent al Academiei R.P.R.
5	Gleb Drăgan	Folosirea cablurilor pentru protecția instalațiilor electrice de înaltă tensiune (3 — 10 kV) împotriva supratensiunilor atmosferice.	Prof. M. Bercovici, membru corespondent al Academiei R.P.R.

Responsabil de carte Ing. A. Săveseu
Corector Colectivul de autor

Dat la cules 12.05.959. Bun de tipar 10.09.959. Tiraj 2050 hîrtie semivelină 70×100/45. Coli de tipar 12. A. 05576

Tiparul executat sub cda. nr. 819
de Litografia şi Tipografia Învăţămîntului
Str. Mihai Vodă 44—46 Bucureşti

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de pronume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XX — FASCICOLA 4

OCTOMBRIE — DECEMBRIE

1958

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. In limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках продолжением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производится по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges des publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului“)

F 1130

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ORSZÁGOS 1823

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XX — FASCICOLA 4

OCTOMBRIE — DECEMBRIE

1958

COMITETUL DE REDACȚIE:

Prof. *I. Agîrbiceanu*; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*; Conf. *I. Berceanu*; Prof. Dr. *E. Bratu*; Prof. *Gh. Buzdugan*; Conf. *S. Călin* cand. Șt. Th.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*; Acad. Prof. Dr. *Tr. Negrescu*; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*; Prof. *M. Postelnicescu*; Prof. Dr. *R. Răduleț* membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. Dr. *T. Tănăsescu*, membru corespondent al Academiei R. P. R.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
membru corespondent al Academiei R. P. R.

SUMAR

MATEMATICA

E. SIMACOVA — О простых делителях целочисленного полинома 13

FIZICA

D. EITEL — Recherches préliminaires sur la réflexion et la transmission des lames minces de plomb 27

MECANICA

M. ATANASIU — Sur certaines relations vectorielles utilisées dans la cinématique 31

P. BARANY — On a simultaneous collision of a system of bodies 37

CHIMIE FIZICĂ

V. PĂRĂUȘANU — Complexul activat în cinetica chimică . . 45

ELECTROCHIMIE

I. ATANASIU, L. STANCU — Despre mecanismul formării electrochimice a compușilor oxigenați ai clorului pe electrod de grafit impregnat cu parafină 61

ELECTROTEHNICA

I. S. ANTONIU — Mesure de la puissance réactive en régime déformant 75

C. PENESCU, D. MARTAC — L'influence des régulateurs de tension et du phénomène de saturation sur les surtensions prolongées 85

E. POTOLEA — Schémas équivalents des systèmes électriques obtenus à l'aide du calcul matriciel 117

ELECTRONICA

M. DRAGĂNESCU — The influence of harmonics on the electronic oscillator provided with a nonlinear reactive element 147

UNDE ELECTROMAGNETICE

ED. NICOLAU — On the theory of receiving antennas systems 165

A. MILLEA — Ghiduri de undă triunghiulare 171

RADIOCOMUNICAȚII

AL. SPĂTARU — Evaluarea zgomotului de fluctuații la un generator modulat prin impulsuri în poziție . . . 187

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Е. СИМАКОВА — О простых делителях целочисленного полинома 13

ФИЗИКА

Д. ЕИТЕЛ — Предварительные исследования над отражением и передачей свинцовых тонких слоев . . . 27

МЕХАНИКА

М. АТАНАСИУ — О некоторых векторных отношениях, применяемых в кинематике 31

П. БАРАНИ — Об одновременном ударе системы тел . 37

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

В. ПАРАУШАНУ — Активизированный комплекс в химической кинетике 45

ЭЛЕКТРОХИМИЯ

И. АТАНАСИУ, Л. СТАНКУ — О механизме образования кислородных соединений хлора на графитовом электроде. 61

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

И. АНТОНИУ — Измерение реактивной мощности в деформирующем режиме 75

К. ПЕНЕСКУ, Д. МАРТАК — Влияние регулятора напряжения и явления насыщения на длительные перенапряжения 85

Е. ПОТОЛЕА — Экивалентые схемы электрических цепей, полученные о помощью матричного исчисления . . 117

ЭЛЕКТРОНИКА

М. ДРАГАНЕСКУ — Влияние гармоников на автогенератор с нелинеиным реактивным элементом 147

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Е. НИКОЛАУ — О теореме приёмных антен 165

А. МИЛЛЕА — Волноводы треугольного сечения . . . 171

РАДИОСВЯЗЬ

А. СПЭТАРУ — Оценка флюктуационных помех модулятора в фазо-импульсном генераторе 187

CONTENTS

MATHEMATICS

E. SIMACOVA — On the prime divisors of the polynom with integer coefficients 13

PHYSICS

D. EITEL — Preliminary researches on the reflection and transmission of thin films of lead 27

MECANICS

M. ATANASIU — On certain vectorial relations used in kinematics 31

P. BARANY — On a simultaneous collision of a system of bodies 37

PHYSICAL CHEMISTRY

V. PĂRĂUȘANU — The active complex in the chemical kinetik 45

ELECTROCHEMISTRY

I. ATANASIU, L. STANCU — On the formation mechanism of chlore oxygenated compounds ou a graphite electrode . 61

ELECTRICITY

I. S. ANTONIU — Measurement of reactive power under distorting operating conditions 75

C. PENESCU, D. MARTAC — The influence of the voltage regulators and transformer cores saturation on overvoltages caused by the grounding of a phase 85

E. POTOLEA — The application of matricial calculus to study of the power networks equivalent scheems 117

ELECTRONICS

M. DRĂGĂNESCU — The influence of harmonics on the electronic oscillator provided with a nonlinear reactive element 147

ELECTROMAGNETIC WAVES

E. NICOLAU — On the theory of receiving antennas systems 165

A. MILLEA — Triangular waveguides 171

RADIOCOMMUNICATIONS

AL. SPĂTARU — The estimations of random noise of an amplitude modulated generator with pulse-position modulation 187

SOMMAIRE

MATHEMATIQUES

E. SIMACOVA — Sur les diviseurs prèmiers d'un polynôme à coefficients entiers 13

PHYSIQUE

D. EITEL — Recherches préliminaires sur la réflection et la transmission des lames minces de plomb 27

MECANIQUE

M. ATANASIU — Sur certaines relations vectorielles utilisées dans la cinématique 31

P. BARANY — Sur le choc simultané d'un système de corps . 37

CHIMIE PHYSIQUE

V. PĂRĂUȘANU — Le complexe activé dans la cinetique chimique 45

ELECTROCHIMIE

I. ATANASIU, L. STANCU — Sur le mécanisme de formation des produits oxigenés du chlore sur l'éléctrode de graphite 61

ELECTROTECHNIQUE

I. S. ATANASIU — Mesure de la puissance réactive en régime déformant 75

C. PENESCU, D. MARTAC — L'influence des régulateurs de tension et du phénomène de saturation sur les surtensions prolongées 85

E. POTOLEA — Schémas équivalents des systèmes électriques obtenus à l'aide du calcul matriciel 117

ELECTRONIQUE

M. DRĂGĂNESCU — L'influence des harmoniques sur l'oscillateur electronique prevu avec un élément réactif nonliné aire 147

ONDES ELECTROMAGNETIQUES

ED. NICOLAU — Sur la théorie de l'antenne de réception . . 165

A. MILLEA — Guides d'ondes à section rectangulaire . . . 171

RADIOCOMMUNICATIONS

AL. SPĂTARU — Estimation du bruit de fluctuations d'un générateur modulé en amplitude par des impulsions modulées en position 187

INHALT

MATHEMATIK

E. SIMACOVA — Über den Primteilern der Polinome mit ganzen Koefizienten 13

PHYSIK

D. EITEL — Präliminären Untersuchungen auf die Reflection und Durchlässickeit von dünnem Bleischichten . . . 27

MEKANIK

M. ATANASIU — Über gewissen wektoriellen Beziehungen benützt in der kinematic 31

P. BARANY — Über den simultanen Stoss eines Körpersystems 37

PHYSIKALISCHE CHEMIE

V. PĂRĂUȘANU — Der actiwen komplex in der chemischen kinetik 45

ELEKTROCHEMIE

I. ATANASIU, L. STANCU — Bildungsmechanismus von oxydierten Chlorzusammensetzungen auf Graphitelelektrode . 61

ELEKTROTECHNIK

I. S. ANTONIU — Die messung der Blindleistung im Verzerrungsbetrieb 75

C. PENESCU, D. MARTAC — Einfluss der Spannungsregler und der Transformatorsättigung auf stationäre Überspannungen 85

E. POTOLEA — Bestimmung gleichwertiger Schemen elektrischer Netze durch Matrizenrechnung 117

ELEKTRONIK

M. DRĂGĂNESCU — Der Einfluss höherer Harmonischen auf einen elektronischen Oszillator mit nichtlinearem Blindwiderstand 147

ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

ED. NICOLAU — Über die Theorie der Empfangsantennes . 165

A. MILLEA — Hohlleiter mit dreieckigem Querschnitt . . 171

FUNKTECHNIK

AL. SPĂTARU — Abwertung der Modulationsgeräusche bei einem Amplitudenmodulierten generator durch Phasenmodulierte pulse 187

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

MATEMATICĂ

517.5

О ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЯХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПОЛИНОМА

ЭЛЕОНОРА СИМАКОВА

Теорема, доказываемая в настоящей статье, является обобщением теоремы П. Л. Чебышева относительно простых делителей чисел вида x^2+1 и формулируется следующим образом:

Теорема.

Пусть $f(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n \qquad (a_0\neq 0)$ (1)

неприводимый в поле рациональных чисел полином степени $n>1$ с целыми коэффициентами и N целое >0. Пусть p_N наибольший простой делитель числа

$$f(1)\cdot f(2)\ldots f(N) \tag{2}$$

Тогда

$$\frac{p_N}{N}\to\infty \quad \text{при} \quad N\to\infty$$

Для доказательства рассмотрим две вспомогательные леммы.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — корни полинома $f(x)$, эти корни полинома все различны, т. к. $f(x)$ неприводим в поле рациональных чисел; дискриминант полинома $f(x)$

$$D(f)=a_0^{2n-2}\prod(\alpha_K-\alpha_l)^2 \tag{3}$$
$$k,l=1,2,\ldots,n \qquad k<l$$

есть, как известно, целое число $\neq 0$.

Лемма I. Пусть p — простое число, не делящее $a_0 D(f)$, тогда сравнение

$$f(x)\equiv 0 \,(\mathrm{Mod}\, p)$$

не может иметь кратных корней.

Предположим противное и пусть $x=x_0$ есть целое число, удовлетворяющее сравнениям:

$$f(x)\equiv 0,\ f'(x)\equiv 0 \,(\mathrm{Mod}\, p) \tag{4}$$

Положим $y=a_0 x$ и получим

$$a_0^{n-1} f(x)=y^n+b_1 y^{n-1}+\ldots+b_n=\varphi(y),\quad a_0^{n-2} f'(x)=\varphi'(y),$$

причем $\varphi(y)$ также неприводимый полином с целыми коэффициентами.

Число $y_0 = a_0 x_0$ удовлетворяет сравнениям

$$\varphi(y) \equiv 0, \quad \varphi'(y) \equiv 0 (\mathrm{Mod}\, p) \tag{4'}$$

Корнями нового полинома $\varphi(y)$ будут числа $\beta_i = a_0 \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, его дискриминант

$$D(\varphi) = \prod_{k,l=1,2,\ldots,n \quad k<l} (\beta_K - \beta_l) = a_0^{(n-2)(n-1)} D(f) \tag{5}$$

по условию не делится на p. Корни $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ суть целые алгебраические числа.

Присоединим эти числа к полю рациональных чисел k и получим нормальное алгебраическое поле

$$\bar{k} = k(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Разложим число p на простые идеалы в поле $\bar{k}$:

$$p = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots$$

и пусть $\mathfrak{p}$ — один из этих идеалов. Из (4′) имеем

$$0 \equiv \varphi(y_0) \equiv (y_0 - \beta_1) \ldots (y_0 - \beta_n) (\mathrm{Mod}\ \mathfrak{p})$$

Т. к. $y_0 - \beta_1, \ldots, y_0 - \beta_n$ есть целые алгебраические числа поля $\bar{k}$ и произведение их делится на простой идеал $\mathfrak{p}$, то один из множителей должен делиться на $\mathfrak{p}$ т. е.

$$y_0 \equiv \beta_i (\mathrm{Mod}\ \mathfrak{p})$$

при некотором $i = 1, 2, \ldots, n$.

Далее

$$0 \equiv \varphi'(y_0) = \varphi'(\beta_i) = (\beta_i - \beta_1) \ldots (\beta_i - \beta_{i-1})(\beta_i - \beta_{i+1}) \ldots (\beta_i - \beta_n) (\mathrm{Mod}\, \mathfrak{p})$$

откуда $\beta_i - \beta_j \equiv 0 (\mathrm{Mod}\, \mathfrak{p})$, $i \neq j$. Поэтому из (5) вытекает, что $D(\varphi)$ делится на $\mathfrak{p}$, а т. к. $D(\varphi)$ есть целое рациональное число, то $D(\varphi)$ делится на p. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.

Если сравнение n — ой степени

$$f(x) \equiv 0 (\mathrm{Mod}\, p) \tag{6}$$

по какому-нибудь простому модулю p имеет только простые корни, число которых равно $k (0 \leqslant k \leqslant n)$, то по всякой степени p

$$f(x) \equiv 0 (\mathrm{Mod}\, p^m) \tag{7}$$

это сравнение имеет точно k корней.

Из условия леммы вытекает, что наше утверждение справедливо для $m = 1$, поэтому предположим, что оно доказано для некоторого $m \geqslant 1$ и докажем его справедливость для $m + 1$.

Таким образом, мы предполагаем, что сравнение (7) имеет k различных (по Mod p^m) корней $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$. Пусть β корень сравнения

$$f(x) \equiv 0 (\mathrm{Mod}\, p^{m+1}) \tag{8}$$

Т. к. $f(\beta)\equiv 0\,(\mathrm{Mod}\,p^m)$, то для некоторого $i=1, 2,\ldots, k$ имеем

$$\beta\equiv\beta_i\,(\mathrm{Mod}\,p^m), \qquad \text{т. е.}$$

$$\beta=\beta_i+p^m t, \quad t\text{ — целое.}$$

Чтобы определить β по Mod p^{m+1}, нужно определить t по Mod p. Применяя формулу Тэйлора, получим

$$0\equiv f(\beta)=f(\beta_i+p^m t)=f(\beta_i)+p^m t f'(\beta_i)+p^{2m}t^2\frac{f''(\beta_i)}{2!}+\ldots(\mathrm{Mod}p^{m+1}).$$

Т. к. $\frac{f''(\beta_i)}{2!}$, $\frac{f'''(\beta_i)}{3!}$, ... суть целые числа и все степени p^{2m}, p^{3m},... делятся на $p^{m+1}(m\geqslant 1)$, то последнее сравнение равносильно такому

$$f(\beta_i)+p^m t f'(\beta_i)\equiv 0\,(\mathrm{Mod}\,p^{m+1})$$

или

$$\frac{f(\beta_i)}{p^m}+t f'(\beta_i)\equiv 0\,(\mathrm{Mod}\,p) \tag{9}$$

Число β_i во всяком случае удовлетворяет сравнению

$$f(\beta_i)\equiv 0\,(\mathrm{Mod}\,p)$$

и, т. к. по условию сравнение (6) не имеет кратных корней, то

$$f'(\beta_i)\not\equiv 0\,(\mathrm{Mod}\,p).$$

Отсюда ясно, что сравнение первой степени (9) дает единственное значение для t по Mod p. Взяв все корни $\beta_i (i=1, 2, \ldots k$ сравнения (7) и определив для каждого из них соответствующее t по (9), мы и получим все корни $\beta_i+p^m t$ сравнения (8), число которых будет k. Лемма доказана.

Рассмотрим далее число $M=(a_0 D(f))^K$, причем показатель $k>0$ берем настолько большим, чтобы каждый простой множитель, входящий, одновременно в $a_0 D(f)$ и a_n входил бы в M с показателем бо́льшим, чем в a_n. Очевидно, что M зависит только от $f(x)$ но не от N.

Положим $x=Mz$ и в новом полиноме

$$f(Mz)=a_0 M^n z^n+a_1 M^{n-1} z^{n-1}+\ldots+a_{n-1} M z+a_n$$

выделим общий наибольший делитель d его коэффициентов.

Полином

$$\varphi(z)=\frac{1}{d}f(Mz)=\frac{a_0 M^n}{d}z^n+\ldots+\frac{a_n}{d} \tag{10}$$

является неприводимым и целочисленным, причем каждое простое p, входящее в $a_0 D(f)$ будет входить во все коэффициенты

$$\frac{a_0 M^n}{d},\ldots,\frac{a_{n-1} M}{d}$$

и не будет входить в $\frac{a_n}{d}$.

Поэтому $\varphi(z)$ не делится на простые p, входящие в $a_0 D(f)$. Теорему достаточно доказать для $\varphi(z)$.

Действительно, оставим из значений $x = 1, 2, \ldots, N$ только значения делящиеся на M, т.е.

$$x = Mz, \quad z = 1, 2, \ldots, N', \quad N' = \left[\frac{N}{M}\right], \quad \frac{N'}{N} \to \frac{1}{M}, \quad N' \to \infty.$$

Тогда $p_N \geqslant q_{N'}$ где $q_{N'}$ — наибольший простой делитель числа

$$f(M) \cdot f(2M) \ldots f(N'M).$$

Далее будет показано, что $q_{N'}$ бесконечно растет при $N' \to \infty$, поэтому $q_{N'}$ при всех $N' \geqslant N_0'$ будет и наибольшим простым делителем числа.

$$\frac{1}{d^N} \cdot f(M) f(2M) \ldots f(N'M) = \varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(N').$$

Поэтому если теорема будет доказана для полинома $\varphi(z)$ то будем иметь

$$\frac{p_N}{N} \geqslant \frac{N'}{N} \cdot \frac{q_{N'}}{N'} \to \infty, \text{ при } N \to \infty.$$

Итак, будем рассматривать полином

$$\varphi(z) = b_0 z^n + \cdots + b_n. \tag{11}$$

По лемме I сравнение

$$\varphi(z) \equiv 0 \,(\mathrm{Mod}\ q) \tag{12}$$

имеет только простые корни.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех простых p, не делящих $a_0 D(f)$ и разделим его на $(n+1)$ множеств

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1 + \cdots + \mathfrak{M}_n,$$

причем $\mathfrak{M}_k$ есть множество тех простых $p \in \mathfrak{M}$ для которых сравнение (12) имеет точно k различных корней $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Будем предполагать $b_0 > 0$.

Выберем целое N_0 так, чтобы

$$\frac{|b_1|}{b_0 N_0} + \frac{|b_2|}{b_0 N_0^2} + \cdots + \frac{|b_n|}{b_0 N_0^n} < 1.$$

При $z > N_0$ имеем

$$\varphi(z) = b_0 z^n \left(1 + \frac{b_1}{b_0 z} + \cdots + \frac{b_n}{b_0 z^n}\right) \geqslant b_0 z^n \left(1 - \frac{|b_1|}{b_0 z} - \cdots - \frac{|b_n|}{b_0 z^n}\right) =$$

$$= b_0 z^n \left(1 + 0\left(\frac{1}{z}\right)\right) > 0. \tag{13}$$

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{z = N_0 + 1}^{N'} \ln \varphi(z) \tag{14}$$

На основании (13) и формулы Стирлинга имеем:

$$S \geqslant \sum_{z=N_0+1}^{N'} \ln(b_0 z^n) + \sum_{z=N_0+1}^{N'} \ln\left(1+0\left(\frac{1}{z}\right)\right) = (N'-N_0)\ln b_0 +$$

$$+ n \sum_{z=N_0+1}^{N'} \ln z + 0\left(\sum_{z=N_0+1}^{N'} \frac{1}{z}\right) = N' \ln b_0 + n \sum_{z=1}^{N'} \ln z +$$

$$+ 0(\ln N') = n N' \ln N' + 0(N'). \tag{15}$$

Оценим теперь сумму S сверху; для этого разложим каждое из положительных целых чисел $\varphi(z)(z = N_0+1, \ldots, N')$ на простые множители q. Это будут числа принадлежащее $\mathfrak{M}$, причем $q \leqslant q'$, где q' наибольший простой делитель произведения

$$\varphi(1)\cdot\varphi(2)\cdots\varphi(N').$$

Сумму (14) можно записать в виде

$$S = \sum_{q \in \mathfrak{M},\ q \leq q'} \lambda_q \ln q \tag{16}$$

Обозначим через $P(l)$, (l — целое > 0) число чисел в ряду

$$\varphi(N_0+1), \varphi(N_0+2), \ldots, \varphi(N') \tag{17}$$

делящихся на l, тогда

$$\lambda_q = P(q) + P(q^2) + \cdots + P(q^m) \tag{18}$$

Из (13) видно, что при $z > N_0$ имеем $\varphi(z) > 0$ и $\varphi'(z) > 0$, поэтому

$$q^m \leqslant \varphi(N'),\quad m \leqslant \frac{\ln \varphi(N')}{\ln q} < c\,\frac{\ln N'}{\ln q};\quad c = \text{const.} \tag{19}$$

Пусть $q \in \mathfrak{M}_k$, тогда по леммам 1, 2, сравнение

$$\varphi(z) \equiv 0 \,(\text{Mod } q^h)$$

имеет к различных решений в полной системе вычетов по Mod q^h.

Разделим ряд чисел $z = N_0+1, N_0+2, \ldots, N'$ на части:

$$N_0+1, \quad N_0+2, \ldots, \quad N_0+q^h$$

$$N_0+q^h+1, \quad N_0+q^h+2, \ldots, \quad N_0+2q^h$$

. . . . . .

$$N_0+(l-1)q^h+1, \quad N_0+(l-1)q^h+2, \ldots, N_0+l\,q^h$$

$$N_0+l\,q^h+1, \quad N_0+l\,q^h+2, \ldots, N',$$

где $l = \left[\frac{N'-N_0}{q^h}\right]$;

В каждом из этих рядов существует к значений z, для которых $\varphi(z) \equiv 0 \pmod{q^h}$, поэтому

$$P(q^h) \leqslant (l+1)k \leqslant \left(\frac{N'}{q^h}+1\right)k$$

формула (18) даёт

$$\lambda_q \leqslant k\frac{N'}{q}+k\left(\frac{N'}{q^2}+\frac{N'}{q^3}+\cdots\right)+mk \leqslant k\frac{N'}{q}+n\frac{N'}{q(q-1)}+c'\frac{\ln N'}{\ln q},$$

$$c' = \text{const}.$$

Подставляя это в (16), получим:

$$S \leqslant N' \sum_{q \in \mathfrak{M},\ q \leq q'} k\frac{\ln q}{q} + nN' \sum_{q=2}^{\infty} \frac{\ln q}{q(q-1)} + c'\pi(q')\ln N', \qquad (20)$$

где $\pi(q')$ — количество простых чисел не превышающих q'.

Для этой величины, как известно, имеем

$$\pi(q') \leqslant c''\frac{q'}{\ln q'}, \qquad c'' = \text{const}.$$

Поэтому (20) даёт

$$S \leqslant N' \sum_{q \in \mathfrak{M},\ q \leq q'} k\frac{\ln q}{q} + 0(N') + 0\left(\frac{q'\ln N'}{\ln q'}\right).$$

Соединяя это неравенство с (15), получим:

$$n\ln N' + 0(1) \leqslant \sum_{q \in \mathfrak{M},\ q \leq q'} k\frac{\ln q}{q} + 0(1) + 0\left(\frac{q'}{\ln q'}\cdot\frac{\ln N'}{N'}\right) \qquad (21)$$

Отсюда вытекает, что $q' \to \infty$ при $N' \to \infty$.

Действительно предположим, что для

$$N' = N_1', N_2', \ldots \to \infty$$

число q' остается ограниченным.

Тогда для этой последовательности в (21) левая часть бесконечно растет, а правая остается ограниченной, что невозможно.

Воспользуемся теперь двумя теоремами Дедекинда из теории алгебраических полей.

Пусть θ — целое алгебраическое число и к (θ) — алгебраическое поле.

Теорема I. Для того, чтобы простое p разлагалось в поле к (θ) на различные простые идеалы, необходимо и достаточно, чтобы p не входило в дискриминант D_0 поля к (θ).

Теорема 2. Пусть простое p не делит дискриминант полинома $\psi(x)$, $(D_0 \not\equiv 0 \pmod{p})$, ($\theta$ — корень уравнения $\psi(x)=0$). Разложим $\psi(x)$ по Mod p на просты (по Mod p) ф-ции:

$$\psi(x) \equiv P_1(x)P_2(x)\cdots P_\nu(x) \pmod{p}, \qquad (22)$$

где $P_i(x) = x^{f_i} + a_i x^{f_i-1} + \cdots$ функция степени f_i с целыми коэффициентами, простая по Mod p. Тогда p в поле к (θ) разлагается следующим образом на простые идеалы:

$$p = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_v, \quad \mathfrak{p}_v \text{ — о. н. д. } (p,\ P_i\ (\theta)),\ N(\mathfrak{p}_i) = p^{f_i}.$$

Рассмотрим теперь дзета-функцию Дедекинда, соответствующую полю к (θ).

$$\zeta_k(s) = \sum_{\mathfrak{o}} \frac{1}{N(\mathfrak{o})^s},$$

где $\mathfrak{o}$ пробегает все целые отличные от нуля идеалы поля к (θ) и s — комплексная переменная. Ряд (23) сходится при $R(s) > 1$.
Пусть $R(s) > 1$. Тогда

$$\zeta_k(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}},$$

где $\mathfrak{p}$ пробегает все различные простые идеалы поля к (θ).

Известно что

$$\lim (s-1)\zeta_k(s) = h\chi \neq 0,$$

т.е. точка $s = 1$ является полюсом I-ой кратности функции $\zeta_k(s)$.

Доказано, что функцию $\zeta_k(s)$ можно аналитически продолжить на всю плоскость комплексного переменного s, тогда

$$\zeta_k(s) = \frac{\varphi(s)}{s-1}, \text{ где}$$

$\varphi(s)$ — регулярная функция в окрестности точки $s = 1$ и $\varphi(s) \neq 0$ в точке $s = 1$.

$$\frac{\zeta_k'(s)}{\zeta_k(s)} = \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} - \frac{1}{s-1}. \tag{24}$$

Легко получить равенство

$$\ln \zeta_k(s) = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} + G(s),$$

где $\mathfrak{p}$ пробегает лишь различные простые идеалы первой степени в k (θ) и $G(s)$ — функция, ограниченная вместе со своей производной при $s \to 1$.

$$\frac{\zeta_k'(s)}{\zeta_k(s)} = -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\ln N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} + G'(s) \tag{24'}$$

Соединяя формулы (24) и (24'), получим

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\ln N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} = \frac{1}{s-1} + g(s) \tag{25}$$

где $g(s)$ остается ограниченной при $R(s) > 1$ и $s \to 1$.

Применим все эти соображения к нашей цели.

Т. к. $\varphi(z)$ может иметь $b_0 \neq 1$, полагаем $t = b_0 z$ и вводим новый полином:

$$b_0^{n-1}\varphi(z) = \psi(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n.$$

Если ϱ — корень полинома $\varphi(z)$, то $\theta = b_0\varrho$ будет корнем $\psi(t)$. Рассмотрим поле $\bar{k} = k(\varrho) = k\theta$; простые $p \in \mathfrak{M}$ не входят в дискриминант уравнения $\psi(t) = 0$. Корни z сравнения (12) подстановкой $t = b_0 z$ переходят в корни сравнения $\psi(t) \equiv 0 \pmod q$. Если сравнение

$$\varphi(z) \equiv 0 \pmod q$$

имело к различных корней, то и сравнение

$$\psi(t) \equiv 0 \pmod q$$

будет иметь к различных корней.

Заметим далее, что если сравнение

$$\psi(t) \equiv 0 \pmod q$$

имеет простой корень $t = t_0$, то полином $\psi(t)$ делится по Mod q на первую степень двучлена $t - t_0$, ($t - t_0$ является простой функцией первой степени по Mod q). Поэтому существование к различных простых корней $t_1, t_2, \ldots, t_k$ сравнения

$$\psi(t) \equiv 0 \pmod q$$

равносильно существованию к простых функций первой степени в разложении полинома $\psi(t)$ на простые функции по Mod q:

$$\psi(t) = (t - t_1) \cdots (t - t_k) P_{k+1}(t) \cdots \pmod q$$

Применяя теорему 2 Дедекинда, можно сказать, что это, в свою очередь, равносильно тому, что в разложении q на простые идеалы поля $\bar{k}$:

$$q = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k \mathfrak{p}_{k+1}$$

имеется равно к простых идеалов первый степени

$$N(\mathfrak{p}_1) = \cdots = N(\mathfrak{p}_k) = q.$$

Окончательно можно сказать: простые числа q множества $\mathfrak{M}_k$ суть те простые, не входящие в $a_0 D(f)$, для которых в разложении на простые идеалы поля $\bar{k}$ входит к простых идеалов первой степени.

Применим формулу (25) к полю $\bar{k}$. Заметим, что в левой части будет входить конечное число членов $\dfrac{\ln N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}$, для которых соответствующее простое $p = N(\mathfrak{p})$ входит в $a_0 D(f)$. Эти члены при $s \to 1$ остаются ограниченными и их можно отнести к функции $g(s)$. Остальные члены $\dfrac{\ln N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}$ объединим в группы, причем в одну группу соединим те члены, для которых простое $N(\mathfrak{p}) = q$ одно и то же.

Если $q \in \mathfrak{M}_k$, то таких членов будет k:

$$\frac{\ln N(p_1)}{N(p_1)^s}, \ldots \frac{\ln N(p_k)}{N(p_k)^s}, \quad N(p_1) = \cdots = N(p_k) = q.$$

Таким образом, (25) можно переписать так:

$$\sum_{q \in \mathfrak{M}} k \frac{\ln q}{q^s} = \frac{1}{s-1} + 0(1), \text{ при } R(s) > 1, s \to 1 \tag{26}$$

Это равенство позволяет дать оценку суммы

$$\sigma = \sum_{q \in \mathfrak{M}, q \leqslant q'} k \frac{\ln q}{q}$$

входящей в (21).

Положим $s = 1 + \frac{1}{\ln q'}$, имеем $s > 1$, $s \to 1$.

Применяя формулу (26) к этому s, получим:

$$\sigma = \sum_{q \in \mathfrak{M}, q \leqslant q'} k \frac{\ln q}{q} \leqslant \sum_{q \in \mathfrak{M}, q \leqslant q'} k \frac{\ln q}{q} \left(\frac{q'}{q}\right)^{\frac{1}{\ln q'}} < q^{\frac{1}{\ln q'}} \sum_{q \in \mathfrak{M}} \frac{\ln q}{q^s} = l\left(\frac{1}{s-1} + 0(1)\right) =$$

$$= e\,(\ln q' + 0(1)) = e \ln q' + 0(1).$$

Поэтому неравенство (21) даёт

$$n \ln N' + 0(1) \leqslant e \ln q' + 0\left(\frac{q'}{\ln q'} \cdot \frac{\ln N'}{N'}\right) \tag{27}$$

Пусть $n > 2$, тогда $n > e$.

Мы хотим доказать, что

$$\frac{q'}{N'} \to \infty \text{ при } N' \to \infty.$$

Предположим противное и пусть для бесконечной последовательности

$N' = N'_1, N'_2, \ldots$ имеем

$$\frac{q'}{N'} < c, \quad c - \text{const.}$$

из $q' < cN'$ имеем:

$$\frac{q'}{\ln q'} < \frac{cN'}{\ln(cN')} < c\frac{N'}{\ln N'}, \quad \frac{q'}{\ln q'} \cdot \frac{\ln N'}{N'} < c \text{ и}$$

(27) даёт:

$$n \ln N' + 0(1) \leqslant e \ln q' + 0(1) \leqslant e \ln N' + 0(1),$$

что невозможно.

Остается рассмотреть случай $n=2$.
В этом случае (21) имеет вид:

$$2\ln N'+0(1)\leqslant\sum_{q\in\mathfrak{M}\,q\leqslant q'}k\frac{\ln q}{q}+0\left(\frac{q'}{\ln q'}\cdot\frac{\ln N'}{N'}\right)\tag{28}$$

При $n=2$ поле $\overline{k}$ квадратичное и его дискриминант D_0 есть целое число $\gtrless 0$, не равное потому квадрату. Коэффициент $k=k_q$ может иметь лишь значения $k=0,1,2$. Значения $k=1$ быть не может, т. к. при $k=1$ в разложении $q=\wp_1\wp_2$ должен быть простой идеал $\wp_1$ первой степени; но тогда и $\wp_2$ — первой степени, т. е. должно быть $k=2$.

Если $q\neq 2$ то, как известно,

$k=0, q\in\mathfrak{M}_0$, если символ Лежандра $\left(\frac{D_0}{q}\right)=-1$.

$k=2, q\in\mathfrak{M}_2$, если символ Лежандра $\left(\frac{D_0}{q}\right)=+1$.

Поэтому имеем:

$$\sum_{q\in\mathfrak{M},q\leqslant q'}k\frac{\ln q}{q}=\sum_{\left(\frac{D_0}{q}\right)=1.(q,2D_0)=1,q\leqslant q'}2\cdot\frac{\ln q}{q}=$$

$$=\sum_{(q,2D_0)=1,q\leqslant q'}\left(1+\left(\frac{D_0}{q}\right)\right)\frac{\ln q}{q}=\sum_{q\leqslant q'}\frac{\ln q}{q}+\sum_{(q,2D_0)=1,q\leqslant q'}\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{\ln q}{q}+0(1)=$$

$$=\ln q'+\sum_{(q,2D_0)=1,q\leqslant q'}\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{\ln q}{q}+0(1)\tag{29}$$

Т.к. $\left(\frac{D_0}{q}\right)$ не главный характер, то

$$\sum_{(q,2D_0)=1,q\leqslant q'}\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{\ln q}{q}=0(1)$$

так что (29) дает

$$\sum_{q\in\mathfrak{M}\,q\leqslant q'}k\frac{\ln q}{q}=\ln q'+0(1)$$

Подставим последнее выражение в неравенство (28)

$$2\ln N'+0(1)\leqslant\ln q'+0(1)\leqslant\ln N'+0(1),$$

что невозможно.

Таким образом теорема полностью доказана.

Кафедра Математики
Бухарестский Политехнический Институт

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гекке* — Лекции по теории алгебраических чисел. 1946. Москва
2. *Чеботарёв* — Основы теории Галуа ч. II. 1945. Москва
3. *Делоне* и *Фадеев* — Теория иррациональностей третьей степени. 1950. Москва.

О ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЯХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПОЛИНОМА

(Краткое содержание)

В настоящей статье дается обобщение одной теоремы П. Л. Чебышева о простых делителях полинома x^2+1.

Доказывается теорема:

Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n, \quad a_0\neq 0$ неприводимый в поле рациональных чисел полином степени $n>1$ с целыми коеффициентами и N целое >0.

Пусть P_N наибольший простой делитель числа

$$f(1)f(2)\cdots f(N) \tag{2}$$

Тогда

$$\frac{p_N}{N}\to\infty \text{ при } N\to\infty.$$

Теорема доказывается с помощью следующих двух лемм.

Лемма 1. Пусть p—простое число и $p\chi a_0D(f)$, тогда сравнение

$$f(x)\equiv 0\,(\mathrm{Mod}\ p)$$

имеет только простые корни.

Лемма 2. Если сравнение n—ой степени

$$f(x)\equiv 0\,(\mathrm{Mod}\ p)$$

имеет только простые корни и их число равно $k\,(0\leqslant k\leqslant n)$. тогда сравнение

$$f(x)\equiv 0\,(\mathrm{Mod}\ p^m)$$

иммет точно к корней.

Используя леммы получено неравенство

$$n\ln N'+0(1)\leqslant\sum_{\mathfrak{q}\in\mathfrak{M},\ \mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{q}'}k\frac{\ln\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}}+0(1)+0\left(\frac{\mathfrak{q}'}{\ln\mathfrak{q}'}\cdot\frac{\ln N'}{N'}\right).$$

Доказательство теоремы вытекает из неравенства, применяя две теоремы Дедекинда и функцию Дедекинда

$$\zeta_k(s)=\sum\frac{1}{N(\mathfrak{o})^s},$$

из теории алгебраических полей.

Отдельно рассматриваются случаи $n>2$ и $n=2$.

ON THE PRIME DIVISORS OF THE POLYNOM WITH INTEGER COEFFICIENTS

(Summary)

In this article it is proved a theorem, which is a generalization of Cebysev's theorem about prime divisors of the polynom x^2+1.

It is proved the theorem:

let $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, $a_0\neq 0$, $n>1$

be a primitive polynom in the field of the rational numbers with integer coeficients and N — integer number >0; let p_N — be the greatest prime divisor of the number

$$f(1)\cdot f(2)\cdots f(N), \text{ then}$$

$$\frac{p_N}{N}\to\infty, \text{ when } N\to\infty$$

The proof depends on two lemmas.

Lemma 1: if p is prime and $p\chi a_0D(f)$, then

$$f(x)\equiv 0(\text{Mod } p)$$

has only simple roots.

Lemma 2: if congruence

$$f(x)\equiv 0(\text{Mod } p)$$

has only simple roots and their number is $k(0\leqslant k\leqslant n)$, the congruence

$$f(x)\equiv 0 \ (\text{Mod } p^m)$$

has exactily k roots.

Using these lemmas we obtain the inequality

$$n\ \ln N'+0(1)\leqslant\sum_{q\leqslant q',\ q\in\mathfrak{M}} k\frac{\ln q}{q}+0(1)+0\left(\frac{q'}{\ln q'}\cdot\frac{\ln N'}{N'}\right)$$

At last, to prove the theorem, we are using two theorems of Dedekind and the Dedekind's function

$$\zeta_k(s)=\sum\frac{1}{N(\text{oi})^s}$$

The cases $n>2$ and $n=2$ have been proved separately.

SUR LES DIVISEURS PREMIERS D'UN POLYNOME À COEFFICIENTS ENTIERS

(Résumé)

On donne une généralisation d'un théorème de P. L. Cebîşev, sur les diviseurs prims du polynôme x^2+1.

On démontre ce théorème:

Soit $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_n$, $a_0\neq 0$ un polynôme sans diviseurs dans le corps des nombres rationels, de degré $n>1$, a coefficients entiers et N un nombre entier >0.

Soit p_N le plus grand diviseur premier du nombre

$$f(1).f(2)\ldots f(N)\ ;\ \text{alors}$$

$$\frac{p_N}{N}\to\infty,\ \text{quand}\ N\to\infty$$

Le théorème se démontre à l'aide des deux lemmes suivantes :

Lemme 1. Soit p — un nombre premier et $p\ \chi\ a_0\ D\ (f)$, alors la congruence

$$f(x)\equiv 0\ \ (\text{Mod}\ p)$$

a seulement des racines simples.

Lemme 2. Si la congruence de degré n

$$f(x)\equiv 0\ \ (\text{Mod}\ p)$$

a seulement des racines simples et leur nombre est k $(o\leqslant k\leqslant n)$ alors la congruence

$$f(x)\equiv 0\ \ (\text{Mod}\ p^m)$$

a exactement k racines.

A l'aide de ces deux lemmes on obtient l'inégalité suivante :

$$n\ \ln\ N'+0(1)\leqslant\sum_{q\leqslant q'\ \ q\in\mathfrak{M}} k\frac{\ln q}{q}+0\ (1)+0\left(\frac{q'}{\ln q'}\cdot\frac{\ln N'}{N'}\right)\qquad(21)$$

Puis on utilise deux lemmes de Dedekind sur la théorie des corps algebriques et la fonction de Dedekind

$$\zeta_k(s)=\sum\frac{1}{N(\mathfrak{o}\mathfrak{l})^s}$$

On a consideré separément les cas $n>2$ et $n=2$.

ÜBER DEN PRIMTEILERN DER POLINOME MIT GANZEN KOEFIZIENTEN

(Zusammenfassung)

In der vorliegender Arbeit wird eine Verallgemeinerung eines Lehrsatzes von P. L. Cebîşev über den Primteilern des Polinoms x^2+1 gegeben.

Folgender Lehrsatz wird bewiesen :

Es sei $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\quad a_n\neq 0$, ein Primpolinom $n>1$ im Korp der razionalen zahlen mit ganzen Koefizienten und N eine ganze Zahl >0.

Es sei p_N der grösste Primteiler de Zahl

$$f(1)f(2)\ldots f(N)$$

Wir beweisen dass in diesem Falle

$$\frac{p_N}{N} \to \infty \text{ wenn } N \to \infty$$

Zum Beweise verwenden wir folgende zwei Hilfssätze.

1. Hilfssatz.

Es sei p eine Primzahl und $p \chi a_0 D(f)$, dan hat folgende Kongruenz $f(x) \equiv 0 \ (Mod\ p)$ nur einfache wurzeln.

2. Hilfssatz.

Wen die n gradige Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 (\text{Mod } p)$$

nur einfache würzeln hat aeren Anzahl K ist $(0 \leqslant k \leqslant n)$ dan hat die Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \ (\text{Mod } p^m)$$

ebenfalls k wurzeln.

Mit Benützung der beiden obigen Hilfssätze wird die Gründungleichheit

$$n \ln N' + 0(1) \leqslant \sum_{\substack{q \leqslant q' \\ q \in \mathfrak{M}}} k \frac{\ln q}{q} + 0(1) + 0\left(\frac{q'}{\ln q'} \cdot \frac{\ln N'}{N'}\right) \qquad (21)$$

bewiesen.

Es werden zwei Lehrsätze (Dedekind) aus der Teorie der algebraischen Korp und die dedekindsche Function

$$\zeta_k(s) = \sum' \frac{1}{N(\mathfrak{o}_1)^s} \quad \text{benutzt.}$$

Zum Beweis hat man getrennt die Fälle $n > 2$ und $n = 2$ betrachtet.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

FIZICĂ

537.541

RECHERCHES PRÉLIMINAIRES SUR LA RÉFLEXION ET LA TRANSMISSION DES LAMES MINCES DE PLOMB

par DIANA EITEL

Les lames minces de plomb ont déja fait l'objet d'un certain nombre d'études, nottament dans notre pays. Pour compléter ces études, nous nous sommes proposés d'étudier la réflexion et la transmission en fonction du temps, pour les couches minces d'une épaisseur variant de 200 à 700 Å.

Pour déterminer le coefficient de réflexion on a utilisé une installation à cellule photoélectrique, le courant d'anode etant mesuré à l'aide d'un

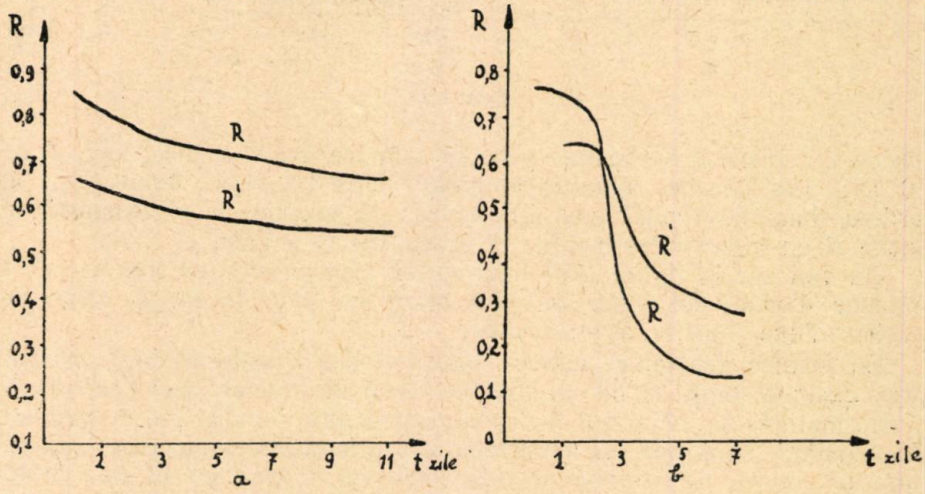


Figure 1

galvanomètre ayant une sensibilité de 10^{-10} A/mm.m. Les déviations du galvanomètre dûes à lumière réflétée par la couche mince ont été raportées aux déviations produites par la lumière réflétée sur un miroir considéré comme étalon. L'angle ne dépassant pas 4°, l'ncidence peut étre considérée comme normale.

La variation du coefficient de réflexion en fonction du temps est donnée par la figure (1), où on a notté par R le coefficient coté air et par R' le coefficient coté support. Pour les lames d'une épaisseur plus élevée, R' devient supérieur à R. Les courbes (1a) montrent le comportement

d'une lame mince gardée dans un éxicateur, tandis que les courbes (1b) donnent le comportement des lames maintenues dans une atmosphère humide. On voit la tendance de stabilisation de ces coefficients avec le temps.

Le coefficient de transmission a été mesuré par la méthode photométrique, en employant un photomètre Pulfrich. Les résultats sont donnés dans la figure (2) ; les courbes (2a) montrent la variation de la trans-

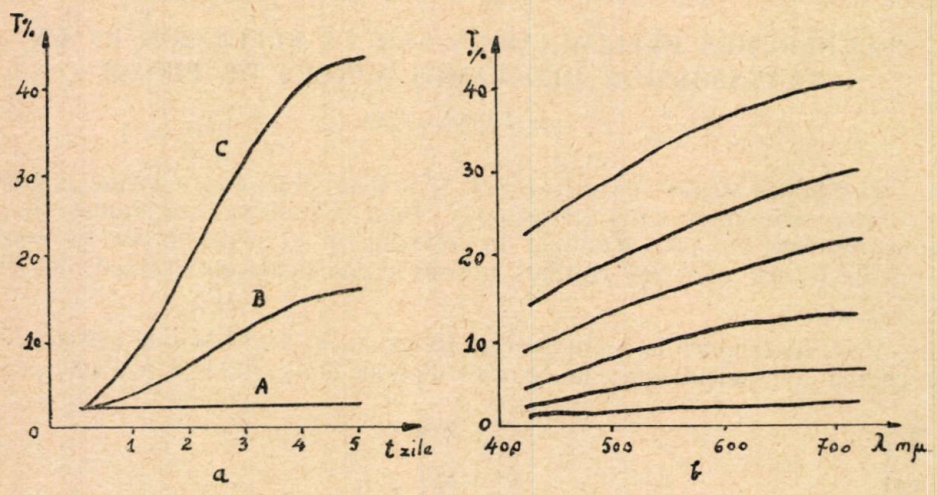


Figure 2

mission en fonction du temps, pour la lumière ayant la longueur d'onde 530 m μ. Les couches minces, obtenues dans le même temps, ont été gardées dans des conditions différentes : la couche *A* en éxicateur, la couche *B* en atmosphère humide et la couche *C* à l'air.

On voit sur la figure (2b) donnant la transmission en fonction de la longueur d'onde, des variation plus marquées vers le rouge, entre des couches d'une journée à l'intervalle.

En résumé, les lames minces subissent des transformations, arrivant après quelque temps à un état stable. Pour les lames plus épaisses les transformations se réduisent à des arrangements dans le réseau cristalin déjà existant, sans que les propriétés en different sensiblement ; au contraire les lames très minces ont la tendance à granuler et par ce fait la couche montre de solutions de continuité, d'où s'ensuit un chengement considerable dans les propriétés. On constate l'oxydation des lames minces maitenues dans l'atmosphère et, pour un temps plus long, la formation du carbonat de plomb. C'est l'apparition de l'oxyde de plomb, qui détermine l'alure des courbes (2b).

J'adresse mes vifs remerciments au professeur I. Agarbiceanu pour es bienveillants conseils accordés, aussi bien qu'au chef de travaux C. Gheorghita, pour l'aide prétée à l'obtention des couches.

La Chaire de Physique
Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *F. Ciorăscu, M. Nachman, M. Oncescu* — Studii și cercetări de Fizică t. 6 — 1955, 481.
2. *F. Ciorăscu, M. Nachman, A. Deveny, M. Oncescu* — Studii și cercetări de Fizică t. 7 — 1956, 25.
3. *D. Malé, J. Trompette* — J. Physique Rad. t. 18 — 1957, 128.
4. *J. Trompette* — J. Physique Rad. t. 17 — 1956 124.
5. *O. S. Heavens* — Optical Properties of Fhin Solid Film—London 1955.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАД ОТРАЖЕНИЕМ И ПЕРЕДАЧЕЙ СВИНЦОВЫХ ТОНКИХ СЛОЕВ

(Краткое содержание)

Было изучено изменение коэффициентов отражения и передачи в зависимости от времени для тонких свинцовых слоев толщиной в 200-700. Å. Оптические свойства этих слоев постичают устойчивость через несколько дней.

PRELIMINARY RESEARCHES ON THE REFLECTION AND TRANSMISSION OF THIN FILMS OF LEAD

(Summary)

The reflection and transmission coeficients of thin films of lead evaporated in vacuum have bem measured from the time of deposition up to a few weeks in different environment conditions. It has bem found that after a certain time they arrive at optical stability.

RECHERCHES PRELIMINAIRES SUR LA RÉFLEXION ET LA TRANSMISSION DES LAMES MINCES DE PLOMB

(Résumé)

On a étudié la variation en fonction du temps des coefficients de réflexion et de transmission pour des couches minces de plomb déposées par évaporation, d'une épaisseur variant de 200 à 700 Å. Après quelques jours les propriétés optiques de ces couches arrivent à un état de stabilité.

PRÄLIMINÄREN UNTERSUCHUNGEN AUF DIE REFLECTION UND DURCHLÄSSICHKEIT VON DÜNNEM BLEISCHICHTEN

(Zusammenfassung)

Es wurde die Veränderlichkeit des Reflections — und Durchlässichkeit Koeffizienten im Verältniss zur Zeit auf dünnen Bleischichten. Diese Schichten erreichen nach einigen Tagen eine Stabilität der optyschen Eigenschaften.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

MECANICA

SUR CERTAINES RELATIONS VECTORIELLES UTILISÉES DANS LA CINÉMATIQUE *)

par MIHAIL ATANASIU

1. *Introduction.* Les plus importants systèmes matériels, du mouvement desquels s'occupe la mécanique classique, sont le point matériel et le solide rigide ; en leur substituant les objets géométriques correspondants, le point et le trièdre triorthogonal droit et en utilisant les règles de calcul de l'algèbre et de l'analyse vectorielle, on établit une série de relations qui relient les variations des positions dans le temps de ces deux éléments jusqu'au deuxième ordre inclusivement.

En utilisant dans une forme générale des systèmes de référence mobiles nous nous proposons de montrer dans ce qui suit que les relations de base établies par la cinématique du mouvement relatif constituent un cas particulier d'une règle de dérivation de la somme d'un certain nombre de vecteurs fonction d'un paramètre scalaire.

2. *Notations.*

$T_1, T_2, \ldots, T_n$	n trièdres triorthogonaux mobiles ayant les orgines O_1, $O_2, \ldots, O_n$
T_0	le trièdre fixe ayant l'origine O_o
$\bar{e}_k^{(l)}$	les verseurs des axes du trièdre T_l $(k = 1, 2, 3)$.
$D_l = \frac{d_l}{dt}$	l'opérateur de dérivation par rapport au temps relativement au trièdre T_l.
$\bar{\omega}_{lm}$	le vecteur vitesse angulaire instantanée du trièdre T_l relativement au trièdre T_m.
$\bar{r}_l = \overline{O_l M}$	le vecteur de position du point mobile M relativement au trièdre T_l.
$\bar{r}_{lm} = \overline{O_l O_m}$	le vecteur de position de l'origine du trièdre T_m relativement au trièdre T_l.
$\bar{v}_l = \bar{v}_l(t)$	les vecteurs fonction du temps dont la résultante est $\bar{V}(t)$.
$X_k^{(l)} = \bar{v}_l \bar{e}_k^{(l)}$	la projection du vecteur $\bar{v}_l$ sur l'axe du verseur $\bar{e}_k$ du triedre T_l.

*) Communication présentée à la IV-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest (le 18—19 octobre 1958).

3. *Précisions et relations de base.*

a) Le mouvement du point M relativement au trièdre T_l est considéré connu lorsque la fonction vectorielle $\bar{r}_l = \bar{r}_l(t)$*) est donnée.

b) Le mouvement du trièdre T_l relativement au trièdre T_m est considéré connu lorsque les fonctions vectorielles $\bar{\omega}_{lm} = \bar{\omega}_{lm}(t)$ et $\bar{r}_{ml} = \bar{r}_{ml}(t)$*) sont données.

c) On considère connus les mouvements des trièdres T_l relativement à T_0, T_2 relativement à T_1, T_n relativement à T_{n-1}; ceci revient à considérer connue les fonctions $\bar{\omega}_{l,\,l-1}(t)$ et $\bar{r}_{l-1,\,l}(t)$, $l = 1, 2, \ldots, n$

d) On considère connu le mouvement du point M relativement à un certain trièdre T_l; ceci revient à considérer connue la fonction $\bar{r}_l = \bar{r}_l(t)$. Dans les calculs, pour la symétrie des relations on considérera l'origine d'un certain trièdre T_p de manière que le vecteur de position du point mobile M considéré relativement au trièdre T_l soit $\bar{r}_{lp}$.

e) En général chacun des vecteurs $\bar{\omega}_{lm}$, $\bar{r}_{lm}$, $\bar{r}_{lp}$, $\bar{v}_l$ peut être connu par ses projections sur les axes de l'un quelconque des trièdres $T_1, \ldots, T_n$. Dans les calculs il est cependant utile de connaître les projections de tous ces vecteurs sur les axes du trièdre T_l (trièdre indiqué par le premier indice).

f) Les moyennes représentées par les trièdres T_l ont la même métrique et la variable t est la même.

Les grandeurs mentionnées ci-dessus sont soumises aux relations évidentes suivantes:

$$\bar{e}_i^{(l)}\,\bar{e}_k^{(l)} = \delta_{ik} \quad (\delta_{ik}: \text{symbole de Kronecker};\ k, i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

$$\bar{r}_{lm} = -\bar{r}_{ml};\ \bar{r}_{ll} \equiv 0 \tag{2}$$

$$\bar{v} = \Sigma X_k^{(l)}\,\bar{e}_k^{(l)};\ \bar{V} = \sum_{l=1}^{n} \bar{v}_l \quad (1 = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

$$\bar{r}_{lp} = \bar{r}_{lm} + \bar{r}_{mp} \text{ d'où: } \bar{r}_{lp} = \sum_{k=l}^{k=p\pm1} \bar{r}_{k,\,k\mp1} \tag{4}$$

(Ici les signes supérieurs correspondent au cas $l > p$ et les signes inférieurs au cas $l < p$).

$$D_m\,\bar{e}_k^{(l)} = \bar{\omega}_{lm} \times \bar{e}_k^{(l)} \text{ (formules de Poisson; } k = 1, 2, 3) \tag{5}$$

$$D_l\,\bar{e}_k^{(l)} \equiv 0 \tag{6}$$

(parce que le vecteur $\bar{e}_k^{l}$ est constant en module et orientation relativement au trièdre T_l; il résulte $\bar{\omega}_{ll} \equiv 0$).

4. *Extension des règles de dérivation des vecteurs fonction d'un paramètre scalaire lorsque l'on considère plusieurs trièdres mobiles.*

A. *Cas d'un seul vecteur; dérivée par rapport au temps relativement à un trièdre mobile.*

*) Continues, dérivables jusqu'au deuxième ordre inclusivement.

α. *Le vecteur est donné en composantes sur les axes du trièdre relativement auquel s'effectue l'opération de dérivation.*

Soit le vecteur :

$$\bar{v}(t) = \sum_{k=1}^{3} X_k^{(l)}(t)\, \bar{e}_k^{(l)}(t) \tag{7}$$

En dérivant par rapport au temps relativement au trièdre T_l et en tenant compte de la relation (6) il résulte :

$$D_l \bar{v} = \sum_{k=1}^{3} \dot{X}_k^{(l)}\, \bar{e}_k^{(l)} \tag{8}$$

Observation. Si le vecteur variable $\bar{v}(t)$ garde le module et l'orientation constants *relativement au trièdre* T_l, c'est-à-dire si $X_k^{(l)}$ = constant, il résulte que $D_l \bar{v} \equiv 0$.

β. *Le vecteur est donné en composantes sur les axes d'un trièdre et l'opération de dérivation s'effectue relativement à un autre trièdre.*

En dérivant la relation (7) par rapport au temps relativement au trièdre T_m et en tenant compte des relations (5) et (8) il résulte :

$$D_m \bar{v} = \sum_{k=1}^{3} \dot{X}_k^{(l)} \bar{e}_k^{(l)} + \sum_{k=1}^{3} X_k^{(l)} D_m \bar{e}_k^{(l)}$$

ou finalement :

$$\boxed{D_m \bar{v} = D_l \bar{v} + \bar{\omega}_{lm} \times \bar{v}} \tag{9}$$

Observations.

a) Si l'opération de dérivation avait été effectuée relativement au trièdre T_l, on aurait obtenu selon la formule (9) :

$$D_l \bar{v} = D_m \bar{v} + \bar{\omega}_{ml} \times \bar{v} \tag{9'}$$

relation qui, comparée à (9) conduit à ($\bar{v} \neq 0$) :

$$\boxed{\bar{\omega}_{ml} = -\bar{\omega}_{lm}} \quad \text{et} \quad \boxed{\bar{\omega}_{ll} \equiv 0} \tag{10}$$

Des relations (2) et (10) on conclut que les indices de toutes les fonctions vectorielles mentionnées sont anticommutatifs.

b) De (9) on déduit :

$$D_p \bar{v} = D_l \bar{v} + \bar{\omega}_{lp} \times \bar{v} \tag{11}$$

$$D_p \bar{v} = D_m \bar{v} + \bar{\omega}_{pm} \times \bar{v} \tag{12}$$

De (9), (10), (11) il résulte ($v \neq 0$)

$$\boxed{\bar{\omega}_{lp} = \bar{\omega}_{lm} + \bar{\omega}_{mp}} \tag{13}$$

et

$$\boxed{\bar{\omega}_{lp} = \sum_{k=l}^{k=p\pm1} \bar{\omega}_{k,\,k\mp1}}$$

Cette relation, qui représente la formule d'addition des vecteurs $\bar{\omega}$ est du type (4), dans lequel $\bar{r}$ est remplacé par $\bar{\omega}$.

B. *La dérivée de la somme vectorielle par rapport au temps relativement à un certain trièdre lorsque l'on connaît les composantes de chacun des vecteurs sur les axes d'un trièdre respectif (le nombre des vecteurs est égal au nombre des trièdres mobiles).*

Soient les vecteurs :

$$\bar{v}_l(t) = \Sigma X_k^{(l)}(t)\,\bar{e}_k^{(l)}(t) \quad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

ayant la résultante $\bar{V}(t)$.

En dérivant chacun des vecteurs par rapport à un certain trièdre T_m nous avons, selon la relation (9) :

$$\begin{aligned} D_m \bar{v}_1 &= D_1 \bar{v}_1 + \bar{\omega}_{1m} \times \bar{v}_1 \\ D_m \bar{v}_2 &= D_2 \bar{v}_2 + \bar{\omega}_{2m} \times \bar{v}_2 \\ &\vdots \\ D_m \bar{v}_n &= D_n \bar{v}_n + \bar{\omega}_{nm} \times \bar{v}_n \end{aligned}$$

d'ou, en tenant compte de la distributivité de l'opérateur D_m par rapport à l'addition et de la seconde des relations (3), il résulte :

$$D_m \bar{V} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} D_\lambda \bar{v}_\lambda + \sum_{s=1}^{s=n} \bar{\omega}_{sm} \times \bar{v}_s \tag{16}$$

En remplaçant $\bar{\omega}_{sm}$ de la relation (14) il résulte finalement :

$$\boxed{D_m \bar{V} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} D_\lambda \bar{v}_\lambda + \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{k=s}^{k=m\pm1} \omega_{k,\,k\mp1} \times \bar{v}_s} \quad *) \tag{16'}$$

Observation. De (16') au plus facilement de (16) il résulte immédiatement :

$$D_m \bar{V} = D_p \bar{V} + \bar{\omega}_{pm} \times \bar{V}$$

ce qui était évident.

5. *Cas particuliers.* Par des transformations algébriques simples l'on peut montrer que les relations qui donnent la vitesse $\bar{v}$ d'un point mobile et l'accélération angulaire $\bar{\varepsilon}$ d'un solide rigide relativement à un trièdre fixe ou mobile sont des cas particuliers de la règle de dérivation (16') appliquée aux relations (4) et (14) dans lesquelles les vecteurs $\bar{v}_s$ sont successivement $\bar{r}_{s,\,s+1}$ respectivement $\bar{\omega}_{\mu,\,\mu-1}$.

*) En ce qui concerne les signes doubles, voir l'observation de la relation (4) ; de même $m \leqslant n$.

Les deux relations mentionnées se transcrivent dans nos notations de la manière suivante :

$$\bar{v} = D_o \bar{r}_{o,\,n+1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} D_\lambda \bar{r}_{\lambda,\,\lambda+1} + \sum_{k=1}^{k=n} \bar{\omega}_{k,\,k-1} \times \bar{r}_{k,\,n+1}$$

et (17)

$$\bar{\varepsilon}_{no} = D_o \bar{\omega}_{no} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} D_\lambda \bar{\omega}_{\lambda,\,\lambda-1} + \sum_{\substack{i,\,j=1 \\ j \leq 1}}^{\substack{j=n-1 \\ i=n}} \sum \bar{\omega}_{j,\,j-1} \times \bar{\omega}_{i,\,i-1}$$

La seconde relation (17) résulte presque immédiatement par la substitution montrée dans (16') avec $m = 0$; pour amener la relation (16') à la forme de la première relation (17) on observera que :

$$\bar{r}_{p,\,p+1} = \bar{r}_{p,\,n+1} + \bar{r}_{n+1,\,p+1} \qquad (p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1) \tag{18}$$

Le second terme de la formule (16) devient :

$$\sum_{s=0}^{s=n} \bar{\omega}_{s0} \times \bar{r}_{s,\,s+1} = \bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_{12} + \bar{\omega}_{20} \times \bar{r}_{23} + \ldots + \bar{\omega}_{n0} \times \bar{r}_{n,\,n+1}$$

dans laquelle :

$$\bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_{12} = \bar{\omega}_{10} \times (\bar{r}_{1,\,n+1} + \bar{r}_{n+1,\,2}) = \bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_{1,\,n+1} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_{n+1,\,2}$$

$$\bar{\omega}_{20} \times \bar{r}_{23} = (\bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{10}) \times (\bar{r}_{2,\,n+1} + \bar{r}_{n+1,\,3}) =$$

$$= \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{2,\,n+1} + \bar{\omega}_{10} \times r_{2,\,n+1} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{n+1,\,3} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_{n+1,\,3}$$

$$\vdots$$

$$\bar{\omega}_{n0} \times \bar{r}_{n,\,n+1} = (\bar{\omega}_{n,\,n-1} + \bar{\omega}_{n-1,\,n-2} + \ldots + \bar{\omega}_{10}) \times \bar{r}_{n,\,n+1}.$$

En efectuant l'addition et la réduction des termes $(\bar{r}_{p,\,p+1} = -\bar{r}_{p,\,p+1})$ il résulte :

$$\sum_{s=0}^{s=n} \bar{\omega}_{s0} \times \bar{r}_{s,\,s+1} = \sum_{s=0}^{s=n} \bar{\omega}_{s,\,s-1} \times \bar{r}_{s,\,n+1}.$$

6. *Conclusions.*

a) On observe que dans toutes ces relations le trièdre fixe ne joue pas un rôle spécial. Si l'on considère comme fixe un certain trièdre, les mouvements relatifs à ce trièdre deviennent absolus, les autres restant des mouvements relatifs et de transport.

b) Les généralisations ci-dessus ont été effectuées en vue de l'étude des mouvements du point et du solide rigide. Bien entendu elles peuvent être revues et complétées soit en considérant un nombre de vecteurs différent de celui des trièdres, soit en considérant des trièdres ayant une métrique et une variable-temps différentes, soit en considérant des dérivées d'un ordre supérieur à un, etc.

La Chaire de Mecanique
Institut Polytechnique de Bucarest

О НЕКОТОРЫХ ВЕКТОРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ ПРИМЕНЯЕМЫХ В КИНЕМАТИКЕ

(Краткое содержание)

Применяя подвижные системы координат в общеи форме, автор пытает доказать что основные соотношения в кинематике относителново движения точки и неподвижново твердово тела (отношение 17) представляют собой частныи случаи правила производных суммы некоторой числа векторов в зависимость от скалярново параметра (отношение 16, 16′).

ON CERTAIN VECTORIAL RELATIONS USED IN KINEMATICS

(Summary)

Using in a general form mobile systems of reference, the author purposes to show that the basic relations in the kinematics of the relative movement of the point and of the rigid solid (relation 17) are a particular case of a rule of derivation of the sum of a number of vectors function of a scalar parameter (relation 16 or 16').

SUR CERTAINES RELATIONS VECTORIELLES UTILISÉES DANS LA CINÉMATIQUE

(Résumé)

En utilisant dans une forme générale des systèmes de référence mobiles, l'auteur se propose de démontrer que les relations de base de la cinématique du mouvement relatif du point et du solide rigide (relations 17) constituent un cas particulier d'une règle de dérivation de la somme d'un nombre de vecteurs fonction d'un paramètre scalaire (relation 16 ou 16').

ÜBER GEWISSEN WEKTORIELLEN BEZIEHUNGEN BENÜTZT IN DER KINEMATIK

(Zusammenfassung)

Benützend in eine allgemeine Form mobilen Systemen von Referenzen, der Verfasser vornehmt sich zu beweisen das die basische Beziehungen der Kinemathik der relatiwe Bewegung des Punktes und des starres Solides (Beziehung 17) bilden einen besonderen Fall einer Regel von Ableitung der Summe einem Zahl von Wektoren Funktion einer skalaren Parameter (Bezichung 16 oder 16').

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

ON A SIMULTANEOUS COLLISION OF A SYSTEM OF BODIES

by PAUL BARANY

The problem of the collision of a system of bodies is as yet an open one, as it can not be solved in all generality on the basis of the simplifying hypotheses that are used in the case of two bodies. In this paper, we shall consider a case in which this problem has a solution, namely the simultaneous collision of an ideally constrained system of bodies.

1. By *simultaneous collision* of a system of bodies, we shall understand an impact in which the compression period ends simultaneously for all the bodies, i.e. the normal velocities in the points of impact are equal at the same moment for all pairs of bodies (condition 6).

We shall assume the validity of the simplifying hypotheses used in dealing with the collision of two bodies, namely:

— the ordinary forces are negligible with respect to the impulsive forces;

— the displacements of the bodies are negligible within the duration of impact;

— Newton's law of motion holds during the impact;

— The principle of action and reaction can be extended to the impulsive forces.

As in the case of the collision of two bodies, let us define similarly a coefficient of restitution k as the ratio of the impulse P'' during the relaxation period to the impulse P' during the compression period:

$$k = \frac{P''}{P'}.$$

2. Let us consider a system of bodies $B_i (i = 1, 2 \ldots, n)$ for which the constraints imply no friction. The bodies B_i and B_j collide in point A_{ij} and let m be the number of such points of impact, with $m \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

We shall consider as given:

— the distribution of velocities at the beginning of the collision, i. e. the velocities $\bar{v}_i$ of the centres of mass C_i and the angular velocities $\bar{\omega}_i$ of the bodies B_i;

— the coefficients of restitution k_{ij} for the pairs of bodies B_i and B_j;

— the masses M_i and the moments of inertia J of the bodies;

— the configuration of the bodies and of the points of impact A_{ij};

The distribution of velocities at the end of the collision is to be determined.

3. If we consider separately the phases of compression and relaxation, the problem presents the following unknowns:

— the velocities $\bar{v}_i', \bar{\omega}_i'$ at the end of the compression ($6n$ scalar unknowns);

— the velocities $\bar{v}_i''$; $\bar{\omega}_i''$; at the end of the collision ($6n$ scalar unknowns);

— the normal impulses $\bar{P}_{ij}'$ with which bodies B_i are acted upon by bodies B_j during the compression phase (m unknowns);

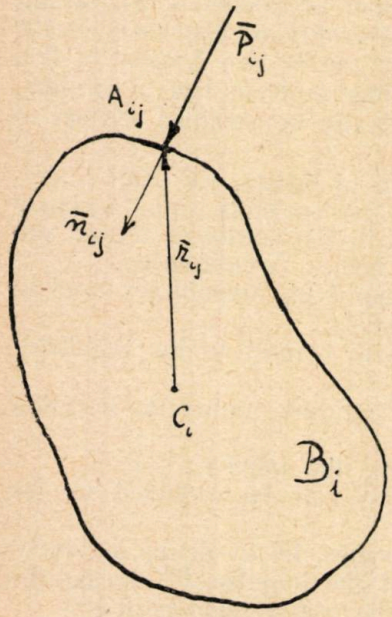


Figure 1.

— the normal impulses $\bar{P}_{ij}''$ during the relaxation phase (m unknowns). This amounts to $12n+2m$ unknowns.

— To solve the problem, we get from the theorem of linear momentum for each one of the bodies:

— during the compression phase ($3n$ scalar equations):

$$\bar{H}_i' - \bar{H}_i = \sum_j \bar{P}_{ij}' \tag{1}$$

— during the relaxation phase ($3n$ equations):

$$\bar{H}_i'' - \bar{H}_i' = \sum_j \bar{P}_{ij}'' \tag{2}$$

and from the theorem of angular momentum ($2 \times 3n$) equations:

$$\bar{K}_i' - \bar{K}_i = \sum_j \bar{r}_{ij} \times \bar{P}_{ij}' \tag{3}$$

$$\bar{K}_i'' - \bar{K}_i' = \sum_j \bar{r}_{ij} \times \bar{P}_{ij}'' \tag{4}$$

where $\bar{r}_{ij} = \overline{C_i A_{ij}}$ (fig. 1)

We get other equations by expressing the definition of the coefficient of restitution (m equations)

$$k_{ij} = \frac{P_{ij}''}{P_{ij}'} \tag{5}$$

and the conditions of simultaneousness of the collission.

Let us denote by

$$v_{ij} = (\bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_{ij})\, \bar{n}_{ij}$$

$$v_{ji} = (\bar{v}_j + \bar{\omega}_j \times \bar{r}_{ji})\, \bar{n}_{ij}$$

the projections of the velocities of points A_{ij} that strike each other, on the common normal *) to the surfaces of B_i and B_j; as these projection are equal at the end of the compression phase (m equations), we get.

$$v'_{ij} = v'_{ji} \tag{6}$$

There are therefore $12n + 2m$ equations; hence the problem of calculating the final velocities $\bar{v}''_i$; $\bar{\omega}''_i$; can generally be solved.

5. We shall now consider the following example, from which it will be seen that a simultaneous collision is not always possible.

Let there be three spheres (fig 2) of masses $m_1 = m_2 = m_3$, having before the collision straight line translations with the velocities v_1, $v_2 = 0$, $v_3 = -v_1$, and let us assume that $k_{12} = 0$, $k_{23} = 1$ are the coefficients of restitution. From equations (1), (2), (5) and (6) we obtain, after some simple calculations, the final velocities:

$$v''_1 = 0 \qquad v''_2 = -v_1 \qquad v''_3 = v_1.$$

This resulte is obviously absurd, as sphere 2 cannot move to the left if sphere 1 is at rest.

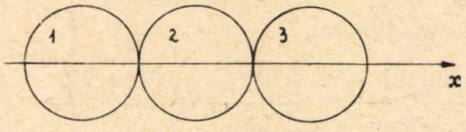


Figure 2.

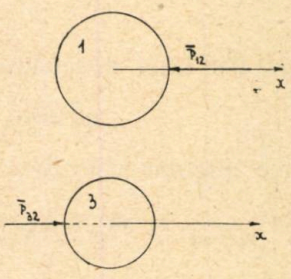


Figure 3.

We shall therefore introduce the following condition of compatibility:

$$(v''_{ij} - v''_{ji})(v_{ij} - v_{ji}) \leqslant 0 \tag{7}$$

i. e. the projections on the normal of the relative velocities of bodies B_i and B_j in the point of impact A_{ij} must change their sense after the collision. Physically, this means that the bodies must separate after the impact, their penetration by one another being impossible.

After determining the final velocities, we can therefore draw the conclusion that a simultaneous collision is possible only if conditions (7) are verified.

5. We shall deal now with the case of the *direct and central collision of three spheres*. Let us assume that the masses m_1, m_2, m_3, the velocities v_1, v_2, v_3, (where $v_1 > v_2 > v_3$) as well as the coefficients of restitution k_{12}, k_{23} are given (fig 2).

*) The unit vector $\bar{n}_{ij}$ ist directed towards the interior of body B_i.

From the projection of the theorem of linear momentum (1), (2), on the Ox — axis for spheres 1, 3 and for the whole system, we obtain:

$$m_1(v_1' - v_1) = -P_{12}' \qquad m_1(v_1'' - v_1') = -P_{12}''$$

$$m_3(v_3' - v_3) = P_{32}' \qquad m_3(v_3'' - v_3') = P_{32}''$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = m_1 v_1' + m_2 v_2' + m_3 v_3' = m_1 v_1'' + m_2 v_2'' + m_3 v_3''$$

(from the projection of the same theorem on the Oy, Oz axes, we know that $\overline{v_i'}$, $\overline{v_i''}$ $(i = 1, 2, 3)$ are parallel to Ox).

Expressing the theorem of angular momentum

$$J_1(\omega_1'' - \omega_1) = 0 \qquad J_2(\omega_2'' - \omega_2) = 0 \qquad J_3(\omega_3'' - \omega_3) = 0$$

and conditions (5) and (6)

$$k_{12} = \frac{P_{12}''}{P_{12}'} \qquad k_{23} = \frac{P_{32}''}{P_{32}'}$$

$$v_1' = v_2' = v_3'$$

we get the final distribution of velocities

$$\omega_1'' = \omega_1 \qquad \omega_2'' = \omega_2 \qquad \omega_3'' = \omega_3$$

i. e. the angular velocities remain unchanged

$$v_1'' = \frac{v_1(m_1 - k_{12} m_2 - k_{12} m_3) + (1 + k_{12})(m_2 v_2 + m_3 v_3)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$v_2'' = \frac{m_1 v_1 [m_2(1 + k_{12}) + m_3(k_{12} - k_{23})] + m_2 v_2 (m_2 - k_{12} m_1 - k_{23} m_3)}{m_2(m_1 + m_2 + m_3)} +$$

$$+ \frac{m_3 v_3 [m_1(k_{23} - k_{12}) + m_2(1 + k_{23})]}{m_2(m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$v_3'' = \frac{(1 + k_{23})(m_1 v_1 + m_2 v_2) + v_3(m_3 - k_{23} m_1 - k_{23} m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

The conditions of compatibility (7) assume now the form

$$v_3'' > v_2'' > v_1''.$$

By substituting the values obtained before and making some elementary calculations, we get the condition

$$\alpha \leqslant \frac{k_{23}}{k_{12}} \leqslant \beta \tag{8}$$

with

$$\alpha = \frac{m_1}{m_2+m_3} \cdot \frac{m_2+(1+\lambda)\,m_3}{(1+\lambda)\,m_1+\lambda m_2} \leqslant 1$$
$$\beta = \frac{m_1+m_2}{m_3} \cdot \frac{m_2+(1+\lambda)\,m_3}{(1+\lambda)\,m_1+\lambda m_2} \geqslant 1 \qquad (9)$$

and

$$\lambda = \frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3}$$

is the ration of the relative velocities before the impact.

Fig 4 shows the curves $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ with the shaded portion representing the domain for which the values of $\frac{k_{23}}{k_{12}}$ correspond to the possibility of a simultaneous collision.

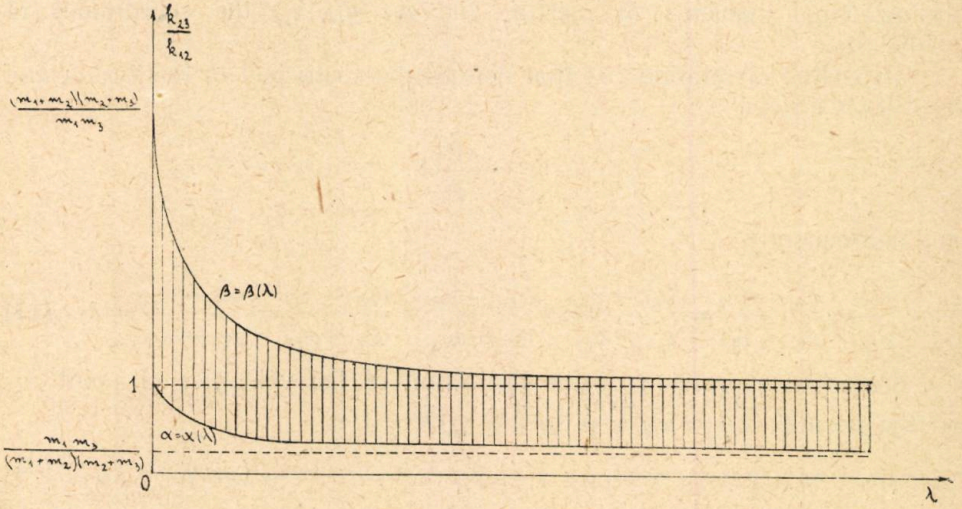


Figure 4.

Remarks. From relation (8) it can be seen easily that a simultaneous collision is possible for any distribution of initial velocities (for any values of λ) only if $k_{12} = k_{23}$.

A simultaneous collision is not possible if one of the coefficients of restitution is equal to zero (completely inelastic impact) and the other differs from zero, since $\frac{k_{23}}{k_{12}} \neq 0$ and $\frac{k_{12}}{k_{23}} \neq 0$ for any λ.

6. Let us prove the following theorem:

A simultaneous collision is possible for any distribution of initial velocities if the coefficients of restitution are all equal to each other.

$$k_{ij} = k. \qquad (10)$$

If we separate body B_i (fig 1) and express the theorems of linear and angular momentum for both the compression and the relaxation phase, we get :

$$M_i\,(v'_{ix} - v_{ix}) = \sum_j P'_{ij,\,x}$$

$$M_i\,(v''_{ix} - v'_{ix}) = \sum_j P''_{ij,\,x}$$

. . . .

$$J_{ix}\,(\omega'_{ix} - \omega_{ix}) = \sum_j (y_{ij}\,P'_{ij,\,z} - z_{ij}\,P'_{ij,\,y})$$

$$J_{ix}\,(\omega''_{ix} - \omega'_{ix}) = \sum_j (y_{ij}\,P''_{ij,\,z} - z_{ij}\,P''_{ij,\,y})$$

. . . .

As axes of the coordinate system $C_i xyz$ we have chosen the principal axes of inertia whith respect to the center of mass C_i ; J_{ix}, J_{iy}, J_{iz} are the principal moments of inertia, and x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} the coordinates of points A_{ij}.

In virtute of relation (5) that defines the coefficient of restitution and by (10), we get :

$$k = \frac{P''_{ij}}{P'_{ij}}$$

and consequently :

$$\frac{v''_{ix} - v'_{ix}}{v'_{ix} - v_{ix}} = \frac{v''_{iy} - v'_{iy}}{v'_{iy} - v_{iy}} = \frac{v''_{iz} - v'_{iz}}{v'_{iz} - v_{iz}} = \frac{\omega''_{ix} - \omega'_{ix}}{\omega'_{ix} - \omega_{ix}} = \frac{\omega''_{iy} - \omega'_{iy}}{\omega'_{iy} - \omega_{iy}} = \frac{\omega''_{iz} - \omega'_{iz}}{\omega'_{iz} - \omega_{iz}} = k \qquad (11)$$

Since the expression of the projection of the velocities of point A_{ij} on the normal $\bar{n}_{ij} = \alpha_{ij}\,\bar{i} + \beta_{ij}\,\bar{j} + \gamma_{ij}\,\bar{k}$:

$$v_{ij} = (\bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_{ij})\,\bar{n}_{ij} = v_{ix}\,\alpha_{ij} + v_{iy}\,\beta_{ij} + v_{iz}\,\gamma_{ij} + \omega_{ix}\,(y_{ij}\,\gamma_{ij} - z_{ij}\,\beta_{ij}) +$$
$$+ \omega_{iy}\,(z_{ij}\,\alpha_{ij} - x_{ij}\,\gamma_{ij}) + \omega_{iz}\,(x_{ij}\,\beta_{ij} - y_{ij}\,\alpha_{ij})$$

is linear and homogeneous in $v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}, \omega_{ix}, \omega_{iy}, \omega_{iz}$, from (11) we obtain

$$\frac{v''_{ij} - v'_{ij}}{v'_{ij} - v_{ij}} = k. \qquad (12)$$

In the same way, expressing similar equations for body B_j we get

$$\frac{v''_{ji} - v'_{ji}}{v'_{ji} - v_{ji}} = k. \qquad (13)$$

From (12), (13), and in virtue of the condition of simultaneousness of the impact,

$$v'_{ij} = v'_{ji} \qquad (6)$$

we get

$$\frac{v''_{ji} - v''_{ij}}{v_{ij} - v_{ji}} = k. \tag{14}$$

Since $k \geqslant 0$, the condition of compatibility

$$(v''_{ij} - v''_{ji})(v_{ij} - v_{ji}) \leqslant 0 \tag{7}$$

holds, and therefore in this case a simultaneous collision is possible for any distribution of initial velocities.

Remark: From relation (14) it follows that *if all the coefficients of restitution are equal to each other $k_{ij} = k$ they have the value of the ratio of relative normal velocities of the points of impact, after and before the impact.*

Department of Electronics
Polytechnical Institute of Bucharest

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ УДАРЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

(Краткое содержание)

Автор определяет одновременный удар, как удар в котором фаза сжатия кончается одновременно для всех тел системы (6).

После указания метода решения этой задачи, доказывается необходимость выполнения условий совместимости (7). Доказывается, что одновременный удар всегда возможен, если коэффициенты восстановлен я равны между собою, причем их общее значение равно отношению нормальных относительных скоростей после и до удара (14).

ON A SIMULTANEOUS COLLISION OF A SYSTEM OF BODIES

(Summary)

After a simultaneous collision has been defined as one in which the compression period ends simultaneously for all bodies (6), the method of solving this problem is indicated and the need for the conditions of compatibility (7) underlined.

Finally, it is demonstrated that a simultaneous collision is always possible if the coefficients of restitution are all equal to each other (10), their common value being the ratio of the normal relative velocities before and after the impact (14).

SUR LE CHOC SIMULTANÉ D'UN SYSTÈME DE CORPS

(Résumé)

L'auteur définit le choc simultané, comme un choc pour lequel la phase de compression finit à un même instant pour touts les corps du système (6). Après avoir indiqué la solution de ce problème, on démontre la nécessité de satisfaire aux conditions de compatibilité (7). On prouve enfin qu'un choc simultané est toujours possible, si tous les coefficients de restitution ont la même valeur (10), égale au rapport des vitesses relatives normales à la fin et au début du choc (14).

UBER DEN SIMULTANEN STOSS EINES KÖRPERSYSTEMS

(Zusammenfassung)

Der simultane Stoss wird als ein Stoss bestimmt, bei welchem die erste Stossperiode für alle Körper des Systems gleichzeitig endet (6).

Es wird die Methode zur Lösung dieses Problems angegeben und auf die Notwendigkeit der Einführung von Verträglichkeitsbedingungen (7) darangewiesen.

Der Autor beweist, dass der simmultane Stoss nur dann möglich ist, wenn die Stosszahlen zwischeneinander gleich sind (10), wobei ihr Wert vom Verhältnis zwischen den relativen normalen Geschwindigkeiten nach und vor dem Stoss gegeben wird (14).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

CHIMIE-FIZICĂ

541.138

COMPLEXUL ACTIVAT ÎN CINETICA CHIMICĂ

de VICTOR PARAUȘEANU

Teoria vitezelor absolute de reacție a apărut în cinetica chimică ca o consecință a insuficiențelor teoriei cinetice clasice care nu putea determina natura energiei de activare și nici semnificația fizică a coeficientului preexponențial din teoria lui Arrhenius.

O serie de cercetători ca Trautz [1], Hinshelwood [2], Kassel [3] și alții au încercat să desvolte teoria clasică a activării prin ciocnire, admițînd că în desfășurarea procesului chimic apar unele molecule complexe care descompunîndu-se după mai multe grade de libertate duc la produșii finali de reacție. În același timp Steiner [4] încearcă să consolideze teoria complexului activat elaborată anterior de Marcelin [5] introducînd în cinetica chimică primele noțiuni de mecanică ondulatorie, dar fără a obține rezultate remarcabile. O teorie mai completă a vitezelor de reacție prin care se elimină în bună măsură insuficiențele arătate mai sus a fost elaborată la începutul celui de al patrulea deceniu al secolului nostru de Eyring [6] și Polanyi [7]. La baza acestei teorii, cunoscută sub numele de teoria vitezelor absolute de reacție sau teoria stării intermediare, autorii au pus aceleași premize cunoscute din cinetica clasică și noțiunea de complex activat introdusă anterior de Marcelin. Pentru interpretarea rezultatelor a fost însă necesar să se apeleze la mecanica cuantică și la termodinamica statistică. Autorii au stabilit și o relație matematică între diferitele elemente care determină viteza de reacție în care atît energia de activare cît și coeficientul preexponențial sînt prezentate ca mărimi bine definite și ușor de evaluat prin calcul.

După Eyring cît și după Polanyi, starea activă reprezintă un complex al tuturor particulelor care iau parte la actul elementar al unei reacții chimice. Toate procesele chimice pentru a căror desfășurare este necesară o energie de activare decurg printr-o astfel de stare intermediară, determinată de „complexul activ". Din punct de vedere energetic această stare coincide cu înălțimea barierei energetice ce separă starea inițială de starea finală a unei reacții. Particularitatea complexului activ constă în înlocuirea unui grad de libertate de vibrație cu un grad de translație orientat după coordonata de reacție după care se mișcă acest complex activ în regiunea barierei energetice în direcția produșilor finali. Viteza de mișcare a complexului se supune legii de repartiție a vitezelor după Maxwell iar din punctul de vedere al concentrației complexului activ se află în echilibru termodinamic cu reactanții.

Deci viteza de reacție, va fi proporțională cu viteza de mișcare a complexului activ prin bariera energetică, va depinde de concentrația de

echilibru termodinamic a complexului activ, de înălțimea barierei energetice (egală cu energia de activare a reacției E_a) și de coeficientul de transmisie, care exprimă probabilitatea trecerii particolelor prin bariera energetică.

În aceste condiții Eyring obține pentru constanta de viteză absolută expresia următoare:

$$k' = \varkappa \frac{h}{kT} \frac{F^{\neq}}{F_1 \cdot F_2 \ldots} e^{-E_a/kT} \qquad (1)$$

în care $F^{\neq}$ reprezintă funcția de partiție (ecuația de stare) a complexului activ, F_1, $F_2 \ldots$ funcțiile de partiție ale reactanților, $\varkappa$ coeficientul de transmisie, iar celorlalte notații revenindu-le semnificațiile obișnuite.

În funcția de partiție a complexului activ $F^{\neq}$ sînt cuprinse toate coordonatele în afară de coordonata de reacție după care are loc descompunerea complexului. Această coordonată este însă inclusă împreună cu viteza de trecere a complexului prin bariera energetică în factorul:

$$\frac{h}{kT} e^{-E_a/kT} \qquad (2)$$

E_a reprezintă energia barierei de potențial și este dată de diferența dintre energia moleculelor activate din complex și a celor neactivate la 0^0K. Această energie de activare este o constantă și spre deosebire de energia de activare din teoria cinetică clasică nu depinde de temperatură.

Dar determinarea energiei de activare implică cunoașterea datelor structurale ale atomilor și moleculelor ce participă la reacție și pentru moleculele complexe această problemă este destul de greu de realizat. Faptul acesta constituia insuficiența acestei teorii în prima sa formă de expunere, dar mai tîrziu savanții sovietici N. J. Kobozev [8] și V. A. Palm [9] au scos în evidență și alte lacune ale acestei teorii. Ei au adus unele completări teoriei lui Eyring dar pentru a putea urmări îndeaproape obiecțiile și completările aduse de către Palm și Kobozev teoriei lui Eyring și Polanyi este necesar să prezentăm mai amănunțit modul în care a fost dedusă relația finală (1).

Se știe că starea unui sistem este determinată în mecanica cuantică de funcția proprie $\psi(q, t)$, în care t reprezintă timpul, iar q coordonatele necesare pentru a determina poziția particulelor din sistem care, cu o oarecare rezervă, pot fi identificate cu „gradele de libertate".

În cazul unei reacții chimice, avem de a face cu o tranziție a unui sistem de la o stare inițială la o stare finală și proprietățile acestui sistem sînt complet determinate de funcția lui proprie. El poate fi reprezentat printr-un punct într-un spațiu tetradimensional, în care trei dimensiuni sînt necesare pentru a preciza pozițiile relative ale nucleelor atomilor, iar a patra pentru a determina energia sistemului respectiv.

Dacă în acest sistem se produce o reacție simplă de tipul:

$$AB + C \longrightarrow AC + B$$

configurația sistemului este complet determinată de distanțele internucleare r_{ab}, r_{ac} și r_{bc}. La timpul t_0, r_{ab} va fi mult mai mic decît r_{ac} și reacția va fi dată de tranziția de la această configurație, la aceea la care r_{ac} este mult mai mic decît r_{ab} sau r_{bc}.

Energia globală de legătură a sistemului variază în timpul unei tranziții și pentru calcularea ei se folosește relația lui London după care :

$$E = Q(r_{ab}, r_{ac}, r_{bc}) - \left\{ \frac{1}{2} [\alpha(r_{bc}) - \beta(r_{ac})]^2 + [\beta(r_{ac}) - \gamma(r_{ab})]^2 + [\gamma(r_{ab}) - \alpha(r_{bc})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

unde α, β și γ reprezintă integralele de schimb ale electronilor iar Q reprezintă energia coulombiană, adică-14% din energia totală a sistemului. Reprezentînd grafic energia globală a sistemului în funcție de distanțele internucleare se obține „suprafața de energie potențială" (fig. 1). Din

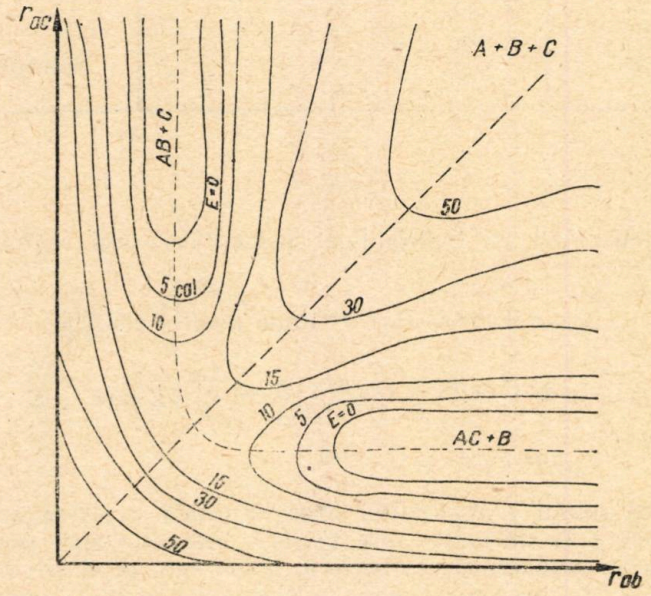


Fig. 1

această reprezentare se vede că între regiunile corespunzătoare reactanților există o regiune de energie mai mare, bariera energetică, a cărei înălțime reprezintă chiar energia de activare a reacției.

Dacă considerăm mișcarea unidimensionabilă în regiunea barierei, adică de-a lungul „coordonatei de reacție" (fig. 2), trecerea sistemului prin această regiune se poate determina cu ajutorul ecuației lui Schrödinger :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h}[E - V(x)]\psi = 0 \quad (4)$$

Asimilînd suprafața barierei energetice cu un dreptunghiu de lungime $2l$ și de înălțime E_a, energia potențială a sistemului va lua următoarele valori :

$$\begin{aligned} &\text{pentru } -\infty < x < -l, && E_p(x) = 0 \\ &\text{pentru } -l \leqq x \leqq +l, && E_p(x) = E_a \\ &\text{pentru } +l < x < +\infty, && E_p(x) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

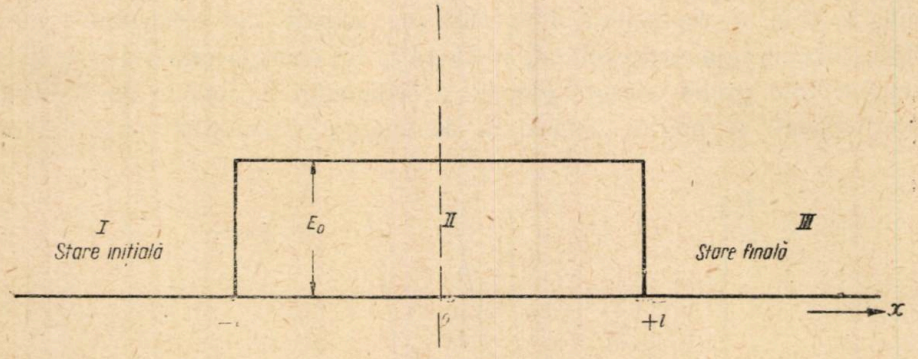


Fig. 2

Soluțiile ecuației lui Schrödinger pentru cele trei regiuni ale sistemului vor fi :

$$\begin{aligned} &\psi_I = A\,e^{i\alpha x} + B\,e^{-i\alpha x} \text{ unde } \alpha = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} \\ &\psi_{II} = C\,e^{+i\beta x} + D\,e^{i\beta x}; \quad \beta = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(E-E_a)} \\ &\psi_{III} = F\,e^{i\alpha x} + G\,e^{-i\alpha x} \end{aligned} \tag{6}$$

In aceste relații E reprezintă energia totală a sistemului și primul termen se referă la mișcarea spre barieră, respectiv spre produșii finali, iar al doilea la mișcarea de la barieră, adică spre produșii inițiali.

Condiția unei mișcări continue a sistemului implică existența următoarelor dependențe între cele trei soluții ale ecuației lui Schrödinger :

$$\psi_I = \psi_{II}\ ; \quad \frac{\partial \psi_I}{\partial x} = \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x} \qquad \text{dacă } x = -l$$

și

$$\psi_{II} = \psi_{III}\ ; \quad \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x} = \frac{\partial \psi_{III}}{\partial x} \qquad \text{dacă } x = +l$$

Dacă se admite că în regiunea I probabilitatea mișcării spre barieră este egală cu 1, adică $A = 1$ și că sistemul ajuns în stare finală nu se reîntoarce în starea inițială, adică $G = 0$, constantele B, C, D și E pot fi determinate în funcție de A și G. In acest caz $|F|^2$ reprezintă probabilitatea ca sistemul să fie trecut în regiunea III, și se mai numește și coeficientul de transmisie, iar $|B|^2$ probabilitatea reflectării din regiunea barierei energetice înapoi spre regiunea I.

Această mișcare monodimensională prin bariera energetică este cuantificată, iar transmisia sau reflecția în barieră este legată de un transfer de energie între diferitele grade de libertate ale sistemului. Unda reflectată și unda transmisă a unei unde incidente a cărei funcție proprie este ψ_n poate să apară în orice stare de vibrație și dacă legea conservării impulsului este valabilă în domeniul barierii de potențial, avem relația:

$$\left|\psi_n\right|^2 \frac{p_n}{M} = \sum \left| R_{nm} \right|^2 \left|\psi_m\right|^2 \frac{p_m}{M} + \sum_k \left| T_{nk} \right|^2 \left| \psi \right|^2 \frac{p_k}{M} \qquad (8)$$

unde M este masa sistemului, $\frac{p_i}{M}$ viteza de deplasare a undelor, R_{nm}, fracțiunea din sistemul incident care este reflectată în starea de vibrație m, iar T_{nk} fracțiunea sistemului incident transmisă în starea de vibrație k. In condiții de normare, adică $\psi = 1$; raportul $\left| R_{nm} \right|^2 \frac{p_m}{p_n} = \varrho_{nm}$ este definit ca coeficient de reflecție, iar $\left|T_{nk}\right|^2 \frac{p_k}{p_n} = \varkappa_{nk}$ coficientul de transmisie, pentru tranziția de la nivelul de energie n la nivelul k.

Formularea vitezei de reacție. Să admitem că $C_{n(p)}$ este numărul sistemelor pe distanța dx în regiunea I, care posedă impulsul cuprins între p și $(p + dp)$ de-a lungul coordonatei de reacție și energia E_n pentru celelalte grade de libertate. Numărul sistemelor care se mișcă pe secundă spre barieră va fi $\frac{C_{n(p)}}{dx} \frac{p}{m}$, deoarece $\frac{p}{m}$ este viteza de deplasare a sistemelor iar fracțiunea sistemelor ce vor reacționa va fi dată de relația:

$$\sum_k \varkappa_{nk(p)} \frac{Cx_{(p)}}{dx} \cdot \frac{p}{m} \qquad (9)$$

Admițînd o distribuție de echilibru în această regiune, concentrația $C_{n(p)}$ poate fi exprimată printr-o relație de forma:

$$C_{n(p)} = \frac{[A_1] \cdot [A_2] \cdot [A_3] \cdot \ldots}{F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \ldots} \qquad (10)$$

unde $[A_1].[A_2].[A_3]\ldots$ reprezintă concentrațiile reactanților, iar $F_1, F_2, F_3\ldots$ funcțiile lor de partiție ce corespund unui nivel de energie E_n și pondere statistică ω_n.

Viteza de reacție se obține însumînd relația (10) de la 0 la n și întregind pentru impulsul p, de la 0 la ∞ adică:

$$k' = \frac{[A_1].[A_2]\ldots}{F_1 \cdot F_2 \ldots} \int_0^\infty \sum_k \sum_n \varkappa_{nk(p)}\, \omega_n\, e^{-\frac{En}{kT}}\, e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \frac{pdp}{mh} \qquad (12)$$

Dar pentru a putea obține rezolvarea acestei ecuații trebuie emise din nou unele premize simplificatoare.

În concordanță cu teoria clasică se admite că $\varkappa_{nk(p)} = 0$ dacă $\frac{p^2}{2m} \leqq E_a$ și în acest caz avem:

$$k' = \frac{[A_1] \cdot [A_2] \ldots}{F_1 \cdot F_2 \ldots} \varkappa \sum \omega_n e^{-\frac{E_n}{kT}} \int_{\sqrt{2m\,E\alpha}}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2m\,kT}} \frac{pdp}{mh}$$

$$k' = \frac{[A_1] \cdot [A] \ldots}{F_1 \cdot F_2 \ldots} \varkappa \sum \omega_n e^{-\frac{E_n}{kT}} \frac{k\,T}{h} e^{-\frac{E_a}{kT}} \tag{13}$$

Termenul $\sum \omega_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$ are forma generală a unei funcții de partiție și referindu-ne la sistemul în mișcare prin bariera energetică (complexul activat), el poate fi considerat chiar funcția de partiție a complexului activ, $F^{\neq}$.

Constanta de viteză specifică, ce corespunde unei concentrații a reactanților egală cu unitatea va fi prin urmare:

$$k' = \varkappa \frac{F^{\neq}}{F_1 \cdot F_2 \ldots} \frac{kT}{h} e^{-\frac{E_a}{kT}} \tag{14}$$

ceea ce se mai poate scrie și astfel:

$$k' = \varkappa \frac{kT}{h} K^{\neq} \tag{15}$$

unde $K^{\neq}$ este constanta de echilibru între complexul activat și moleculele reactante.

Ținînd seama de faptul că $-\Delta F = RT \log K$ relația (15) devine:

$$k' = \varkappa \frac{kT}{h} e^{-\frac{\Delta F^{\neq}}{RT}} \tag{16}$$

unde $\Delta F^{\neq}$ reprezintă diferența între energia liberă a stării activate și cea normală și se numește „energia liberă de activare". Dar deoarece $\Delta F = \Delta H - T\Delta S$, relația (16) se mai poate scrie:

$$k' = \varkappa \frac{kT}{h} e^{-\frac{\Delta H^{\neq}}{RT}} e^{-\frac{\Delta S^{\neq}}{R}} \tag{17}$$

Ecuațiile (16) și (17) au fost și sînt încă folosite pentru interpretarea și verificarea datelor experimentale în cinetica chimică.

În 1955 Palm, Kobozev și Wolkenstein reiau teoria vitezelor absolute de reacție elaborată de Eyring și arată că premizele de la care s-a plecat pentru deducerea expresiei constantei de viteză prezintă unele elemente contradictorii. După Eyring în regiunea I-a a barierei de potențial toate particulele posedă un impuls pozitiv, adică se mișcă spre bariera de potențial dar mai tîrziu se admite și fenomenul de „reflecție" în regiunea barierei energetice, deci reîntoarcerea la starea inițială a particulelor, ceea ce implică și existența impulsurilor negative ale particulelor în această regiune.

O altă obiecție adusă de Palm se referă la semnificația dată de Eyring termenului

$$\sum \omega_n e^{-\frac{E_n}{kT}} \tag{17}$$

care la începutul calculelor prezintă funcția de partiție pentru starea inițială a sistemului, exceptînd gradul de libertate al mișcării dealungul coordonatei de reacție, iar în relația finală aceeaș funcție de partiție se referă la starea complexului activ.

Dar deși aceste contradicții micșorează valabilitatea relației lui Eyring, nici Palm și nici Kobozev nu propun renunțarea la această teorie ci numai ameliorarea ei. Ei deduc relația constantei de viteză pe altă cale, reconsiderînd premizele lui Eyring astfel încît neconcordanțele arătate mai sus și altele ce vor fi expuse ulterior să fie înlăturate. Palm arată că teoria vitezelor absolute elaborată de Eyring cuprinde elemente de valoare și el reține în teoria pe care o elaborează conceptul despre starea activă sau complexul activat, metoda suprafeței energiei potențiale pentru calculul energiei de activare, noțiunea de coordonată de reacție precum și folosirea funcțiilor de partiție pentru calculul concentrației complexului activ.

După Palm constanta de viteză absolută poate fi dedusă numai din constanta de echilibru a complexului activ, (privit ca o moleculă „termală" formată din reactanții, în care surplusul de energie este repartizat dealungul legăturilor care se transformă) fără a face apel la o altă ipoteză suplimentară.

Reacția de transformare poate fi reprezentată prin următoarea schemă :

$$A_1 + A_2 + \cdots\cdots \rightleftharpoons C^{\neq\prime} \overset{v_1}{\rightarrow} M_1 + M_2 + \cdots\cdot$$
$$\overset{v_2}{\leftarrow} C^{\neq\prime\prime} \rightleftharpoons$$

unde $C^{\neq\prime}$ și $C^{\neq\prime\prime}$ reprezintă concentrația complecșilor activi.

Dacă notăm cu τ_1 și τ_2 viața mijlocie a complexului $C^{\neq\prime}$ care trece în $M_1, M_2 \ldots$ și respectiv pentru $C^{\neq\prime\prime}$ care trece în $A_1, A_2 \ldots$, cu $\varkappa_1$ și $\varkappa_2$ coeficienții de transmisie pentru reacția directă și inversă și dacă admitem că în condiții de echilibru staționar $v_1 = v_2$ putem trece la formularea următoarelor relații :

$$v_1 = \frac{\varkappa_1}{\tau_1}[C^{\neq\prime}] \text{ și } v_2 = \frac{\varkappa_2}{\tau_2}[C^{\neq\prime\prime}] \tag{19}$$

și deci

$$[C^{\neq\prime}] = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \cdot \frac{\tau_1}{\tau_2}[C^{\neq\prime\prime}] \tag{20}$$

respectiv

$$[C^{\neq\prime}] = \frac{\varkappa_2 \tau_1}{\varkappa_1 \tau_2 + \varkappa_2 \tau_1}[C^{\neq}] \tag{21 a}$$

și

$$[C^{\neq\prime}] = \frac{\varkappa_1 \tau_2}{\varkappa_1 \tau_2 + \varkappa_2 \tau_1}[C^{\neq}] \tag{21 b}$$

unde $[C^{\neq}] = [C^{\neq\prime}] + [C^{\neq\prime\prime}]$ și reprezintă concentrația complecșilor activi.

Atunci viteza de reacție pentru reacția directă va fi:

$$v_1 = \frac{\varkappa_1 \varkappa_2}{\varkappa_1 \tau_2 + \varkappa_2 \tau_1} [C^{\neq}] \tag{22}$$

și ținînd seamă de faptul că

$$K^{\neq} = \frac{[C^{\neq}]}{[A_1][A_2]\cdots} \tag{23}$$

obținem constanta de viteză absolută specifică, ($[A_1]$, $[A_2]$... egali cu unitatea):

$$k' = \frac{\varkappa_1 \varkappa_2}{\varkappa_1 \tau_2 + \varkappa_2 \tau_1} K^{\neq} \tag{24}$$

Dar în general $C^{\neq'}$ și $C^{\neq''}$ au vîrfuri identice pe suprafața energiei potențiale și aceeași viață medie și deci prezintă aceeași posibilitate de transformare în cele două direcții ale coordonatei de reacție. Dacă admitem că $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, ceea ce exclude posibilitatea reîntoarcerii la starea inițială și $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, avem în consecință:

$$k' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot K^{\neq} \tag{25}$$

Considerînd valabile condițiile de normare și distribuție maxwelliană în regiunea barierei energetice, constanta de echilibru $K^{\neq}$ din relația (25) se poate exprima prin intermediul funcțiilor de partiție, adică:

$$K^{\neq} = \frac{F''}{F_1 \cdot F_2 \cdots} \tag{26}$$

unde F'' reprezintă funcția de partiție a complexului activ, incluzînd gradul de libertate pentru mișcarea complecșilor de-a lungul coordonatei de reacție, iar F_1, F_2... funcțiile de partiție ale reactanților.

Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem să intre în reacție este ca energia lui globală ε să fie mai mare sau cel mult egală cu E_a. Admițînd că oscilațiile sînt armonice, valoarea energiei de-a lungul coordonatei de reacție este dată de relația:

$$H(x, p) = \varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \geqq E_a \tag{27}$$

Impulsul complexului de schimb se încadrează între următoarele limite:

$$p \geqq \sqrt{2m E_a - k m x^2} \qquad \text{pentru } -l \leqq x \leqq l$$

și

$$-\infty < p < +\infty \qquad \text{pentru } x < -l$$

Dar deoarece ne interesează numai acea porțiune a coordonatei de reacție care corespunde stării activate, domeniul de variație pentru x va fi :

$$-\infty < x \leqslant +l$$

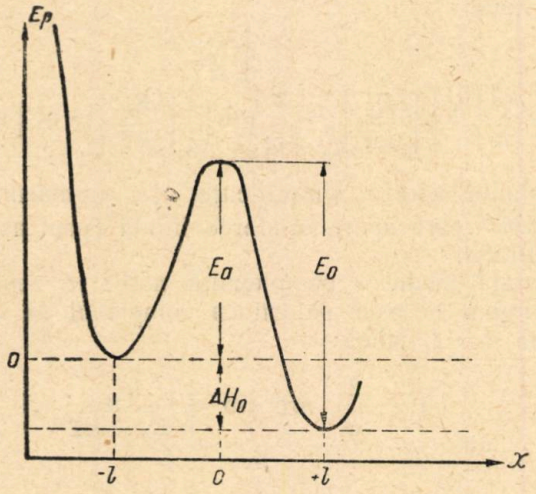


Fig. 3. Schema barierei de potențial într-o reacție exotermă de dublu schimb

Funcția de partiție a complexului activ este dată de relația :

$$F = \frac{1}{2} \iint e^{-H(x,\,p)/kT}\, dx\, dp$$

Ceea ce este echivalent cu :

$$F^* = F^{\neq} \cdot f^{\neq}$$

unde $f^{\neq}$ reprezintă funcția de partiție a complexului după coordonata de reacție iar $F^{\neq}$ funcția de partiție după celelalte coordonate.

Dacă se fac înlocuirile în (29), ținînd seama de (27) și (28) integrînd se obține :

$$f^{\neq} = \frac{1}{2}\frac{kT}{h\nu}\left\{1 + \Phi\left[\sqrt{\frac{E_a}{kT}}\right]\right\} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{E_a}{kT}}} \Phi\left(\left[\sqrt{\frac{E_a}{kT}}\right] - z^2\right) e^{-z^2}\, dz \qquad (30)$$

în care

$$\Phi\left[\sqrt{\frac{E_a}{kT}}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{E_a}{kT}}} e^{-x^2}\, dx$$

iar ν — frecvența oscilației dealungul legăturii ce se transformă și este dată de relația :

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (31)$$

În cazul reacției în ambele sensuri existența complexului activat corespunde domeniului pentru care x ia valorile :

$$-l \leq x \leq +l$$

și în consecință avem :

$$f^{\neq} = \frac{kT}{h}\left\{\Phi\left[\sqrt{\frac{E_a}{kT}}\right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{E_a}{kT}}} \Phi\left(\left[\sqrt{\frac{E_a}{kT}}\right] - z^2\right) e^{-z^2} dz \right. \tag{32 a}$$

Se poate admite pentru simplificare, că numărul sistemelor cu $|p| < \sqrt{2mE_a - kmx^2}$ care apare în starea finală (prin așa numitul „efect tunel") este neglijabil.

Durata de viață medie a complexului activ, τ reprezintă în cazul reacției directe timpul necesar pentru ca complexul să străbată distanța de la $x = -\infty$ la $x = l$, adică :

$$\tau = \frac{1 + \frac{2}{\pi} \text{ arc sin } \sqrt{\frac{E_a}{E_a + kT}}}{2\nu} \tag{32}$$

și respectiv distanța de la $x = -l$ la $x = +l$, în cazul reacției în ambele sensuri adică :

$$\tau = \frac{1}{\pi\nu} \text{ arc sin } \sqrt{\frac{E_a}{E_a + kT}} \tag{33 a}$$

Referitor la coeficienții de transmisie putem admite în prima aproximare că $\varkappa_2 = (1 - \varkappa_1)$, iar durata de viață medie $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.

Făcînd aceste înlocuiri în (24), obținem :

$$k' = \varkappa_1(1 - \varkappa_1)\frac{f^{\neq}}{\tau}\frac{F^{\neq}}{F_1 \cdot F_2 \ldots} e^{-\Delta H_0/RT} \tag{33}$$

unde ΔH_0 reprezintă căldura de reacție la zero absolut.

Dar se poate arăta ușor că :

$$\lim_{E_a \to 0} \frac{f^{\neq}}{\tau} = \frac{kT}{h} \tag{34}$$

(de fapt prin aceasta se neglijează tocmai așa numitul „efect tunel") și final obținem :

$$k' = \varkappa_1(1 - \varkappa_1)\frac{kT}{h}\frac{F^{\neq}}{F_1 \cdot F_2 \ldots} e^{-\Delta H_0/RT} \tag{35}$$

După cum se știe energia liberă este legată de funcția de partiție prin relația :

$$\Delta F = -RT \ln f$$

și respectiv :

$$f = e^{-\Delta F/RT} \tag{36}$$

de unde rezultă că:

$$\frac{F^{\neq}}{F_1 \cdot F_2 \ldots .} = e^{-\frac{\Delta F^{\neq} - \Delta F_1 - \Delta F_2}{RT}} = e^{-Ea/RT} \tag{37}$$

în care E_a este energia de activare la zero absolut.

Făcînd înlocuirea în (35) obținem:

$$k' = \varkappa_1 (1 - \varkappa_1) \frac{kT}{h} e^{-Ea/RT} \tag{38}$$

Atît relația lui Palm (35) cît și relația (38) dedusă de Wolkenstein [10] se aseamănă cu formula dedusă de Eyring pentru constanta de viteză absolută (1). Palm încearcă mai departe să facă o legătură între ΔH_0 și energia de activare la zero absolut E_a dar încercarea pare oarecum forțată și renunțăm la prezentarea ei în această lucrare. Meritul lui Palm constă în faptul că într-adevăr el a reușit să elimine contradicțiile semnalate anterior în teoria vitezelor absolute de reacție a lui Eyring.

Kobozev scoate în evidență un alt neajuns al teoriei vitezelor absolute de reacție și anume că, introducînd un al patrulea grad de libertate pentru complexul activ, „coordonata de reacție", Eyring trece de fapt la un nou tip de spațiu al fazelor, deci și la o nouă statistică. Din suma de stare a complexului activ, Eyring separă funcția de partiție corespunzătoare mișcării de translație prin bariera de lungime $2l$, pe care o consideră egală cu:

$$f^{\neq} = \frac{\sqrt{2\pi m k T}}{h} 2l \tag{39}$$

Viața mijlocie a complexului care se descompune monomolecular este dedusă prin asimilarea trecerii complexului prin bariera energetică ($2l$) cu mișcarea particulelor dintr-o masă gazoasă după care

$$\tau = 2l \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}} \text{ s} \tag{40}$$

și deci factorul preexponențial va avea ordinul de mărime

$$\frac{1}{\tau} f^{\neq} = \frac{kT}{h} \approx 10^{13} \text{ s}^{-1} \tag{41}$$

La același rezultat se ajunge și plecînd direct de la relația finală (1) a teoriei vitezelor absolute, dacă admitem că „coeficientul de transmisie" este apropiat de unitate:

$$k' = 10^{13} \frac{F^{\neq}}{F_1 F_2 \ldots .} e^{-E_a/kT} \tag{42}$$

Pe de altă parte s-a arătat că:

$$k' = \frac{kT}{h} e^{-\Delta H_a/RT} e^{\Delta S_a/R} \tag{17}$$

unde ΔS_a este entropia de activare.

În acest calcul însă nu s-a luat în considerare că entropia care se referă la un grad de libertate pentru particule gazoase, indică mișcarea după oricare din cele șase direcții în spațiu, pe cînd complexul activ se poate mișca numai într-o singură direcție după coordonata de reacție. Prin urmare entropia mișcării prin barieră trebuie micșorată cu

$$R \ln 6 = 3{,}6 \text{ cal}/^0C \tag{43}$$

Dar după termodinamica statistică

$$S = RT\frac{\partial \ln f}{\partial T} + R \ln f \tag{44}$$

și entropia de translație (admițînd lungimea barierei egală cu 1 $\overset{0}{A}$) va avea valoarea:

$$S_{\text{trans (Eyring)}} = 4 \text{ cal}/^0C \tag{45}$$

încît rezultă

$$S_{\text{trans (corect)}} = 4 - 3{,}6 \approx 0 \tag{46}$$

Prin aceasta factorul preexponențial se reduce cu un ordin de mărime:

$$k' = (10^{12} e^{\Delta S_a/R}) e^{-\Delta H_a/RT} \text{ s}^{-1} \tag{47}$$

Deoarece ΔS_a poate fi negativ — pentru reacții n-moleculare sau apropiat de zero — pentru reacții monomoleculare, la care complexul activ se deosebește puțin din punctul de vedere al structurii față de molecula inițială, teoria lui Eyring nu se poate aplica reacțiilor monomoleculare, care prezintă un factor preexponențial de ordinul de mărime 10^{16} s^{-1} și care include o entropie de activare de $\simeq$ 15 cal/^{0}C.

În continuare Kobozev arată că nici prin mecanismul clasic propus de Lindemann [11] pentru reacțiile monomoleculare nu se pot interpreta rezultatele experimentale deoarece în acest caz pentru factorul preexponențial se obține o valoare și mai mică, de ordinul 10^9 s^{-1}.

Chiar dacă se admite o aglomerare a energiei dealungul legăturii ce se rupe în timpul disocierii complexului, tot nu se poate explica valoarea mare a entropiei de activare, care ar rezulta atît aplicînd mecanismul clasic al lui Lindemann cît și teoria vitezelor absolute reacțiilor monomoleculare în forma ei primară.

Această necorespondență prezintă o lacună remarcabilă a teoriei lui Eyring.

Pentru a înlătura acest neajuns Kobozev arată că orice sistem chimic poate fi considerat ca produs al unei stări premergătoare, care se află la o oarecare depărtare față de produșii finali ce rezultă în urma transformărilor ce le suporta sistemul.

Această depărtare între substanțele inițiale și cele finale este atît spațială, pur geometrică, cît și energetică, substanțele fiind separate de o barieră energetică. Astfel cinetica contemporană consideră două forme de intervale existente între substanțe: distanța spațial-configurativă (intervalul l) și distanța energetică (intervalul E). Teoria complexului activ nu a dus nimic nou, ci a adîncit doar problema intervalului E și nu ține seama de faptul că în transformarea diferitelor stări chimice mai inter-

vine încă un factor foarte important, așa numitul interval „provizoriu“ (de tranziție) între stări. Considerații cuanto-mecanice și experiența fizică arată că între diferitele stări chimice mai există încă un interval, numit de Kobozev „interval τ“ sau interval de tranziție. După mecanica cuantică trecerea de la o stare la alta nu se face în mod continuu ci în „salt“, iar în intervalul de tranziție apare circumstanța care determină trecerea în salt de la starea inițială la cea finală. Dar conform relației de nedeterminare

$$\begin{aligned} \Delta x \, \Delta p &\geqq h \\ \Delta t \, \Delta E &\geqq h \end{aligned} \tag{48}$$

pozițiile stărilor nu pot fi definite în funcție de timp, nici intervalul de tranziție τ nu poate fi definit precis, dacă ne referim la toate pozițiile posibile ale sistemului. Pe noi ne interesează însă intervalul τ cel mai scurt între starea inițială și cea finală, care corespunde acelui nivel energetic, deasupra căruia starea inițială nu mai poate exista.

Acest nivel superior de energie, deasupra căruia legătura încetează să mai existe, este nivelul disociației. Legătura între timpul caracteristic intervalului de tranziție și energia de disociere D_S este dată de relația

$$\tau_S \geqq \frac{h}{D_S - \overline{U}} \approx \frac{h}{D_S} \text{ s} \tag{49}$$

unde $\overline{U}$ este energia de vibrație pentru starea cuantică dată și care este neglijabilă în comparație cu D_S.

În cazul complexului activ (numit de Kobozev pentru a scoate în evidență noul aspect — complex de tranziție), energia de oscilație în jurul legăturii se mărește cu valoarea E_a (energia de activare la zero absolut) care nu mai poate fi neglijată în comparație cu D_S, și avem:

$$\tau_S^{\neq} \geqq \frac{h}{D_S - (E_a + \overline{u})} \approx \frac{h}{D_S - E_a} \text{ s} \tag{50}$$

Deci complexul de tranziție mărește intervalul de existență τ, respectiv prescurtează intervalul de tranziție $\Delta\tau_{S \to p}$ și apropie starea inițială de cea finală. Cum timpul de transformare al sistemului este egal cu lungimea timpului stării active, $\tau_S^{\neq}$, viteza de transformare pe secundă în direcția produsului va fi dată de relația:

$$V = \frac{1}{\tau_S^{\neq}} C_S^{\neq} \tag{51}$$

unde $C_S^{\neq}$ este concentrația complecșilor activi. Ținînd seama de faptul că timpul stării active este mult mai scurt decît timpul stării normale, viteza de reacție va fi mai mare decît cea dedusă de Eyring.

Din cele expuse rezultă că coordonata τ, reprezintă un grad de libertate complimentar al sistemului, numit de Kobozev „coordonata de transformare“ și deoarece include o apropiere de starea finală, entropia corespunzătoare coordonatei de transformare trebuie să fie mult mai mare decît pentru stările normale.

In general entropia poate fi definită în funcție de volumul fazelor, adică

$$S^0 = R \ln V^0 \tag{52}$$

iar ținînd seama de coordonata suplimentară τ, vom avea

$$V = \varkappa V^0 \tau^\gamma \tag{53}$$

și deci

$$S = R \ln V^0 + \gamma R \ln \tau + B \tag{54}$$

în care γ este „factorul întinderii" și reprezintă gradul de participare al duratei de timp τ la spațiul fazelor corespunzător sistemului. În caz de simetrie vom avea $\gamma = 1$.

Corespunzător, entropia de activare, care reprezintă diferența între entropia complexului de tranziție și moleculele inițiale va fi:

$$\Delta S^{\neq} = S^{\neq} - S_S = R \ln \frac{V_S^{0\neq}}{V_S^0} + \gamma R \ln \frac{\tau_{S\neq}}{\tau_S} \tag{55}$$

Primul termen reprezintă entropia moleculară obișnuită, ΔS_M pe care Eyring o identifică cu entropia de activare, iar al doilea termen reprezintă entropia de tranziție, care este tocmai entropia caracteristică stării de tranziție:

Astfel putem scrie:

$$\Delta S^{\neq} = \Delta S_M + \Delta S_\tau \tag{56}$$

iar constanta de viteză a procesului chimic va fi:

$$k' = \frac{kT}{h} \left[e^{\Delta S_M / R} \right] \left[e^{\Delta S_\tau / R} \right] \left[e^{-\Delta H^{\neq} / RT} \right] \tag{57}$$

unde $\frac{kT}{h} = A.$ este coeficientul preexponențial din teoria vitezelor absolute, $e^{\Delta S_\tau / R} = f_\tau$ — factorul de tranziție; $e^{\Delta S_M / R} = f_M$ factorul de structură și $e^{-\Delta H^{\neq} / RT} = f^E$, factorul energetic. Vom avea deci:

$$k' = A f_M f_\tau f_E \tag{58}$$

În această relație numai factorul de tranziție are un efect de accelerare, legat de entropia de tranziție, încît toate reacțiile „rapide" — cu coeficient preexponențial mare — implică procese chimice al căror complex activ este foarte apropiat de starea finală, adică cu o entropie de tranziție mare. Din compararea relațiilor (17) și (58) rezultă că:

$$A_{\text{Eyring}} = A f_{M(\text{Kobozev})}$$

relație care arată în mod concret corecția pe care a adus-o Kobozev teoriei lui Eyring în ceea ce privește dimensiunea și sensul factorului preexponențial. Concordanța între prevederile calculelor lui Kobozev și datele experimentale este mai mult decît satisfăcătoare.

Prin intermediul acestor rezultate Kobozev mai rezolvă și o problemă dificilă a cineticei chimice și anume interpretarea judicioasă a reacțiilor monomoleculare rapide pe care nu le-a putut cuprinde nici teoria clasică și nici teoria vitezelor absolute de reacție în forma elaborată de Eyring.

Laboratorul de Chimie Fizică
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *I. M. Trautz* — Z. f. Elektrochem **18**, 513, (1912) ; Z. f. Physik, **2**, 117, 1920.
2. *C. N. Hinshelwood* — Chem. Review, **3**, 227, (1926) ; J. Chem. Soc., 1933, p. 1357, şi 1935, p. 1111.
3. *L. Kassel* — J. Phys. Chem., **34**, 1777, (1930). După C. N. Hinschelwood „Reaktionskinetik gasförmiger Systeme" Akad. Verlag Leipzig, 1928.
4. *W. Steiner* — Z. Phys, Chem. Bondensteifestband, 817, (1953) şi B **15**, 249, (1932).
5. *R. Marcelin* — C. r., **158**, 407, (1914).
6. *H. Eyring* — Cem. Review, **10**, 103, (1932). „Quantum Chemistry", Ed. IV, 1948, cap. XVI.
7. *H. Polany* — Naturwiss, **20**, 289 (1932) ; Z. f. Phys. Chem., B. **12**, 279, (1931) (împreună cu Eyring H.).
8. *W. I. Kobozev* — Журн. Физ. Химий XXVIII, **11**, 2067, (1954) şi **12**, 2234, (1954).
9. *V. A. Palm* — Журн. Физ. Химий XXIX, **6**, 1116, (1955), şi Проблемы химической кинетики катализи и реакционной спосс бенности Ed. Acad. U.R.S.S., 1955, p. 75.
10. *M. V. Wolkenstein* — строение и физической своиства молекул, Ed. Acad. U.R.S.S., 1955. cap, XII.
11. *Lindemann* — Trans. Faraday Soc. **17**, 598, (1922); după C. Hinsgelwood, op. cit.

АКТИВИЗИРОВАННЫЙ КОМПЛЕКС В ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ

(Краткое содержание)

Излагается критическим образом теорию абсолютныи скоростей реакций по энергу.

Отмечается дополнения принесенные этой теории от советских Палм, Волкенштеин И Кобозев.

THE ACTIVE COMPLEXE IN THE CHEMICAL KINETIC

(Summary)

Eyring's theory on the absolute velocity of reaction is critically presented. The contributions braught to this theory by the Soviet scientists Palm, Wolkestein and Kobozev are autlined.

LE COMPLEXE ACTIVÉ DANS LA CINETIQUE CHIMIQUE

(Résumé)

On fait une exposition critique sur la théorie des vitesses absolues des reaction d'après Eyring. On montre encore les contributions apportées à cette théorie par le savants soviétiques Palm, Wolkenstein et Kobozev.

DER AKTIWEN KOMPLEX IN DER CHEMISCHEN KINETIK

(Zusammenfassung)

Es wird eine kritische Darlegung der Eyring-schere Theorie der absoluten Reaktionsgeschwindingkeiten gemacht. Man weist auf Ergänzungen ein, die dieser Theorie von den sowietischen Wissenchaftlern Palm, Wolkenstein und Kobozev gebracht wurden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

ELECTROCHIMIE

541.138.3

DESPRE MECANISMUL FORMĂRII ELECTROCHIMICE A COMPUȘILOR OXIGENAȚI AI CLORULUI PE ELECTROD DE GRAFIT

de I. A. ATANASIU și LICA STANCU

În timpul electrolizei soluțiilor clorurilor metalelor alcaline și a soluțiilor de acid clorhidric fără diafragmă, este posibilă formarea pe anod a diferiților compuși oxigenați ai clorului.

Înțelegerea mecanismului de formare al acestor produși este foarte importantă din punct de vedere electrochimic, deoarece alături de un mare interes teoretic, are și o însemnătate practică, fiindcă permite dirijarea rațională a proceselor tehnologice.

În prezent nu există un punct de vedere unic în ceea ce privește mecanismul formării electrochimice a cloraților a acidului percloric și a sărurilor lui (1).

Teoria lui Foerster atribuie formarea cloratului în timpul electrolizei clorurilor alcaline, a două procese distincte care sînt :

a) reacția chimică a hipocloritului cu acidul hipocloros liber și

b) descărcarea ionilor hipoclorit la anod.

În general se presupune că formarea cloratului prin descărcarea ionilor hipoclorit este o reacție electrochimică; Foerster și Müler (2) au arătat că poate fi reprezentată prin ecuația:

$$6\,ClO^- + 3\,H_2O \rightleftharpoons 2\,ClO_3^- + 4\,Cl^- + 6\,H^+ + \frac{3}{2}\,O_2 + 6\,\varepsilon. \qquad (1)$$

Deși această ecuație este bazată pe date experimentale, mecanismul reacțiilor principale de la anod este pînă în prezent neclar (3), (4).

Această teorie a fost supusă revizuirii printr-o serie întreagă de lucrări ; astfel Glastone și Hickling (5) au arătat că reacțiile principale sînt probabil descărcarea clorului și hidroxidului conform ecuațiilor :

$$2\,Cl^- \rightleftharpoons Cl_2 + 2\,\varepsilon \qquad (2)$$

$$4\,OH^- \rightleftharpoons 2\,H_2O_2 + 4\,\varepsilon \qquad (3)$$

$$2\,H_2O_2 \rightleftharpoons 2\,H_2O + O_2. \qquad (4)$$

Apar discutabile pînă în prezent schemele formării acidului percloric ($HClO_4$) ale lui Exli, Naibs și Makk (6) : iar dacă mai ținem seama și de faptul că oxidarea clorului nu este unicul proces, care se desfășoară pe

electrod, avînd în vedere absorbția electrochimică a oxigenului molecular și chiar a ozonului, atunci devin clare greutățile ce se întîmpină în alegerea unui mecanism oarecare.

Alt factor complicat este de asemenea apropierea potențialelor de formare ale unor compuși oxigenați ai clorului, ceea ce îngreunează delimitarea unor forme de oxidare în altele.

Tot atunci pot să apară și multe alte greutăți datorită unor serii întregi de reacții secundare, ce pot să apară atît pe electrod cît și în soluție.

Este firesc să se presupună că în acea zonă a potențialelor, unde comportarea electrodului se determină prin compușii de oxigen de suprafață, aceștia nu rămîn indiferenți față de procesul de oxidare al ionilor clor. Iacovlev și colaboratorii săi (7) în lucrările lor au arătat rolul activ, iar cîte odată chiar determinant al oxizilor superficiali (de suprafață), atît în procesele care se desfășoară în timpul degajării oxigenului cît și într-o serie de alte reacții ale oxidării anodice a ionilor și moleculelor.

În lumina acestor reprezentări este evident că înțelegerea mai profundă a mecanismului oxidării ionilor Cl^-, este posibilă atunci cînd se ține seama de legile cinetice generale și a datelor care se referă la starea suprafeței electrodului polarizat anodic (1), (7).

D. Valera (8) a atras atenția asupra rolului pe care-l joacă stratul de difuzie la anod în electroliza clorurilor; el afirmă că procesul de descărcare al ionilor ClO^- constă în principiu din reacția, care are loc la sau lîngă anod, între ionii ClO^- și protonii puși în libertate prin descărcarea ionilor OH^-.

El a făcut un studiu amănunțit în care arată că s-ar putea ca în realitate ionii ClO^-, să atingă suprafața anodului și să reacționeze cu solventul pentru a da acid hipocloros și ioni hidroxil care sînt apoi descărcați.

S-au calculat funcție de condițiile de electroliză diverșii parametri și s-a ajuns la concluzia că teoria electrolizei clorurilor poate fi elaborată pe baza ecuației principale (1).

Teoria propusă de el este echivalentă cu teoria lui Foerster.

În ultimul timp s-a introdus la cercetarea cineticei reacțiilor de oxidare anodică metoda polarografică cu ajutorul electrozilor solizi.

Metoda polarografică prezintă la cercetarea reacțiilor electrochimice o serie de avantaje, deoarece ea permite să se delimiteze zona cineticei reale unde viteza totală a procesului se determină propriu zis prin viteza reacției electrochimice de zona difuziei în care factorul ce determină viteza totală a procesului, constă în aducerea substanței în zona reacției.

Metoda polarografică a fost folosită pînă mai acum cîțiva ani, numai pentru explicarea fenomenelor catodice întrebuințînd electrodul cu picătură de mercur. După calitățile sale chimice și electrochimice, mercurul este mai puțin util pentru cercetarea reacțiilor de oxidare anodică, iar pentru reacțiile cu potențiale anodice mari, folosirea mercurului ca electrod se exclude.

În acest scop Rozentahl și Veselevski (3) au folosit electrodul de *Pt* deoarece acesta posedă o mare supratensiune pentru oxigen și este destul de stabil în medii agresive.

În afară de aceasta, electrodul de Pt se folosește într-o serie de procese industriale pentru obținerea unor combinații oxigenate care se obțin în condițiile unor potențiale anodice ridicate.

Lucrările recent apărute în legătură cu folosirea electrodului de Pt în polarografie, începînd cu lucrările lui Pletenov (9) cu tot materialul interesant tratat nu iau în considerare specificul electrochimic al mecanismului de reacție în acest sistem.

Iacovlev și colaboratorii săi, (7) s-au ocupat în mod special cu mecanismul formării electrochimice a compușilor oxigenați ai clorului pe electrod de platină cu ajutorul polarografiei anodice.

Din datele multor autori, rezultă că în reacțiile electrochimice care se desfășoară cu schimbarea conținutului în oxigen al ionului oxidat, poate participa și oxigenul adsorbit pe suprafața anodo-polarizată a platinei și că acest oxigen adsorbit influențează în mod deosebit asupra mecanismului și cineticei procesului de oxidare. Iacovlev, Rozentahl și Filipov au reușit să obțină unda polarografică de oxidare a ionilor Cl în soluții de H_2SO_4, HNO_3, $HClO_4$, ca și în sărurile lor, folosind polarograful Heyrowski și microanod rotativ.

Pe baza rezultatelor obținute ei au încercat să dea un mecanism asupra formării electrochimice a cloratului și percloratului. Astfel lucrînd cu soluții de HCl a căror concentrație variază de la 1N la 0,1N pe electrodul rotativ de Pt se desfășoară procesul formării clorului molecular, deoarece începutul creșterii curentului pe curbele de polarizare este egal cu potențialul normal de oxido-reducere al reacției:

$$Cl^- \rightleftharpoons {}^1/_2\, Cl_2 + \varepsilon \qquad (5)$$

și egal cu E = 1,36 V potențial ce corespunde cu potențialul teoretic de descărcare al ionilor Cl^-. Folosind însă soluții de bază formate din acizii amintiți mai sus cu concentrații mici de HCl ($10^{-2} - 10^{-3}$N) apare unda polarografică cu $E^1/_2$ = 1,65 V, apariție care nu poate fi explicată decît prin procesul oxidării ionilor Cl pînă la cele mai mari grade de oxidare.

Efectuînd electroliza la potențialul constant de 1,65 V și analizînd produsele rezultate de electroliză s-a găsit că se formează $HClO_3$ și nu se formează $HClO_4$ sau HClO; de aici s-a tras concluzia că $E^1/_2$ = 1,65 V, reprezintă procesul oxidării ionilor Cl^-, pe electrod de Pt, la ClO_3^-

S-a arătat că reacția de oxidare a Cl^- la ClO_3^- se desfășoară cu o supratensiune constantă de 0,2 V în zona potențialelor dintre 1,5 ÷ 1,7V, la care se produce adsorbția O_2 pe Pt cu formarea peroxizilor instabili și ca urmare pe electrod apare oxigen activ cu mare capacitate de reacție.

Oxigenul activ de pe suprafața electrodului, intră în reacția oxidării ionilor Cl^- existenți în soluție și ținînd seama că reacția are loc cu schimbarea conținutului în oxigen, la potențiale anodice ridicate se produce adsorbția oxigenului pe suprafața deja oxidată a platinei după reacția:

$$PtO + H_2O - 2\varepsilon \rightleftharpoons PtO\,(Oads) + 2H^+. \qquad (6)$$

În procesul oxidării ionilor Cl^- la Cl participă oxigenul adsorbit pe platină după reacția:

$$PtO\,(Oads)_n + Cl^- \rightleftharpoons ClO_3^- + PtO\,(Oads)_{n-3} \qquad (7)$$

iar pentru oxidarea electrochimică a cloratului la perclorat reacția decurge electrochimic după ecuația:

$$PtO\,(Oads)_n + ClO_3^- \rightleftharpoons ClO_4^- + PtO\,(Oads)_{n-1}. \qquad (8)$$

În lucrarea de față s-a căutat să se explice mecanismul oxidării ionilor Cl^- la ClO^- și ClO_3^- la ClO_4^- pe electrodul de grafit impregnat cu parafină, caz care se apropie și mai mult de condițiile de electroliză industrială.

PARTEA EXPERIMENTALĂ

1. — *Aparatura.*

Aparatura necesară efectuării experiențelor a constat din polarograful Heyrowski tip 1954, la care s-au schimbat legăturile de la voltmetru, legătura de la polul (+) a celulei fiind făcută în acest caz la catod și comutatorul de înregistrare a curbelor fiind așezat pe poziția „catod".

Celula polarografică folosită a fost asemănătoare cu cea descrisă de Rozenthal și Veselovski (3), la care s-a adus unele modificări: s-a înlăturat sistemul de roți dințate iar electrodul rotativ era fixat cu ajutorul unei bucăți de cauciuc direct la un motoraș care avea o turație de 3000 ture/minut.

Electrodul rotativ a fost constituit dintr-un tub de sticlă de la un agitator KPG cu $\varphi = 10$ mm pe care s-a fixat o bucșă de alamă la care venea un fir de cupru lipit cu cositor pe electrodul de grafit, cuprat electrochimic. Pe bucșa de alamă, legată drept conductor a servit o pensetă de alamă, legată cu polul (+) al polarografului. Ca electrod de comparație a servit electrodul de sulfat format din lanțul Hg, Hg_2SO_4, K_2SO_4(sat) al cărui potențial măsurat față de electrodul de colomel saturat la 25° era de 0,641 V. Puntea de sare de asemenea a fost înlăturată, contactul făcîndu-se direct de la electrodul de sulfat, ceea ce a micșorat mult rezistența celulei, totodată înlăturînd orice urmă de ioni Cl^- care ar fi putut apare în soluție.

Pregătirea microanodului de grafit. Electrodul de grafit prin calitățile sale nu poate fi utilizat în polarografie, deoarece prezintă mică sensibilitate și curent rezidual mare, de asemenea are rezistență mare în comparație cu electrodul de Pt, avînd și suprafața neregulată, porozitate mare în comparație cu electrodul de platină.

Pentru înlăturarea acestor neajunsuri în primă fază s-a făcut lipitura firului conducător cît mai aproape de capătul care intră în soluție la aproximativ 8—10 mm, astfel încît rezistența măsurată a electrodului era mai mică decît 1 ohm.

Totuși, la trasarea polarogramelor se păstra un curent rezidual mare și sensibilitate mică.

Aceste neajunsuri s-au înlăturat numai prin impregnarea electrodului în parafină la 80°C timp de 60' după care era șlefuit cu șmirghel foarte fin (0000), lustruit în continuare cu carton, hîrtie de calc și în sfîrșit cu hîrtie cretată astfel că se ajungea că pe o porțiune de 2—5 mm să aibă diametrul de 0,5 mm, porțiune care intră în soluția de cercetat.

Pentru a proteja microanodul de grafit impregnat, de pătrunderea soluției în interiorul tubului, s-a fixat microanodul la vîrful electrodului cu colofoniu. În felul acesta soluția nu venea în contact cu firul conductor de Cu, ceea ce ar fi dus la rezultate eronate.

Turația microanodului de grafit a fost constantă și egală cu 1000 t/minut.

Determinări

Pentru comparare s-au efectuat polarograme atît pe microanodul de grafit împregnat, cît și pe microanodul de Pt din aceleași soluții.

La început s-a determinat potențialul de descărcare al ionilor Cl din soluție de HCl N pe ambii electrozi, așa cum se observă din polarogramele din fig. 1 și 2 .

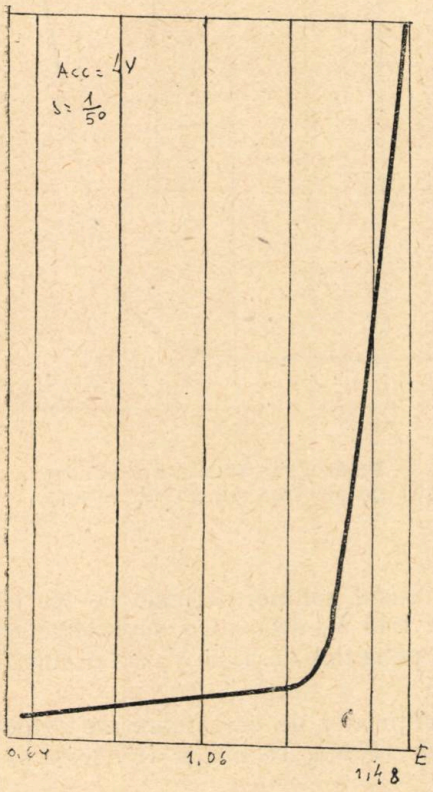


Fig. 1. — Polarogramă luată din soluție 1N HCl pe electrod de Pt rotativ

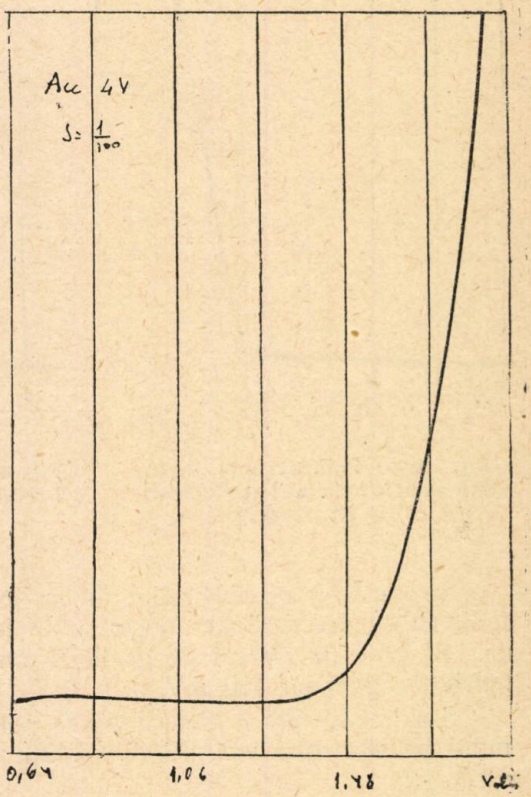


Fig. 2. — Polarogramă luată din soluție de HCl 1N pe electrod de grafit impregnat

După cum rezultă din polarogramele de mai sus pe electrodul de Pt ionii Cl se descarcă aproape la potențialul teoretic (1,31 V); iar pe cel de grafit impregnat se descarcă la 1,37 V, ceea ce reprezintă o supratensiune de 60 mV.

In mod analog s-au luat polarograme la soluția normală de Na Cl, pentru a observa influența cationului asupra potențialului de descărcare al ionilor Cl în ambele cazuri (polarogramele nr. 3 și 4).

Fig. 3. — Polarogramă luată din soluție 1 N NaCl pe electrod de Pt rotativ

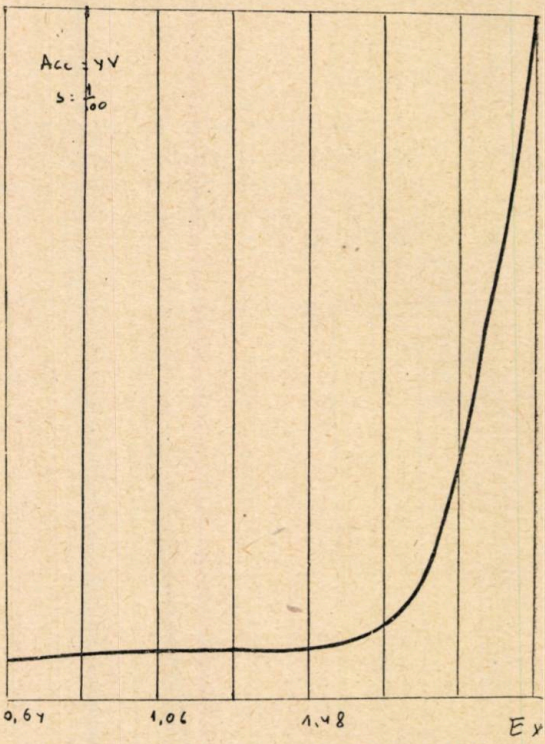


Fig. 4. — Polarogramă luată din soluția 1 N NaCl pe electrod de grafit rotativ

Se vede că pe electrodul de Pt în cazul soluției normale de Na Cl ionii Cl se descarcă la un potențial de 1,45 V, deci cu o supratensiune de 140 mV) iar pe cel de grafit la un potențial de 1,53 V, cu o supratensiune egală cu 160 mV.

S-a trecut apoi la determinarea potențialelor de descărcare ale oxigenului pe electrozii amintiți din soluții de H_2SO_4, $HClO_4$ și HNO_3 și sărurile lor.

În figurile 5 și 6 sînt luate polarogramele anodice din soluția de bază formată din 0,1 NH_2SiO_4 + 0,9 N K_2SO_4.

După cum rezultă din polarograme oxigenul se descarcă pe electrod de Pt la un potențial de 1,65 V, iar pe cel de grafit la 1,83 V, prezentînd o supratensiune în plus de 180 mV.

La curbele 2 și 3 s-au adăugat ioni Cl a căror concentrație a variat între $10^{-2} \div 10^{-3}$ N.

Pe aceste polarograme se află vizibilă unda polarografă a oxidării ionilor C^-, cu un mic palier orizontal al curentului limită și cu $E_{1/2}$ = = 1,62 V pentru electrodul de Pt și $E_{1/2}$ = 1,9 V pe cel de grafit.

S-a aflat relația lineară dintre valoarea lui id și concentrația HCl din soluție în intervalul $2 \cdot 10^{-3} \div 3 \cdot 10^{-2}$ N cu o precizie de 3—4%.

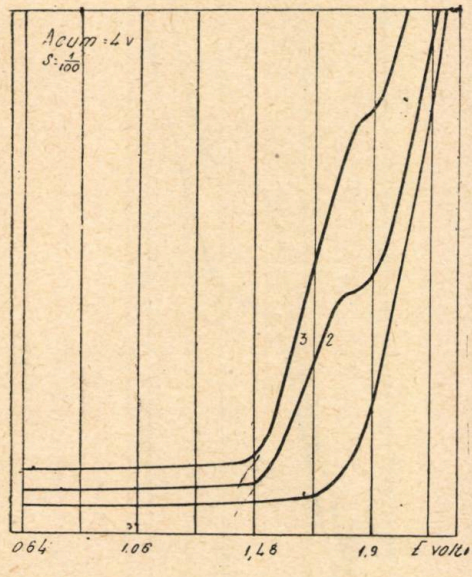


Fig. 5. — Polarogramă anodică luată pe electrod de Pt rotativ
1. 0,1 N H_2SO_4 + N K_2SO_4
2. 0,1 N H_2SO_4 + 0,9 N K_2SO_4 + $5 \cdot 10^{-3}$ HCl
3. 0,1 N H_2SO_4 + 0,9 N K_2SO_4 + 10^{-2} HCl

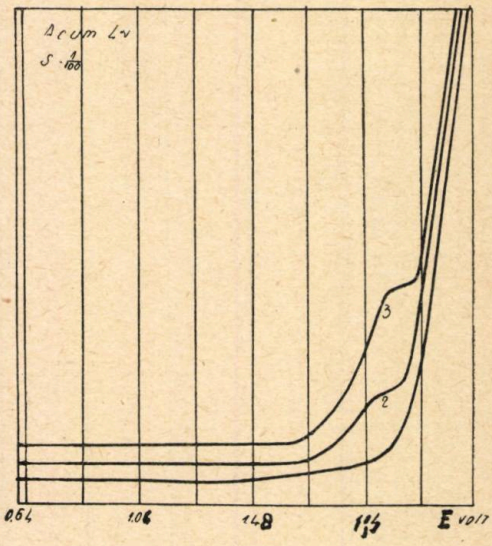


Fig. 6. — Polarograme anodice luate pe electrod de grafit impregnat rotativ
1. 0,1 N H_2SO_4 + 0,9 N K_2SO_4
2. 0,1N H_2SO_4 + 0,9N K_2SO_4 + 5 19^{-3} NHCl
3. 0,1 N H_2SO_4 + 0,9 N K_2SO_4 + 10^{-2} N HCl

După cum au arătat experiențele valoarea lui id depinde nu numai de condițiile difuziei și de concentrația ionilor Cl din soluție ci și de starea suprafeței electrodului.

Curenții limită maximi care se reproduc se obțin cînd suprafața electrodului este în prealabil activată prin polarizări rapide și repetate (6—10 ori) de la potențiale anodice mari de la 1,5÷0,3 V pentru electrodul de Pt și de la 1,9÷0,3 V pentru electrodul de grafit impregnat cu parafină.

Acest lucru este ilustrat în fig. 7 unde sînt reprezentate polarograme pe electrod de grafit luate din aceeași soluție, curba 1 fiind luată la polarizarea electrodului de 6 ori și curba 2 la polarizarea anodului de grafit de 12 ori.

Creșterea aceasta a valorii lui id în cazul electrodului de grafit este de circa 15%, iar pentru electrodul de platină este aproximativ 20%.

In aceleași soluții valorile curentului de difuziune sînt foarte apropiate pentru electrodul de grafit față de electrodul de Pt astfel în soluția de 0,1 N H_2SO_4 + 0,9 N K_2SO_4 + 5.10^{-3} N HCl, id pentru microanodul de Pt este de 19 μA iar pentru microanodul de grafit impregnat este de 17,8 μA.

Polarograme asemănătoare s-au obținut și din soluțiile de $HClO_4$ și HNO_3 și s-a constatat ca anionul din soluția de bază nu influențează asupra mărimii $E_{1/2}$, atît în soluții acide cît și în soluții neutre așa cum se vede din tabelul nr. 1.

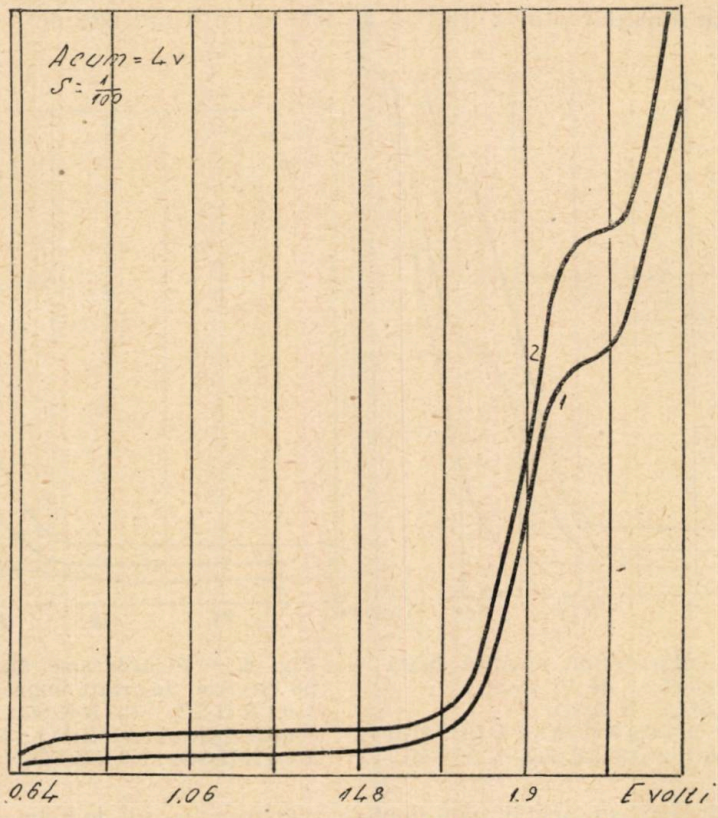


Fig. 7. — Polarograme luate din sol. 0,1 N H_2SO_4 + 0,9 N K_2SO_4 + $2 \cdot 10^{-2}$ N HCl
1 — la polarizarea de 6 ori a electrodului de grafit
2 — la polarizarea de 12 ori a electrodului de grafit

Tabel cu valorile lui id din soluții cu concentrația în HCl de $5 \cdot 10^{-3}$ N

Nr. crt.	Soluția de bază și ioni clor	id μA	E început de creștere a curentului V	$E_{1/2}$ V	E început de degajare oxigen V	Obs.
1	0,1 N H_2SO_4 + 0,9 N K_2SO_4	19	1,46	1,62	1,88	Electrod Pt
2	0,1 N $HClO_4$ + 0,9 N $NaClO_4$	23	1,48	1,61	1,90	„
3	0,1 N HNO_3 + 0,9 N $NaNO_3$	12,3	1,45	1,62	1,89	„
4	1 N Na_2SO_4	9,4	1,48	1,57	1,73	„
5	1 N $NaClO_4$	8,9	1,46	1,55	1,75	„
6	1 N $NaNO_3$	8,7	1,50	1,56	1,74	„
7	0,1 N H_2SO_4 + 0,9 N K_2SO_4	17,8	1,62	1,91	2,05	Electrod de grafit
8	0,1 N $HClO_4$ + 0,9 N $NaClO_4$	22	1,64	1,92	2,06	
9	0,1 N HNO_3 + 0,9 N $NaNO_3$	12,4	1,61	1,88	2,03	„
10	1 N Na_2SO_4	10,2	1,59	1,82	1,98	„
11	1 N $NaClO_4$	11,3	1,61	1,86	1,97	„
12	1 N $NaNO_3$	8,9	1,60	1,82	1,99	„

Totuși valoarea id în soluții acide descrește în ordinea:

$$\text{id } ClO_4^- > \text{id } SO_4^{--} > \text{id } NO_3^-$$

atît pentru electrodul de Pt cît și pentru cel de grafit.

Pentru studiul reacției de oxidare a ionilor ClO_3^- la ClO_4^- s-au efectuat de asemeni experiențe atît cu electrodul de Pt cît și cu cel de grafit impregnat.

Oxidarea anodică a ionilor ClO_3^- depinde în mare măsură de pH-ul și concentrația soluției de bază.

Pe polarograme făcute în soluție de $NaClO_4$ foarte acide, neutre și alcaline, nu a fost descoperită unda corespunzătoare oxidării ionilor ClO_3^-.

Unda polarografică destul de clară a oxidării anodice a ionilor ClO_3^- a fost obținută pentru ambii electrozi, numai în soluțiile $NaClO_4$ 6N cu $[H^+]$ de la $0{,}2 \cdot 10^{-3}$ N — $4 \cdot 10^{-3}$ N.

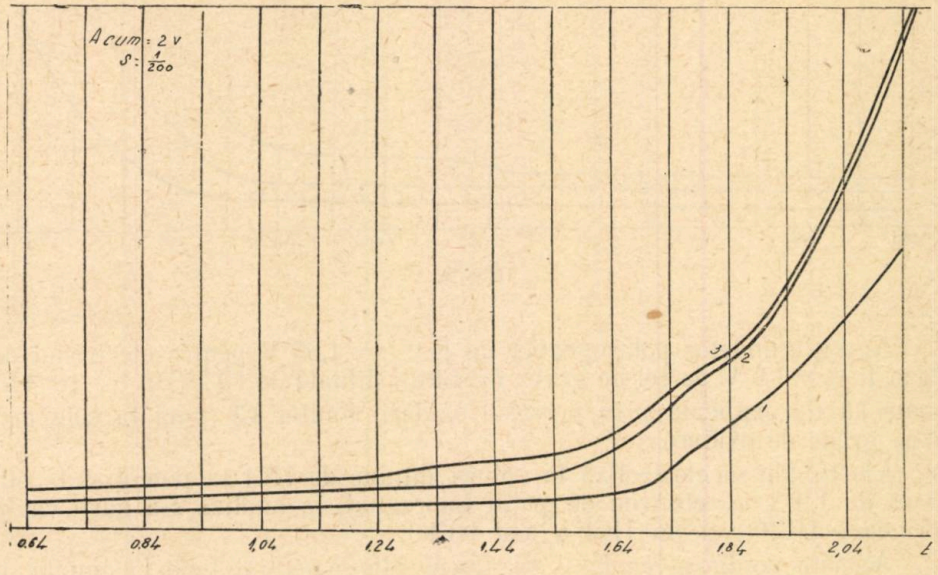


Fig. 8.

In figurile 9 și 10 sînt prezentate curbele de polarizare luate cu soluția formată din:

$$6 \text{ N } NaClO_4 + 4 \cdot 10^{-3} \text{ N } HClO_4 + 10^{-2} \text{ N } NaClO_3.$$

S-a aflat că în aceste condiții $E^1/_2$ al oxidării ionilor ClO_3^- pe electrodul de Pt este de 1,72 V și pentru electrodul de grafit impregnat $E^1/_2 = 2{,}01$ V, iar id este proporțional cu concentrația ionilor ClO_3^- din soluție în intervalul $1{,}2 \cdot 10^{-2}$N — $2{,}5 \cdot 10^{-3}$N pentru electrodul de platină și $2{,}5 \cdot 10^{-2}$N — $3 \cdot 10^{-3}$ N $NaClO_3$ pentru electrodul de grafit.

La amîndoi electrozii starea suprafeței electrozilor și rotirea lor, nu influențează asupra valorii lui $E^1/_2$.

Mecanismul reacțiilor de oxidare anodică a ionilor Cl^- *la* ClO_3^- *și a ionilor* ClO_3^- *la* ClO_4^- *pe electrodul de grafit impregnat.*

Mecanismul reacției de oxidare a ionilor Cl^- pe electrod de grafit impregnat, depinde în mare măsură de concentrația în HCl, astfel între concentrații în HCl cuprinse între 1N ÷ 0,1N pe electrod decurge procesul formării clorului molecular în mod similar cu electrodul de platină.

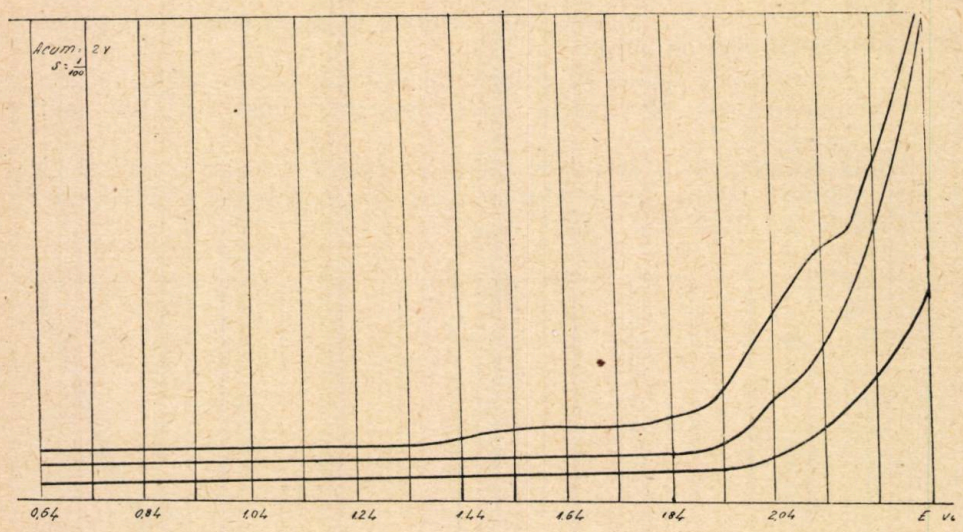


Fig. 9.

Apariția undelor polarografice cu $E\ ^1/_2 = 1{,}65$ V pentru electrodul de Pt și $E\ ^1/_2 = 1{,}9$ V pe cel de grafit în soluții diluate de HCl ($10^{-2} \div 10^{-3}$ N) poate să fie explicată prin procesul oxidării ionilor Cl^- pînă la cele mai mari grade de oxidare.

Efectuîndu-se electroliza la soluții diluate de HCl la potențialul constant de 1,9 V cu electrod de grafit impregnat, la analiză s-a găsit că se formează $HClO_3$ și nu $HClO_4$ sau HClO.

Aceasta confirmă că $E\ ^1/_2 = 1{,}9$ V este potențialul de semiundă al oxidării Cl^- la ClO_3^- lucru ce concordă bine cu datele obținute de Iacovlev (7), care au găsit același component cu electrozii de Pt, la potențialul constant de 1,65 V.

Iacovlev și colaboratorii săi au propus mecanismul de formare al cloraților pe electrodul de platină presupunînd că oxigenul se adsoarbe pe suprafața deja oxidată a platinei cu formarea de peroxizi instabili care pun în libertate oxigen activ cu mare capacitate de reacție, așa cum s-a arătat în partea introductivă.

Din experiențele noastre a rezultat că fenomenele ce au loc pe electrodul de Pt sînt identice și pe electrodul de grafit. De aici rezultă că oxigenul activ este chiar oxigeniul absorbit pe suprafața electrodului și provenit din descărcarea ionilor OH^-.

Se poate presupune deci că reacția de oxidare a ionilor Cl^- la ClO_3^- să se formuleze astfel :

$$C\,(O\ ads)_n + Cl^- \rightleftharpoons ClO_3^- + C\,(O\ ads)_{n-3} \qquad (9)$$

și că polarizarea repetată a electrodului este necesară pentru acoperirea întregii suprafețe cu oxigen adsorbit.

In mod similar se poate presupune pentru oxidarea ionilor ClO_3^- la ClO_4^- reacția.

$$C\,(O\ ads)_n + ClO_3^- \rightleftharpoons ClO_4^- + C\,(O\ ads)_{n-1}. \qquad (10)$$

Totuși în cazul oxidării ionilor ClO_3^- la ClO_4^-, datorită faptului că electrodul este indiferent față de polarizările repetate și chiar de rotirea electrodului, se arată că reacția este unielectronică.

Experiențele prezentate dau posibilitatea să se presupună că oxidarea ClO_3^- la ClO_4^- se produce prin descărcarea ionilor ClO_3^- cu formarea radicalilor ClO_3.

Radicalii ClO_3 fiind foarte activi și în zona potențialelor apropiate de separarea oxigenului, se oxidează ușor pe suprafața electrodului pînă la ClO_4^-.

Concluzii

1. S-a construit electrodul de grafit impregnat cu parafină, apt pentru polarografia anodică.

2. S-au stabilit carecteristicile polarografice ale oxidării anodice a ionilor Cl^- pe electrodul de grafit impregnat în funcție de concentrația ionilor Cl^- și pH-ul soluției.

3. S-a aflat că unda polarografică a oxidării ionilor Cl în soluții diluate de HCl cu $E_{1/2} = 1{,}9$ V, corespunde, în cazul electrodului de grafit procesului oxidării Cl^- la ClO_3^-.

4. S-a arătat influența stării suprafeței electrodului de grafit impregnat cu parafină, asupra valorii lui id în cazul oxidării ionilor Cl^- în soluții diluate de HCl.

5. Se propune mecanismul posibil al procesului oxidării anodice al ionilor Cl^-, prin oxigenul absorbit pe suprafața electrodului.

6. Se propune un mecanism asemănător de oxidare a ionilor ClO_3^- la ClO_4^- cu potențialul de semipalier $E_{1/2} = 2{,}01$ V.

7. S-a făcut un studiu comparativ între electrodul de grafit și cel de platină, arătînd că procesele ce se desfășoară pe electrozi sînt identice.

Laboratorul de Electrochimie
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Elim M. L., Borisov I. T.* și *Filipov St. J.* — Fiz. Him. 30, 1282, 1956.
2. *Forester și Müller Z.* — Electrochem 9, 171, 195 — 1903.
3. *Rozenthal K. I.* și *Veselovski I. V.* — Jur. Fiz. Him. 27, 1163—71—1953.
4. *D. Valera Vivion.* — Traus Faraday Soc. 49, 1338—51— 1953.
5. *Glasstone S.* și *Hickliny J.* — Chem. Soc. 2365, 2600 — 1932.
6. *Bennet C.* și *Mack C.* — Trans. Electrochem, Soc. 29, 325, 1916.
7. *Iacovlev E., Rozentahl* și *Filipov St. J.* — Fiz. Him. 30, 937—44, 1956.
8. *D. Valera Vivion* — Trans. Faraday Soc. 52, 250—60 — 1956.
9. *Pletenev A. C. și alții* — J. Zabod. Laborat. 3, 8, 1939.

О МЕХАНИЗМЕ ОБРАЗОВАНИЯ КИСЛОРОДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ХЛОРА, НА ГРАФИТОВОМ ЭЛЕКТРОДЕ.

(Краткое содержание)

В настоящей работе излагается способ изготовления графитового поляризируемого электрода 60-ти минутным пропитыванием в парафине.

Получены анодные полярограммы окисления инов $Cl^- \rightarrow ClO_3^-$ из растворов H_2SO_4, HNO_3. $HClO_4$ и их солей, при $E_{1/2} = 1{,}9$ v.

Также получилась полярографическая волна окисления ионов $ClO_3^- \rightarrow ClO_4^-$ из концентрированных растворов $NaClO_4$ и малой концентрации $HClO_4$, причём $E_{1/2} = 2{,}01$ b.

Сопоставлены результаты, полученные на графитовом пропитанном электроде, с результатами, полученными на платиновом электроде.

Предлагается механизм образования кислородных соединений хлора на этом электроде, указывая что решающую роль в реакхии окисления играет адсорбированный на поверхности электрода, кислород.

ON THE FORMATION MECHANISM OF CHLORE OXYGENATED COMPOUNDS ON A GRAPHITE ELECTRODE

(Summary)

The purpose of the present paper is to show a method for carrying out a graphite electrode, polarizable by 60 minutes-paraffin-impregnation.

Anode polarogrammes of oxydation of ions $Cl \rightarrow ClO_3$ from solutions of H_2SO_4, HNO_3, $HClO_4$ and their salts, with E 1/2 = 1,9 V, were then obtained.

Also, the polarographic oxydation wave of ions $ClO_3 \rightarrow ClO_4$, from concentrated solutions of $NaClO_4$ and low concentration of $HClO_4$, was obtained, with the result E 1/2 = 2,01 V.

The results obtained with an impregnated graphite electrode were compared with those of a conventional platinic electrode.

The possible mechanism of formation of chlore oxygenated compouns on this electrode is proposed, and it is show that the decisive part in the oxydation reaction is played by the oxygene adsorbed on the electrode surface.

SUR LE MÉCANISME DE FORMATION DES PRODUITS OXIGENÉS DU CHLORE SUR L'ÉLECTRODE DE GRAPHITE

(Résumé)

Dans cette note on montre d'abord la manière de construction de l'éléctrode de graphite parafinée.

Avec cette éléctrode nous avons obtenus les polarogrammes d'oxidation des ions $Cl^- \rightarrow ClO_3^-$ dans les solution suivantes: H_2SO_4, HNO_3, HCl_4 leurs sels ayant un potentiel de demipalier $E_{1/2} = 11{,}9$ V.

Nous avons obtenu aussi la courbe polarographique d'oxidation des ions $ClO_3^- \rightarrow ClO_4^-$ dans des solutions concentrées en $NaClO_4$ et une petite concentration en $HClO_4$, en trouvant $E_{1/2} = 2{,}01$ V.

Nous avons comparé les résultats obtenus sur l'éléctrode de graphite avec ceux obtenus sur l'électrod en platine.

On supose que le mécanisme posible de formation des composés oxigenés du chlore sur ces électrodes dans la reaction d'oxidation est détérminé par l'oxygène adsorbé à la surface de l'electrode.

BILDUNGSMECHANISMUS VON OXYDIERTEN CHLORZUSAMMENSETZUNGEN AUF GRAPHITELEKTRODE

(Zusammenfassung)

Die vorliengende Abhandlung gibt das Konstruktionsverfahren der durch 60-minutiges Paraffinimprägnieren polarisierbarer Graphitelektrode.

Zunächst wurden die Anodenpolardiagramme der Ionenoxydierung von $Cl^- \rightarrow ClO_3^-$, aus H_2SO_4, HNO_3, $HClO_4$ Lösungen und deren Sälze, mit $E_{1/2} = 1{,}9$ V, erzielt.

Es wurde auch die polarographische Oxydationswelle der Ionen von $ClO_3^- \rightarrow ClO_4^-$, aus $NaClO_4$ Konzentrationslösungen und aus geringer Konzentration von $HClO_4$, erzielt; es wurde dabei $E_{1/2} = 2{,}01$ V festgestellt.

Die auf paraffinimprägnierter Graphitelektrode erzielte Ergebnisse wurden mit denen der gewöhnlichen Platinelektrode, verglichen.

Es wird das Bildungsmechanismus von oxydierten Clorzusammensetzungen auf dieser Elektrode, vorgeschlagen, indem man zeigt dass die entscheidende Rolle bei der Oxydationsreaktion wird durch den auf der Elektrodenoberfläche, gespielt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

ELECTROTEHNICA

6 1.317.785.082, 744
62 .3.025.018 3

MESURE DE LA PUISSANCE RÉACTIVE EN RÉGIME DÉFORMANT *)

par ION S. ANTONIU

I. LE SYSTÈME MONOPHASÉ

1. La mesure de la puissance réactive en régime déformant n'a pas encore obtenu jusqu'à présent une solution définitive. La grandeur proposée à représenter la puissance réactive dans un régime déformant

$$Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} Q_k , \tag{1}$$

dans laquelle U_k est la valeur efficace de l'harmonique k de tension, I_k celle de la même harmonique du courant et φ_k le déphasage entre ces deux harmoniques, ne peut être mesurée directement avec les appareils dont nous disposons aujourd'hui, les varmètres.

Un varmètre électrodynamique — l'appareil le plus répandu dans la pratique de ces mesures — mesure une grandeur exprimeé par la relation [1]

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} U_k I_k \sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} Q_k , \tag{2}$$

dans le cas ou le circuit voltmètrique a une résistance négligeable par rapport à sa réactance inductive, ou une grandeur exprimée par [2]

$$Q_2 = \sum_{k=1}^{n} k\, Q_k , \tag{3}$$

dans le cas ou le circuit voltmètrique est constitué par une forte réactance capacitive. Il en résulte donc que, par rapport à la grandeur de la puissance réactive exprimée par la relation (1), la mesure de celle-ci avec l'un des appareils indiqués plus haut est entamée d'une erreur de méthode donnée par la relation

$$\varepsilon_1 = 100 \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k} Q_k}{\sum_{k=1}^{n} Q_k} \tag{4}$$

*) Communication présentée à la IV-e session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest (le 18—19 octobre 1958).

dans le cas du varmètre à circuit de tension inductif ou

$$\varepsilon_2 = 100 \frac{\sum_{k=1}^{n} (k-1)\, Q_k}{\sum_{k=1}^{n} Q_k}, \qquad (5)$$

dans le cas d'un varmètre à circuit de tension capacitif; k étant un nombre entier plus grand que 1, il en resulte $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

2. Le principe de fonctionnement d'un varmètre est basé sur le fait que la puissance réactive peut être ecrite sous la forme

$$Q = \pm U I \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

qui nous montre que, pour mesurer cette grandeur, on peut employer un wattmètre électrodynamique ordinaire à condition que, le courant traversant sa bobine voltmètrique et qui est proportionnel à la tension appliquée aux bornes de cette bobine soit déphasé de 90° en *retard par* rapport à cette tension dans le cas d'une charge inductive (en *avance* dans le cas d'une charge capacitive). On arrive au même resultat si l'on déphase le courant passant par la bobine ampèremétrique par rapport au courant du circuit avec 90° en *avance,* respectivement en *retard,* et en laissant le courant parcourant la bobine de tension en phase avec la tension appliquée à celle-ci ; cette réalisation étant plus difficile, on préfère aménager le montage du varmètre suivant le première procédé.

Dans ce cas, l'appareil mesure la valeur moyenne donnée par la relation

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^t u' i \, dt$$

dans laquelle

$$u' = U \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

A cause de l'élément voltmètrique, la construction d'un varmètre électrodynamique est plus difficile que celle d'un wattmètre electrodynamique. En principe, le déphasage nécessaire de 90° entre le courant traversant la bobine voltmétrique et la tension appliquée à cette bobine est obtenu si celle-ci est fortement inductive (sa résistance étant négligeable par rapport à sa réactance) ou bien si l'on connecte en série avec cette bobine un condensateur. Dans ces cas, le courant parcourant la bobine de tension du varmètre est

$$\underline{I}_L = -j \frac{U}{L\omega}, \quad \text{respectivement } \underline{I}_c = j C \omega U, \qquad (6)$$

la tension U étant considéré comme origine des phases.

On voit immédiatement que les varmètres sont sensibles aux variations de fréquence. D'autre part, les relations (6) justifient les relations (2) et (3) ci-dessus.

3. Pour obtenir d'appareils non influençables par la fréquence on utilise pour la bobine de tension, ou celle de courant, des montages spéciaux. Ces montages peuvent être représentés par des dipôles ou par des quadripôles, caractérisés par le rapport de transformation ξ et l'angle de déphasage φ entre la grandeur à la sortie et celle à l'entrée ; ξ peut représenter une impédance ou une admitance apparente. La variation de la fréquence peut avoir comme conséquence l'apparition d'écarts sur les grandeurs caractéristiques ξ et φ. Soient $\Delta\xi$ et δ ces écarts et supposons qu'ils représentent les erreurs de mesure mêmes du montage ; $\Delta\xi$ est donc une érreur relative, sans dimensions, et sa valeur est déduite par rapport à la componente complexe de la grandeur ξ la seule qui intéresse dans le cas des montages pour varmètres.

Si ω est la fréquence de l'utilisation et ω_0 la fréquence nominale pour laquelle le varmètre a été construit, l'écart dû à la fréquence sera donné par la relation

$$\varepsilon = \eta - 1,$$

dans laquelle $\eta = \omega : \omega_0$.

Dans le cas d'une inductance pure, ou d'une capacité, l'influence de la fréquence est caracterisé par

$$\Delta\xi = \pm\,\varepsilon.$$

En effet, nous pouvons écrire
— pour l'inductance

$$\underline{I}_{L_0} = -\,j\,\frac{U}{L\omega_0} \quad \text{et} \quad \underline{I}_L = -\,j\,\frac{U}{L\omega}$$

d'où

$$\Delta\xi = \frac{\underline{I}_{L_0} - \underline{I}_L}{\underline{I}_L} = \frac{-\dfrac{1}{\omega_0} + \dfrac{1}{\omega}}{-\dfrac{1}{\omega}} = \frac{\omega}{\omega_0} - 1 = \eta - 1 = +\,\varepsilon\,;$$

— pour la capacité

$$\underline{I}_{c_0} = j\,C\,\omega_0 \quad \text{et} \quad \underline{I}_c = C\,\omega$$

d'où

$$\Delta\xi = -\,\frac{\underline{I}_c - \underline{I}_{co}}{\underline{I}_{co}} = -\,\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right) = -\,(\eta - 1) = -\,\varepsilon.$$

Une variation de fréquence de 0,1 Hz, qui ne peut être mesurée même avec les plus sensibles fréquencemètres industriels, produit au varmètre une erreur supplémentaire d'au moins 0,2%.

Pour fixer les idées, considérons le montage simple qui consiste à réaliser le circuit voltmétrique en deux parties symétriques montées sur

le même axe [3] (fig. 1). Les deux moitiées sont alimentées par une inductance pure, respectivement par un condensateur ; le montage est tel que l'action de la bobine soit produite par le somme des deux courants.

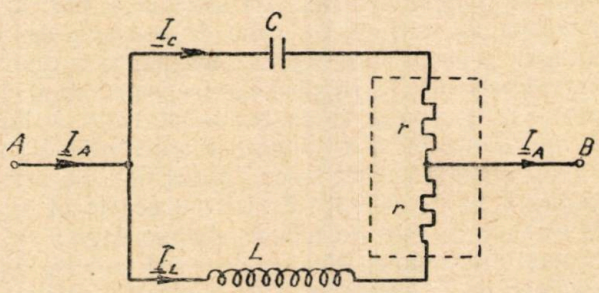


Fig. 1. Schéma de montage de la bobine mobile d'un varmètre.

Ainsi, la valeur du courant résultant est, en négligeant la résistance du circuit

$$i = U\left(\omega_0 C + \frac{1}{\omega_0 L}\right),$$

qui est minimum pour la résonance $\omega_0^2 LC = 1$. Dans ces conditions, si

$$\underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{I}_A$$

et $\underline{U}_{AB}$ est la tension appliquée aux bornes de la bobine voltmètrique, il en résulte [3]

$$\xi_j = j\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)$$

et

$$\Delta\xi = 0{,}5\,\varepsilon^2.$$

Par exemple, pour une variation de 10% de la fréquence, nous trouvons

$$\Delta\xi \cong 0{,}5\left(\frac{55}{50} - 1\right)^2 = 0{,}005,$$

soit une erreur suplimentaire de 0,5%.

Supposons maintenant que l'appareil est parcouru par une onde sinusoïdale d'harmonique 3. En appliquant le même calcul on trouve

$$\Delta\xi = 200\%;$$

et pour l'harmonique 5, on trouve

$$\Delta\xi = 800\%.$$

Ainsi, à l'erreur de méthode s'ajoutent les erreurs dues aux harmoniques.

Il en resulte que, dans un régime déformant on ne peut employer de varmètres électrodynamique compensés, si non l'erreur de mesure est inacceptable.

On ne peut utiliser de varmètres dans les réseaux électriques que dans le cas ou la tension est pratiquement sinusoïdale, l'onde de courant pouvant être n'importe pas comment. Dans ce cas, la puisance réactive peut-être exprimée par l'expression

$$Q = \pm U I \sin\varphi ,$$

c'est-à-dire, la même qu'en régime sinusoïdal.

Un varmètre non compensé sera afecté seulement des erreurs données par les relations (4) ou (5) selon sa construction.

4. Pour nous rendre compte de l'ordre de grandeur de l'erreur de ces appareils nous avons calculé ces erreurs à l'aide de l'analyse harmonique des courbes de tension et de courant de quelques régimes déformants différents [4] en obtenant les resultats donnés dans le tableau Nr. 1.

Tableau nr. 1

Cas	Coefficient de distorsion en % de la courbe de		Déphasage rélatif de la courbe de courant par rapport à la courbe de tension	Puissance reactive var			Erreur %	
				Formule			Formule	
	tension	courant		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	3,68	18,90	+38°18′	397,27	395,66	402,38	−0,41	+1,29
2	3,58	29,80	−27°00′	−276,99	−273,30	−295,44	−1,33	−6,66
3	3 91	70,85	+ 7°40′	61,26	61,32	60,66	+0,10	−0,99
4	3,27	14,35	−34°28′	−256,03	−254,72	−262.19	−0,51	+2,41
5	38,28	10,61	+57°27′	430,38	432,36	425,54	+0,46	−1,13
6	32,41	70,80	−88°05′	−349,19	−349,02	−350,41	−0,05	+0,35

NOTE : Le signe (+) du déphasage rélatif des courbes nous montre que, la courbe de courant est *en retard* par rapport de la courbe de tension et inversement dans le cas du signe (—). Pour la puissance réactive, le signe (—) montre que celleci est négative.

Il en résulte de ce tableau que les indications d'un varmètre électrodynamique à bobine de tension inductive sont les plus proches de la réalité. On constate de même que, en général dans la pratique industrielle, la puissance réactive définie dans un régime déformant par la relation (1), peut être mesurée avec des varmètres électrodynamiques monophasés à bobine voltmétrique inductive avec des erreurs moindres que celles admises pour la mesure de l'énergie active à l'aide des compteurs d'induction et qui sont de $\pm$ 4%.

5. Le varmètre considéré étant un appareil électrodynamique, pareil à un wattmètre électrodynamique, il est le siège de toute une série d'autres causes d'erreurs que nous avons examiné en detail dans une étude antérieur [5] et que nous allons résumer dans ce qui suit :

a) Le couple actif total est formé par les différentes harmoniques et peut être composé par des couples actifs et par des couples de freinage. selon l'angle de déphasage qui peut avoir n'importe quelle valeur entre 0 et 2π. Tenant compte de la construction mécanique de l'appareil (ressorts antagonistes etc.) ces couples peuvent agir différamment sur l'appa-

reil et produire ainsi une nouvelle cause d'erreurs du varmètre fonctionnant dans un régime déformant.

b) Le déphasage interne du varmètre qui est différant dans un régime déformant que celui en régime sinusoïdal.

c) L'induction mutuelle qui peut exister entre les deux bobines — fixe et mobile — de l'appareil.

II. LE SYSTÈME TRIPHASÉ

Du commencement il faut faire une distinction sur le régime déformant considéré, c'est-à-dire si le régime déformant este caractérisé seulment par une onde non sinusoïdale de courant, celle de tension étant parfaitement sinusoïdale ou bien, les deux ondes, de courant et de tension, sont non sinusoïdales.

Dans le premier cas, la puissance réactive mise en jeu dans chaque phase est due seulement aux onds fondamentales de tension et de courant, étant la même sur chaque phase. L'expression de cette puisance réactive est par phase

$$Q = U_1 I_1 \sin\varphi_1$$

et la puissance réactive totale du système sera

$$3\,Q = 3\,U_1 I_1 \sin\varphi_1 = \sqrt{3}\,U I_2 \sin\varphi_1,$$

dans laquelle $U = \sqrt{3}\,U_1$ est la tension composée.

Dans ce cas, la mesure de la puissance réactive est pareille qu'en régime sinusoïdale et à cet effet, on emploie les mêmes méthodes [4].

Considérons maintenant un système triphasé symétrique relié en étoile mais dont la tension par phase est non sinusoïdale

$$u_1 = \sum_{k=1}^{n} U_k \sqrt{2} \sin k\omega t,$$

$$u_2 = \sum_{k=1}^{n} U_k \sqrt{2} \sin k\omega \left(t - \frac{2\pi}{3\omega}\right),$$

$$u_3 = \sum_{k=1}^{n} U_k \sqrt{2} \sin k\omega \left(t + \frac{2\pi}{3\omega}\right).$$

Les courants débités par chaque phase seront de même symétriques, mai non sinusoïdaux.

Mesurant la puissance réactive à l'aide d'un montage ou d'un appareil de mesure correspondant à l'equation de fonctionnement

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{T} \int_0^T (u_{23} i_1 + u_{31} i_2 + u_{12} i_3)\, dt,$$

d'abord les harmoniques d'ordre 3 de tension n'existant, le système étant en étoile, on n'aura pas de puissance réactive correspondante à ces harmoniques, ensuite il se produira une erreur systématique de mesure du fait que les différentes harmoniques forment des systèmes triphasé de séquences différentes [6].

Ainsi, les harmoniques 1, 4, 7, 10, 13,..., $(3\alpha + 1)$ donnent des systèmes de séquence 1 (directes), tandis que les harmoniques 2, 5, 8, 11, 14,..., $(3\alpha - 1)$ donnent des systèmes de séquence 2 (inverses). Il en resulte que les appareils de mesure seront soumis à des couples moteurs de sens différent.

Chaque appareil introduit, dans ce cas, une erreur de mesure par rapport à la puissance réactive définie par la relation

$$Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin\varphi_k,$$

dont l'expression est [7]

$$\Delta Q' = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{1}^{\infty} Q_{(3\alpha-1)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

et, par consequence, l'indication de l'ensemble des trois appareils sera affecté de l'erreur totale

$$\Delta Q = 2\sqrt{3} \sum_{1}^{\infty} Q_{(3\alpha-1)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

L'évaluation de cette erreur se complique dans le cas général d'une distribution non sinusoïdale et non symétrique. A l'erreur ci-dessus, due au régime déformant, il faut ajouter une erreur de mesure due à la dissymétrie de chaque harmonique et qui peut être évaluée pour chaque harmonique par la relation [4]

$$\eta = - \frac{2\varepsilon_u \varepsilon_i \sin\varphi_i}{\sin\varphi_d + \varepsilon_u \varepsilon_i \sin\varphi_i},$$

dans laquelle

$\varepsilon_u = \left| \frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_d} \right|$ et $\varepsilon_i = \left| \frac{\underline{I}_i}{\underline{I}_d} \right|$ sont les coefficients de deséquilibre des tensions et des courants.

$\underline{U}_d$, $\underline{U}_i$, $\underline{I}_d$, $\underline{I}_i$ — les composantes symétriques des tensions et des courants

φ_d et φ_i — les angles de déphasage des composantes symétriques de courant et de tension,

η — étant l'erreur rélative.

Dans la grande majorité des cas de la pratique industrielle on peut negliger, et général, ces erreurs étant donné la forme presque sinusoïdale et symétrique de la tension.

Dans le cas de la mesure de la puissance réactive à l'aide des varmètres triphasés, construits avec des varmètres monophasés, les erreurs sig-

nalés plus haut n'apparaissent plus. Par contre, apparaitront les erreurs de méthode dues à ces appareils. On a vue que, l'utilisation des appareils électrodynamiques à bobine voltmétrique inductive conduit à des résultats dont l'erreur de mesure est suffisement réduite.

Le probleme de la mesure de la puissance réactive dans les systèmes triphasées et deséquilibrés est assez complexe et ne peut pas être résolu complétement par voie théorique. Cette question doit être élucidée expérimentalement pour voir, dans les cas pratiques industriels, quelle est la valeur des méthodes de mesure utilisées et de l'appareillage résultant.

III. CONCLUSIONS

Le problème de la mesure de la puissance réactive, quoi qu'il a, dans le stade actuel de la technique, une solution pratique, ne peut être considéré tout à fait résolu. En effet il a été résolu à peu près satisfaisant pour un cas particulier de fonctionnement des systèmes énergétiques, celui des systèmes sinusoïdaux et symétriques. En général les hypothèses qu'on fait pour admettre un régime à peu près sinusoïdal ou à peu près équilibré ne peuvent pas correspondre à toutes les situations de la pratique. Ainsi, la mesure de la puissance réactive absorbée par un redresseur à vapeurs de mercure où bien par un four à induction monophasé, instalé dans un réseau triphasé, ne peut pas être faite par les moyens habituels.

Des études théoriques et expérimentales très poussées sont encore nécessaires, tant en ce qui concèrne les méthodes de mesure, que en ce qui concèrne les appareils de mesure utilisés pour la mesure de la puissance réactive, notamment dans les systémes énergétiques triphasés déformants et deséquilibrés.

Un effort doit être fait en vue de la réalisation d'appareils de mesure qui puissent mesurer dans un régime déformant l'expression vraie de la puissance réactive

$$Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin\varphi_k.$$

Dans le stade actuel de la technique, le problème de la mesure de la puissance réactive doit être examiné avec beaucoup d'attention dans chaque cas particulier pour qu'on évite le choix non correspondant des méthodes de mesure et des appareils correspondants afin que les erreurs de mesure soient acceptables.

Dans la réalisation de l'éctrification du pays, le problème de la puissance réactive, de l'énergie réactive en général, joue un rôle assez important. Il est nécessaire à donner la même importance aussi au problème de la mesure de cette énergie, voire de la puissance réactive, pour pouvoir ainsi bien connaître leurs situation dans les systèmes énergetiques et d'en prendre les mesures en conséquence.

La Chaire d'Electrotechnique II
Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *A. Liénard* — Revue Générale de l'Electricité 1921, t. X, p. 547.
2. *A. Iliovici* — Bulletin de la Société Internationale des Électriciens, mai 1918, p. 179.
3. *H. Polek* — Archiv für technisches Messen, 1942, Z. 61—4.
4. *I. S. Antoniu* — Studii și Cercetări de Enegetică, 1954, t. IV, p. 39.
5. *I. S. Antoniu* — Rapport No. 301, CIGRE, Session 1958.
6. *I. S. Antoniu* — Chestiuni speciale de electrotehnică, București 1956, Editura Academiei R.P.R., p. 290.
7. *C. I. Budeanu* — Puissances réactives et fictives, Bucarest 1927, Edition de l'I.E.R., p. 326.

ИЗМЕРЕНИЕ РЕАКТИВНОЙ МОЩНОСТИ В ДЕФОРМИРУЮЩЕМ РЕЖИМЕ

(Краткое содержание)

Измерение реактивной мощности в деформирующем режиме не получило еще окончательного решения; значение,

$$Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin\varphi_k$$

предложенное для представления этой мощности, не может быть измерено настоящими приборами, варметрами. Исследовав принцип функционирования этих приборов, авто показывает погрешности, которые появляются во время измерений реактивной мощности, при использовании этих же варметров. Затем эта задача рассматривается в трифазных системах, где положение более сложное, так как различные гармоники дают трифазные системы различных последовательностей.

В заключении, задача нуждается в основательных теоретических и экспериментальных исследованиях, в отношении методов измерения и приборов, использованных с этой целью, в особенности для несиметричных и деформирующих трифазных систем.

MEASUREMENT OF REACTIVE POWER UNDER DISTORTING OPERATING CONDITIONS

(Summary)

The measurement of reactive power under distorting operating conditions is not yet conclusively solved : the quantity proposed to represent this power

$$Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin\varphi_k$$

cannot be measured with the instruments now available, i. e. the varmeters. After he had reminded the working principle of these instrumets, the author

points out to the errors accompaning the measurements of reactive power made with the varmeters The problem is then discussed of a three-phase system, which is of course more intricated owing to the various harmonics of the three-phase system of various sequences. In conclusion, the problem is as yet at its beginning and requires a great many more thorough theoretical and experimental studies, on the measuring techniques as well as of the instruments used for this end, chiefly in the case of the distorting and unbalanced three-phase systems.

MESURE DE LA PUISSANCE RÉACTIVE EN RÉGIME DÉFORMANT

(Resumé)

La mesure de la puissance réactive en régime déformant n'a pas encore obtenu une solution définitive : la grandeur proposée pour représenter cette puissance,

$$Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin\varphi_k$$

ne peut être mesurée avec les appareils dont on dispose aujourd'hui, les varmètres. Après avoir examiné le principe du fonctionnement de ces appareils, l'auteur montre les erreurs dont sont entamées les mesures de la puissance réactive faites avec ces varmètres. Le problème est ensuite examiné dans le cas du système triphasé où la situation est plus compliquée du fait que les différents harmoniques donnent des systèmes triphasés de séquences differentes. Pour conclurer, le problème nécessite encore des études théoriques et experimentales très poussées, tant sur les méthodes de mesure que sur les appareils utilisés dans ce but, surtout dans les systèmes triphasés déformants et deséquilibrés.

DIE MESSUNG DER BLINDLEISTUNG IM VERZERRUNGSBETRIEB

(Zusammenfassung)

Die Aufgabe der Messung der Blindleistung bei Verzerrungsbetrieb hat noch keine endgültige Lösung gefunden : die Grösse, die diese Leistung darstelen soll

$$Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin\varphi_k$$

kann mit den heute verfügbaren Messgeräten, den Varmetern, nicht gemessen werden. Nach Erläuterung der Betriebseigenschaften dieser Geräte, weist der Verfasser auf die bei der Messung der Blindleistung auftretenden Fehler hin. Das Problem wird danach auf Dreiphasensysteme ausgedehnt, wobei die Erscheinungen durch das Auftreten höherer Harmonischen verschiedener Sequenz kompliziert werden. Es wird daraus gefolgert, dass das Problem noch eingehende theoretische und experimentelle Untersuchungen, besonders in Bezug auf die anzuwendenden Messgeräte und — Methoden, bei Verzerrungs- bezw. asymetrischem Betrieb in Dreiphasensystemen benötigt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

621.316

L'INFLUENCE DES RÉGULATEURS DE TENSION ET DU PHÉNOMÈNE DE SATURATION SUR LES SURTENSIONS PROLONGÉES

par CORNELIU PENESCO et DINU MARTAC

Dans la littérature roumaine de spécialité des dernières années, une série d'articles ont été publiés concernant le problème des surtensions prolongées qui peuvent apparaître dans les réseaux électriques fonctionnant avec le point neutre isolé. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

Le phénomène de surtension analysé est — ainsi que son nom même l'indique — un phénomène stationnaire.

Mais dans l'analyse de ce phénomène on ne considère pas les effets de réduction des surtensions „prolongées" dus d'une part à la présence des régulateurs de tension et d'autre part à l'existence du phénomène de saturation dans le fer des transformateurs.

Le phénomène analysé et les conclusions déduites sont, en essence, les suivants :

Supposons un réseau électrique fonctionnant avec le point neutre isolé et dans lequel apparait, accidentellement, une mise à la terre d'une phase, dans un point A.

Entre les phases „saines" et la terre, au point A, *apparaissent dans ce cas des surtensions qui, rapportées à la tension nominale par phase, ont des valeurs comprises entre environ 2 et 3,5 et rapportées à la tension nominale entre phases ont des valeurs comprises entre 1,15 et 2* (voir [2], pag. 124).

Evidemment, l'existance des surtensions de cet ordre de grandeur entre une phase et la terre (et en même temps entre les phases aussi) implique l'existence des surtensions du même ordre de grandeur dans le réseau entier et donc aussi aux bornes des générateurs et transformateurs.

Dans ce cas on doit prendre en considération tant les effets des régulateurs de tension que l'effet de la saturation dans le fer des transformateurs.

Partant de cette observation générale *le présent rapport se propose d'analyser l'influence des régulateurs de tension et du phénomène de saturation dans le fer des transformateurs sur les surtensions prolongées qui peuvent apparaître dans un réseau fonctionnant avec le point neutre isolé.*

PREMIERE PARTIE

L'INFLUENCE DES RÉGULATEURS SUR LES SURTENSIONS „PROLONGÉES"

I. *Le calcul des surtensions „prolongées" dans l'hypotèse de l'inexistence des régulateurs de tension.*

Dans ce qui suit on indiquera brièvement la méthode de calcul des surtensions prolongées dans l'hypothèse de l'inexistence des régulateurs de tension, méthode qui a été publiée dans les travaux cités plus haut [1].

Supposons un réseau électrique fonctionnant avec le point neutre isolé ; on considère qu'au point A du réseau la phase *a* subit une mise accidentelle à la terre.

On réduit le réseau entier, au point A, a un réseau équivalent ayant un seul générateur (le générateur équivalent) et un seul consommateur (le consommateur équivalent). Les schémas de séquence directe, inverse et homopolaire du réseau équivalent sont présentés dans la fig. 1.

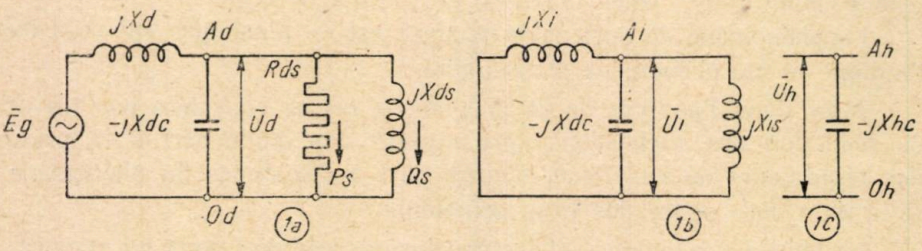


Fig. 1.

Dans ces schémas on a noté :

- — E_g la force électromotrice du générateur équivalent ;
- — U_d la tension de séquence directe au point A ;
- — U_i la tension de séquence inverse au point A ;
- — U_h la tension de séquence homopolaire au point A ;
- — X_d la réactance directe du générateur équivalent ;
- — X_i la réactance inverse du générateur équivalent ;
- — X_{dc} la réactance capacitive directe du réseau (égale à la réactance capacitive inverse) ;
- — X_{hc} la réactance capacitive homopolaire du réseau ;
- — R_{ds} la résistence équivalente de la charge active P_s dans le schéma de séquence directe ;
- — X_{ds} la réactance équivalente de la charge réactive Q_s dans le schéma de séquence directe ;
- — X_{is} la réactance équivalente de la charge dans le schéma de séquence inverse.

La mise à la terre de la phase *a* au point A équivaut à la connexion en série des trois schémas mentionnés plus haut. On obtient le schéma représenté dans la fig. 2.

Dans ce schéma $X_{i\,rez}$ représente la réactance équivalente entre les points A_i et O_i du schéma de séquence inverse représenté dans la fig. 1b.

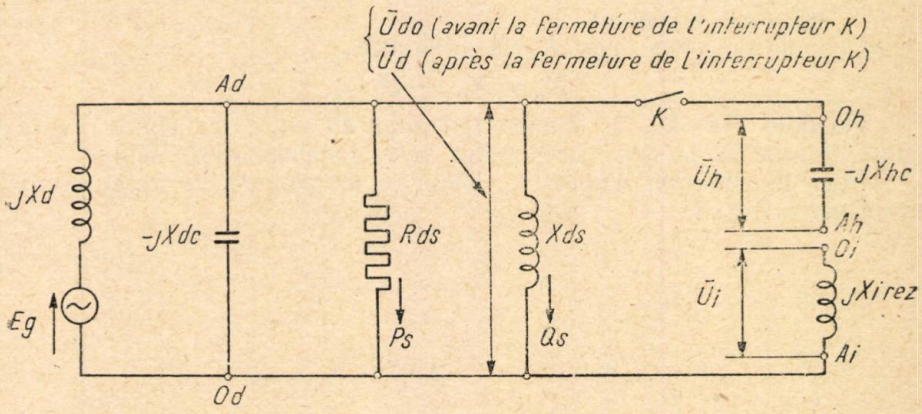


Fig. 2.

Tant que l'interrupteur K est ouvert le schéma de la fig. 2 représente la fonctionnement normal du réseau. Après la fermeture de l'interrupteur K e même schéma représente le fonctionnement du réseau avec la phase a mise à la terre au point A.

Avant la mise à la terre de la phase a on peut écrire l'équation suivante déduite tant de la fig. 2 que du diagramme représenté par la fig. 3.

$$E_g^2 = U_{do}^2\left[1 + X_d\left(\frac{1}{X_{ds}} - \frac{1}{X_{dc}}\right)\right]^2 + \frac{P_s^2 X_d^2}{U_{do}^2}. \qquad (1)$$

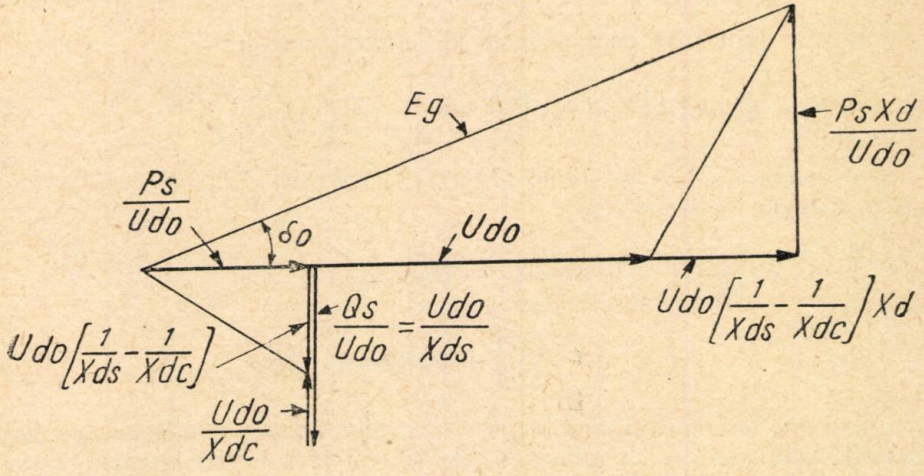


Fig. 3.

On fait les suppositions suivantes pour la situation créée après la mise à la terre (la fermeture de l'interrupteur K) :

— La force électromotrice E_g du générateur garde la valeur eue avant l'apparition du défaut.
— La puissance active absorbée par le consommateur reste la même qu'avant le défaut.

On note de même avec X_a la différence :

$$X_a = X_{hc} - X_{i\,rez}. \tag{2}$$

On note avec U_d la tension qui apparait entre les points A_d et O_d (dans le schéma de séquence directe) après l'apparition du défaut.

Pour la situation d'après le défaut le diagramme vectoriel est représenté par la fig. 4.

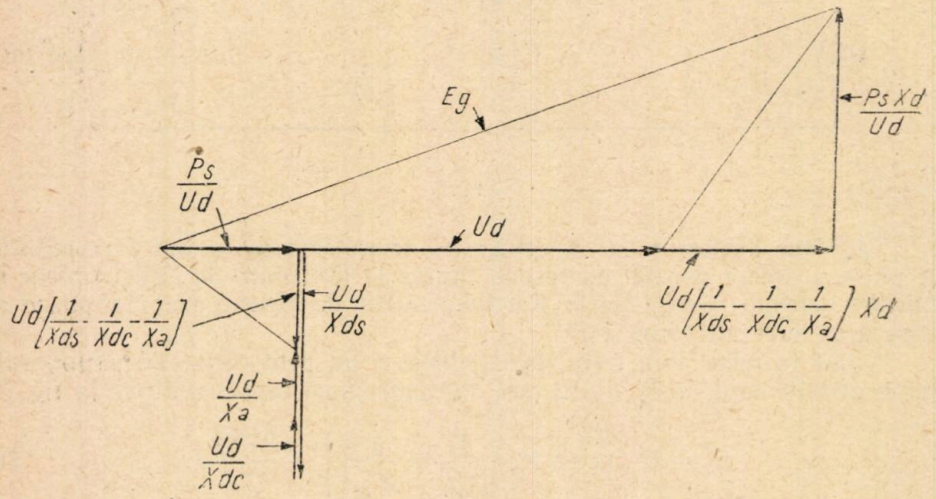


Fig. 4.

De cette figure on peut déduire la relation suivante :

$$E_g^2 = U_d^2\left[1 + X_d\left(\frac{1}{X_{ds}} - \frac{1}{X_{dc}} - \frac{1}{X_a}\right)\right]^2 + \frac{P_s^2 X_d^2}{U_d^2}. \tag{3}$$

En comparant les équations (1) et (3) on peut déduire une équation pour la tension inconnue U_d :

$$U_d^4\left[1 + X_d\left(\frac{1}{X_{ds}} - \frac{1}{X_{dc}} - \frac{1}{X_a}\right)\right]^2 - U_d^2\left\{U_{do}^2\left[1 + X_d\left(\frac{1}{X_{ds}} - \frac{1}{X_{dc}}\right)\right]^2 + \frac{P_s^2 X_d^2}{U_{do}^2}\right\} + P_s^2 X_d^2 = 0. \tag{4}$$

Ainsi que les publications mentionnées plus haut le montrent, des deux solutions positives de l'équation (4) seulement la solution la plus grande, correspondant au signe + avant le réalisant de l'équation (4), est une solution stable.

Il s'ensuit que la tension U_d est déduite d'une façon univoque de l'équation (4).

La tension U_i appliquée au schéma de séquence inverse du réseau au point A se déduit en fonction de U_d de la relation suivante :

$$\overline{U}_i = \overline{U}_d \frac{X_{i\,rez}}{X_{hc} - X_{i\,rez}} = K\,\overline{U}_d. \tag{5}$$

Enfin la tension homopolaire U_h au point A se déduit de la condition :

$$\overline{U}_d + \overline{U}_i + \overline{U}_h = 0. \tag{6}$$

Sa valeur est donc :

$$\overline{U}_h = -\overline{U}_d (1+K) = -\overline{U}_d \frac{X_{hc}}{X_{hc} - X_{i\,rez}}. \tag{7}$$

Les tensions au point A peuvent être calculées à l'aide des formules suivantes :

$$\overline{U}_a = \overline{U}_d + \overline{U}_i + \overline{U}_h = 0. \tag{8}$$

$$\overline{U}_b = a^2\,\overline{U}_d + a\,\overline{U}_i + \overline{U}_h = \overline{U}_d\,(a^2 + a\,K - 1 - K) =$$

$$= \overline{U}_d \left[-\frac{3}{2}(1+K) + j\frac{\sqrt{3}}{2}(K-1) \right] \tag{9}$$

$$\overline{U}_c = a\,\overline{U}_d + a^2\,\overline{U}_i + \overline{U}_h = \overline{U}_d\,(a + K a^2 - 1 - K) =$$

$$= \overline{U}_d \left[-\frac{3}{2}(1+K) - j\frac{\sqrt{3}}{2}(K-1) \right] \tag{10}$$

$$\overline{V}_{ab} = \overline{U}_a - \overline{U}_b = \overline{U}_d \left[\frac{3}{2}(1+K) - j\frac{\sqrt{3}}{2}(K-1) \right] \tag{11}$$

$$V_{ab} = \sqrt{3}\,U_d \sqrt{1 + K + K^2} \tag{12}$$

$$\overline{V}_{bc} = \overline{U}_b - \overline{U}_c = j\sqrt{3}\,\overline{U}_d\,(K-1) \tag{13}$$

$$V_{bc} = \sqrt{3}\,U_d\,(1-K) \tag{14}$$

$$\overline{V}_{ca} = \overline{U}_c - \overline{U}_a = \overline{U}_d \left[-\frac{3}{2}(1+K) - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}(K-1) \right. \tag{15}$$

$$V_{ca} = \sqrt{3}\,U_d \sqrt{1 + K + K^2}. \tag{16}$$

La surtension „prolongée" entre une phase „saine" et la terre, au point A, est donée par la formule (12) ou (16).

Dans cette formule K a la valeur :

$$K = \frac{X_{i\,rez}}{X_{hc} - X_{i\,rez}} \tag{17}$$

et U_d est la plus grande solution de l'équation (4). On a brièvement décrit la méthode pour le calcul de la surtension „prolongée" telle qu'elle est apparue dans la littérature.

Dans cette méthode on ne tient pas compte de l'existence des régulateurs de tension, ce qui se traduit par la supposition que la force électromotrice du générateur garde après le défaut la valeur qu'elle avait avant.

II. *Le calcul des surtensions „prolongées" tenant compte de l'influence des régulateurs de tension.*

Dans ce qui suit on va indiquer le mode de calcul des surtensions prolongées tenant compte de l'influence des régulateurs de tension dans le cas simple d'un seul générateur branche sur un consommateur unique. Le schéma, pris en considération est représenté dans la fig. 5.

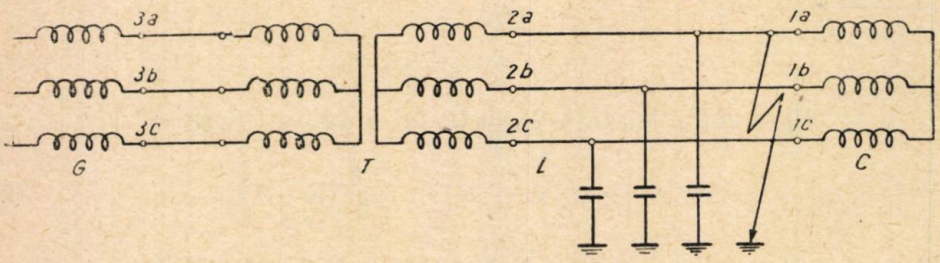


Fig. 5.

Dans cette figure on a fait les notations suivantes :

— G générateur triphasé
— T transformateur triphasé
— L ligne de transport
— C consommateur

Les schémas équivalents de séquence directe, inverse et homopolaire pour le réseau de la fig. 5 sont présentés dans la fig. 6.

Dans chacun des schémas représentés plus haut intervient un quadripole en π qui peut être remplacé avec un autre en T ainsi que le montre la fig. 7.

Les formules de transformation sont :

$$\overline{Z}_1 = \frac{\overline{Y}_2\,\overline{Z}}{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_1\,\overline{Y}_2\,\overline{Z}} \tag{18}$$

$$\overline{Z}_2 = \frac{\overline{Y}_1\,\overline{Z}}{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_1\,\overline{Y}_2\,\overline{Z}} \tag{19}$$

$$\overline{Y} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_1\,\overline{Y}_2\,\overline{Z} \tag{20}$$

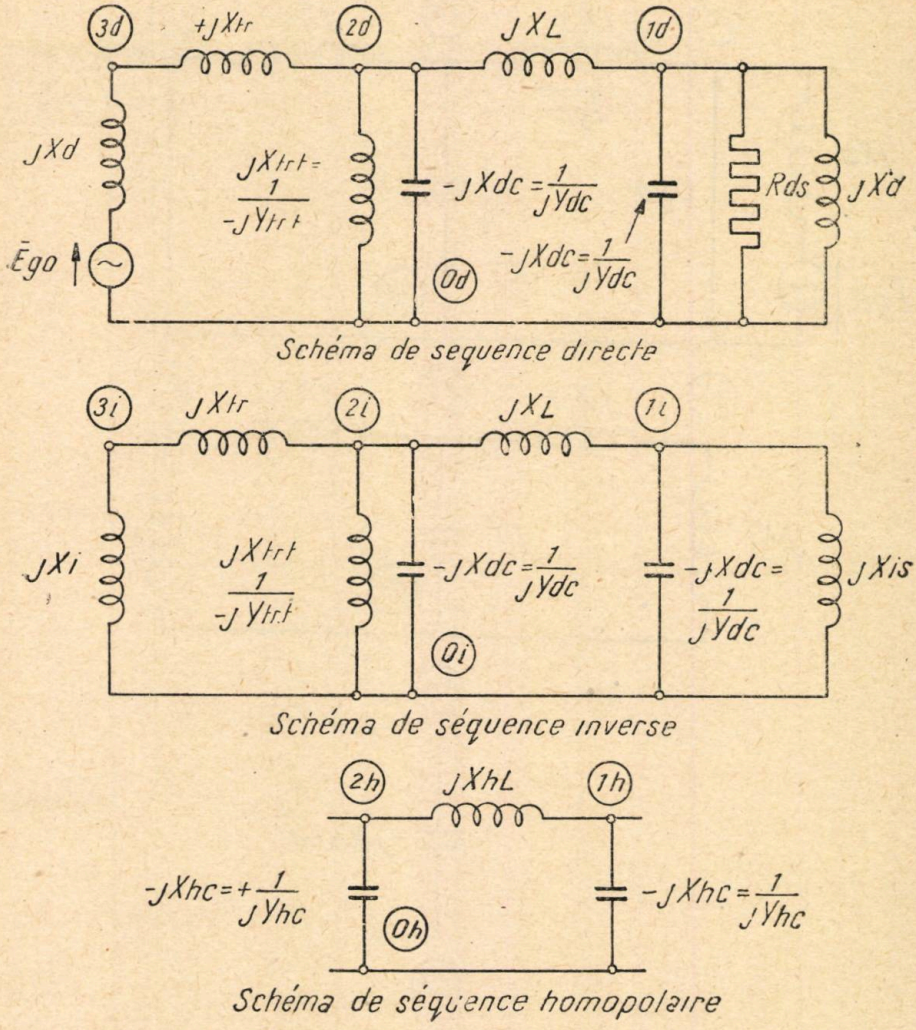

3d
+jXtr
2d
jXL
1d
jXd
Ego
jXtrt = 1 / -jYtrt
-jXdc = 1 / jYdc
Od
-jXdc = 1 / jYdc
Rds
jXd
Schéma de sequence directe
3i
jXtr
2i
jXL
1i
jXi
jXtrt = 1 / -jYtrt
-jXdc = 1 / jYdc
Oi
-jXdc = 1 / jYdc
jXis
Schéma de séquence inverse
2h
jXhL
1h
-jXhc = + 1 / jYhc
Oh
-jXhc = 1 / jYhc
Schéma de séquence homopolaire

Fig. 6.

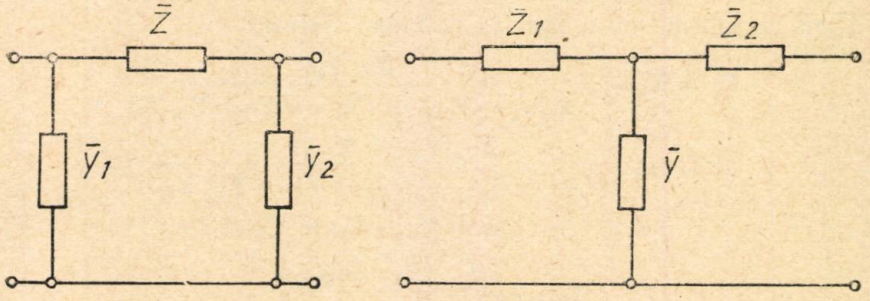

Z
Y1
Y2
Z1
Z2
Y

Fig. 7.

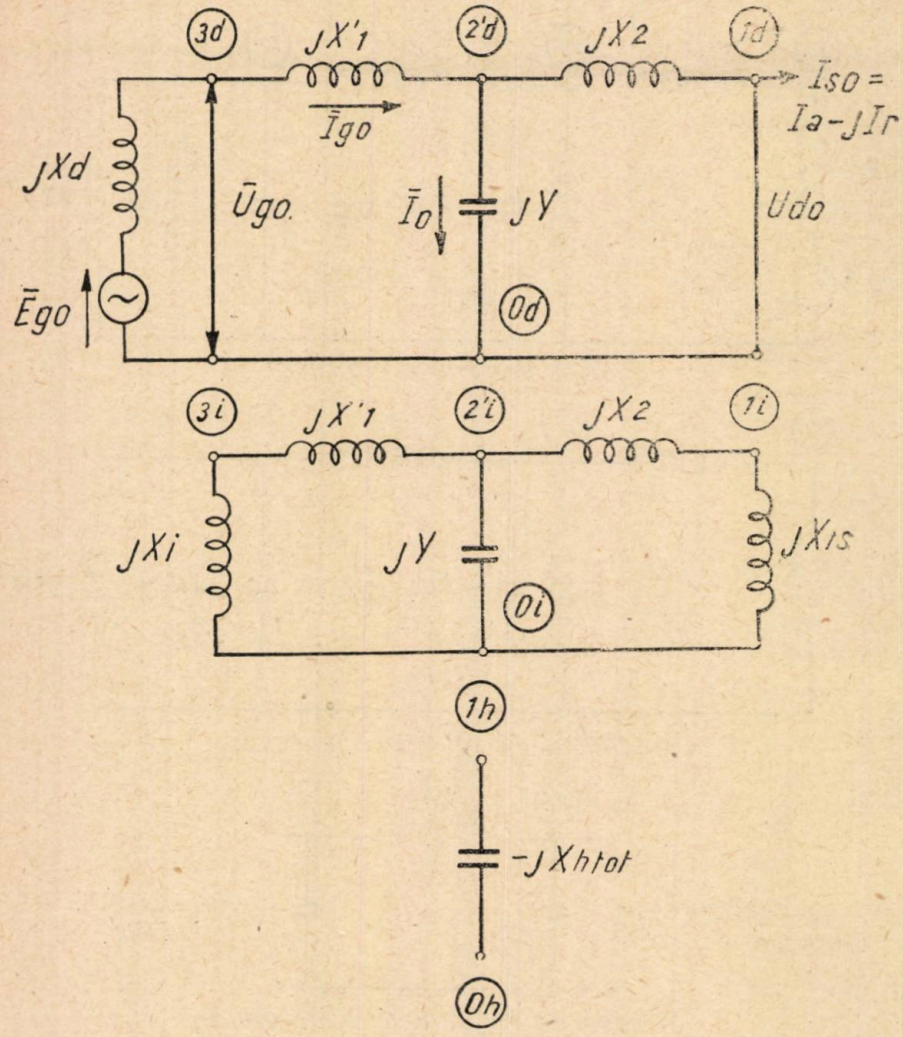


Fig 8.

Avec cette transformation la figure 6 devient la figure 8. Dans ce schéma on a fait les notations suivantes :

$$X_1' = X_{tr\cdot t} + \frac{X_L\, Y_{dc}}{2\,Y_{dc} - Y_{tr\cdot t} - (Y_{dc} - Y_{tr\cdot t})\, Y_{dc}\, X_L} \tag{21}$$

$$X_2 = \frac{X_L\,(Y_{dc} - Y_{tr\cdot t})}{2\,Y_{dc} - Y_{tr\cdot t} - (Y_{dc} - Y_{tr\cdot t})\; Y_{dc}\, X_L} \tag{22}$$

$$Y = 2\,Y_{dc} - Y_{tr\cdot t} - Y_{dc}\,(Y_{dc} - Y_{tr\cdot t})\, X_L \tag{23}$$

$$X_{tot\,h} = \frac{X_{hc}\,(X_{hc} - X_{hL})}{2\,X_{hc} - X_{hL}} \tag{24}$$

On a pris comme tension de référence la tension U_{do} entre les points $1d$ et O_d par rapport à cette tension le courant de la charge est écrit sous la forme $I_a - j\,I_r$.

Après l'apparition du défaut le schéma du réseau devient celui indiqué par la figure 9.

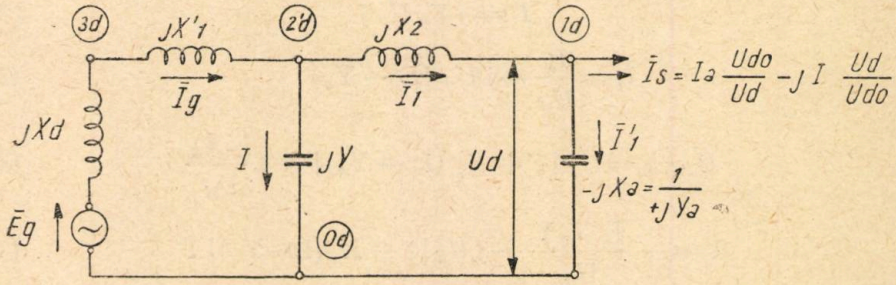


Fig. 9.

Dans cette figure la réactance X_a représente la réactance du schéma homopolaire connecté en série avec le schéma inverse c'est-à-dire :

$$X_a = X_{h\,tot} - X_{i\,tot} \tag{25}$$

où $X_{i\,tot}$ représente la réactance équivalente du schéma de séquence inverse indiqué par la fig. 8.

Dans ce qui suit on va utiliser les *valeurs rapportées.*

Comme valeurs fondamentales on choisit pour la puissance la puissance apparente nominale du générateur (S_n) et pour la tension, la tension nominale (U_n) de ce dernier. Les valeurs fondamentales pour les autres grandeurs peuvent être déduites de ces deux valeurs fondamentales.

On suppose que la tension au consommateur (au point 1) avant l'apparition du défaut est égale à la tension nominale c'est -à-dire :

$$U_{do} = 1 \tag{26}$$

Pour la situation précédent le défaut (voir fig. 8) sont valables les relations suivantes :

$$\overline{U}_{2'd-0} = (1 + X_2\,I_r) + j\;X_2\,I_a \tag{27}$$

$$\overline{I}_o = -\,I_a\,X_2\,Y + j\,Y\,(1 + X_2\,I_r) \tag{28}$$

$$\overline{I}_{go} = I_a\,(1 - X_2\,Y) - j\,[I_r(1 - X_2\,Y) - Y] \tag{29}$$

$$\overline{U}_{go} = (1 - X'_1\,Y) + I_r\,(X'_1 + X_2 - X'_1\,X_2\,Y) + j\,I_a\,(X'_1 + X_2 - X'_1\,X_2\,Y) \tag{30}$$

$$\overline{E}_{go} = 1 - X'_1\,Y - X_d\,Y + I_r\,[(X'_1 + X_2 - X'_1\,X_2\,Y) + X_d\,(1 - X_2\,Y)] + \\ + j\,[(X'_1 + X_2 - X'_1\,X_2\,Y) + X_d\,(1 - X_2\,Y)]\,I_a \tag{31}$$

Pour la situation d'après le défaut (schéma de la fig 9) dans laquelle U_d est pour le moment inconnu on obtient les relations suivantes (U_d est prise comme origine de phase) :

$$\bar{I}_s = \frac{I_a}{U_d} - j\, I_r\, U_d \tag{32}$$

$$\bar{I}' = j\, Y_a\, U_d \tag{33}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{I_a}{U_d} - j\, U_d\, (I_r - Y_a) \tag{34}$$

$$\bar{U}_{2'd-0} = \bar{U}_d\, [1 + X_2\, (I_r - Y_a)] + j \frac{I_a\, X_2}{U_d} \tag{35}$$

$$\bar{I} = -\frac{I_a\, X_2\, Y}{U_d} + j\, U_d\, [1 + X_2\, (I_r - Y_a)]\, Y \tag{36}$$

$$\bar{I}_g = (1 - Y X_2) \frac{I_a}{U_d} - j\, U_d\, [(I_r - Y_a)\, (1 - Y X_2) - Y] \tag{37}$$

$$\bar{U}_g = U_d [(1 - Y\, X_1') + (X_1' + X_2 - X_1'\, X_2\, Y)\, (I_r - Y_a)] + j\, (X_1' + X_2 - X_1'\, X_2\, Y) \frac{I_a}{U_d} \tag{38}$$

$$\bar{E}_g = U_d \{1 - Y\, X_1' - Y X_d + [X_1' + X_2 - X_1'\, X_2\, Y + X_d\, (1 - X_2\, Y)] \times (I_r - Y_a)\} + j [X_1' + X_2 - X_1'\, X_2\, Y + X_d\, (1 - X_2\, Y)] \frac{I_a}{U_d} \tag{39}$$

On fait les notations suivantes :

$$A_I = 1 - Y\, X_2 \tag{40}$$

$$B_I = Y \tag{41}$$

$$A_u = X_1' + X_2 - X_1'\, X_2\, Y \tag{42}$$

$$B_u = 1 - Y\, X_1' \tag{43}$$

$$A_E = (X_1' + X_2 - X_1'\, X_2\, Y) + X_d\, (1 - X_2\, Y) = A_u + X_d\, A_I \tag{44}$$

$$B_E = (1 - Y\, X_1') - X_d\, Y = B_u - X_d\, B_I \tag{45}$$

Avec ces notations les relations (30), (31), (38) et (39) deviennent :

$$\bar{U}_{go} = B_u + A_u\, I_r + j\, A_u\, I_a \tag{46}$$

$$\bar{E}_{go} = B_E + A_E\, I_r + j\, A_E\, I_a \tag{47}$$

$$\bar{U}_g = U_d\, [B_u + A_u\, (I_r - Y_a)] + j \frac{A_u\, I_a}{U_d} \tag{48}$$

$$\bar{E}_g = U_d\, [B_E + A_E\, (I_r - Y_a)] + j \frac{A_E\, I_a}{U_d} \tag{49}$$

Pour déterminer le régime qui s'établit après le défaut il faut connaître la tension inconnue U_d.

Pour déterminer cette tension il faut écrire une équation supplémentaire.

Au cas où l'on ne tient pas compte de l'influence des régulateurs de tension cette équation supplémentaire s'obtient en écrivant l'égalité des forces électromotrices avant et après l'apparition du défaut (ainsi que l'on a vu dans le chapitre précédent). Cette équation est :

$$|\overline{E}_{go}| = |\overline{E}_g| \tag{50}$$

En substituant les valeurs de E_{go} et E_g par les expresions (47) et (49) on obtient l'équation :

$$U_d^4[B_E + A_E(I_r - Y_a)]^2 - U_d^2[(B_E + A_E I_r)^2 + A_E^2 I_a^2] + A_E^2 I_u^2 = 0. \tag{51}$$

Cette équation est l'expréssion sous une autre forme de la relation (4).

Au cas où l'on tient compte de l'influence des régulateurs de tension l'équation supplémentaire que l'on doit écrire s'obtient en exprimant que la tension aux bornes du générateur entre lesquelles est branché le régulateur de tension garde la même valeur avant et après l'apparition du défaut.

Pour pouvoir écrire cette équation on doit trouver les expressions des tensions entre les bornes du générateur.

L'expression (*48*) peut être écrite :

$$\overline{U}_g = \overline{U}_{gd} = U_{gA} + j\,U_{gR} \tag{52}$$

où

$$U_{gA} = U_d\,[B_u + A_u\,(I_r - Y_a)] \tag{53}$$

$$U_{gR} = \frac{A_u\,I_a}{U_d}\,. \tag{54}$$

bornes du générateur.

Dans ces formules U_{gd} représente la tension de séquence directe aux

La tension inverse aux bornes du générateur est, conformément aux schémas des fig. 8 et 9 :

$$\overline{U}_{gi} = U_d\,\alpha. \tag{55}$$

Les tensions par phase du générateur sont :

$$\overline{U}_{ga} = \overline{U}_{gd} + \overline{U}_{gi} \tag{56}$$

$$\overline{U}_{gb} = a^2\,\overline{U}_{gd} + a\,\overline{U}_{gi} \tag{57}$$

$$\overline{U}_{gc} = a\,\overline{U}_{gd} + a^2\,\overline{U}_{gi} \tag{58}$$

$$\overline{V}_{g\,ab} = \overline{U}_{ga} - \overline{U}_{gb} = (1 - a^2)\,\overline{U}_{gd} + (1 - a)\,\overline{U}_{gi} =$$

$$= (1 - a)\,[(1 + a)\,\overline{U}_{gd} + \overline{U}_{gi}] =$$

$$= (1 - a)\left[\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(U_{gA} + j\,U_{gR}) + \overline{U}_{gi}\right] =$$

$$= (1 - a)\left[\left(\frac{U_{gA}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,U_{gR} + U_{gi}\right) + j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,U_{gA} + \frac{1}{2}\,U_{gR}\right)\right] \tag{59}$$

$$\overline{V}_{g\,bc} = (a^2 - a)(\overline{U}_{gd} - \overline{U}_{gi}) = (a^2 - a)\,[(U_{gA} - U_{gi}) + j\,U_{gR}] \quad (60)$$

$$\overline{V}_{g\,ca} = (a - 1)\,\overline{U}_{gd} + (a^2 - 1)\,\overline{U}_{gi} = (a - 1)\,[\overline{U}_{gd} + (1 + a)\,\overline{U}_{gi}] =$$

$$= (a - 1)\left[U_{gA} + \frac{1}{2}U_{gi} + j\left(U_{gR} + \frac{\sqrt{3}}{2}U_{gi}\right)\right]. \quad (61)$$

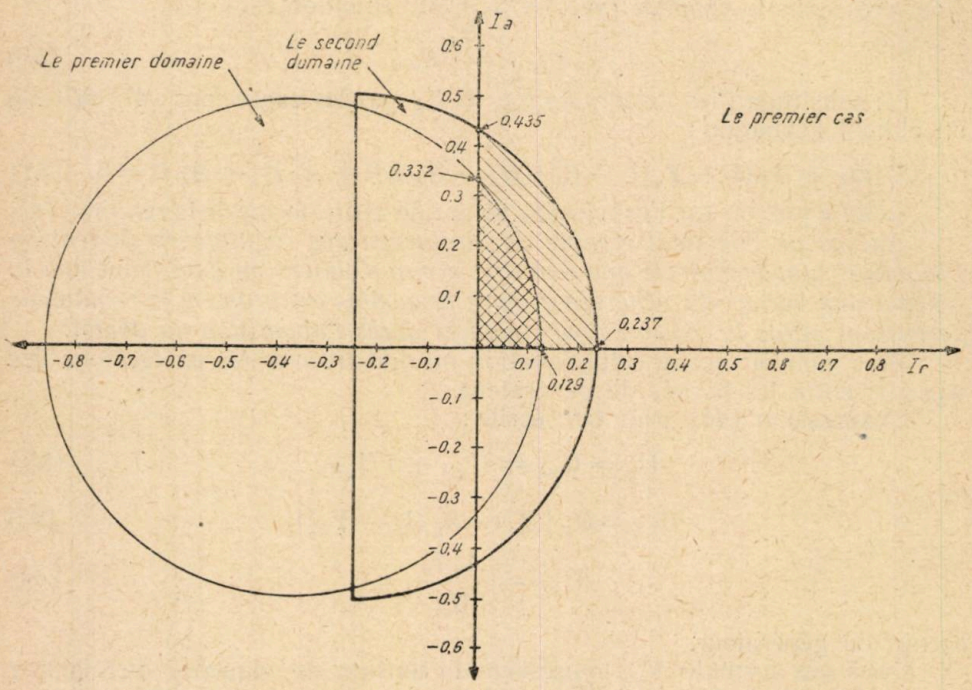


Fig. 10.

Les modules des tensions entre les bornes du générateur ont les valeurs :

$$V_{g\,ab} = \sqrt{3}\sqrt{U_{gA}^2 + U_{gR}^2 + U_{gi}\,(U_{gi} + U_{gA} - \sqrt{3}\,U_{gR})} \quad (62$$

$$V_{g\,bc} = \sqrt{3}\sqrt{U_{gA}^2 + U_{gR}^2 - 2\,U_{gA}\,U_{gi} + U_{gi}^2} \quad (63)$$

$$V_{g\,ca} = \sqrt{3}\sqrt{U_{gA}^2 + U_{gR}^2 + U_{gi}\,(U_{gi} + U_{gA} + \sqrt{3}\,U_{gR})} \quad (64)$$

En examinant les relations (62), (63) et (64) on voit que :

$$V_{g\,ca} > V_{g\,ab} > V_{g\,bc}$$

La plus petite de ces tensions est donc la tension entre les phases b et c. Il en résulte que, au cas ou le régulateur de tension est branché entre les phase *b* et *c*, son effet est réduit au minimum parceque la tension qui agit sur lui a la valeur la plus réduite.

Dans ce qui suit, on va prendre en considération ce dernier cas qui est le plus défavorable du point de vue des surtensions.

L'équation supplémentaire nécéssaire est donc :

$$V_{go\ bc} = V_{g\ bc} \tag{65}$$

ou :

$$(U_{gA} - U_{gi})^2 + U_{gR}^2 = U_{go}^2 \tag{66}$$

En tenant compte des relations (46), (53), (54) et (55) l'équation (66) devient :

$$U_d^4[B_u + A_u(I_r - Y_a) - \alpha]^2 - U_d^2[(B_u + A_u I_r)^2 + A_u^2 I_a^2] + A_u^2 I_a^2 = 0. \tag{67}$$

Cette équation est celle à l'aide de laquelle on détérmine la valeur de U_d *dans l'hypothèse de l'existence des régulateurs de tension.*

La tension entre les phases „saines" et la terre à l'endroit du défaut est donnée par les formules (12) et (16) dans lequelles U_d représente une solution de l'équation (67).

III. *L'effet du champ de réglage limité du régulateur.*

Pour maintenir la tension constante aux bornes du générateur le régulateur doit réduire la force électromotrice de ce dernier. Mais le champ d'action du régulateur est limité et il ne peut pas réduire la force électromotrice du générateur au-dessous d'une certaine limite $E_{g\ min}$. En général $E_{g\ min} = 1$ et c'est ce qu'on va supposer ici.

Au cas où, pour maintenir constante la tension aux bornes le régulateur doit réduire la force électromotrice du générateur au dessous de la valeur $E_{g\ min}$, *il ne peut plus régler la tension aux bornes du générateur et ce dernier fonctionne avec une f.e.m. constante et égale à* $E_{g\ min} = 1$.

Le domaine de fonctionnement du générateur dans ces conditions, (lorsque le régulateur a atteint la limite de son champ d'action) sera appellé *domaine avec le réglage à la limite.*

On voit aisément que pour atteindre ce domaine on doit réduire les valeurs de I_a et I_r au dessous de certaines limites.

On peut distinguer deux domaines de cette sorte :

a) *Le domaine avec le réglage à la limite dans le fonctionnement normal.*

b) *Le domaine avec le réglage à la limite dans le fonctionnement avec une phase mise à la terre.*

a) *Le domaine avec le réglage à la limite dans le fonctionnement normal* est défini comme étant le domaine de variation de I_a şi I_r dans lequel la tension électromotrice du générateur, en fonctionnement normal, garde la valeur minimum $E_{g\ min} = 1$.

Dans ce qui suit on va appeler ce domaine *le premier domaine.*

Dans le plan I_a, I_r ce domaine représente une surface limité par un contour formé. Au long de ce contour la f.e.m. du générateur a une valeur constante égale a $E_{g\ min} = 1$ et en même temps la tension au consommateur est maintenue égale à la tension nominale ($U_d = 1$).

L'équation du contour qui limite ce premier domaine se déduit de l'equation (47) dans laquelle on remplace E_{go} par l'unité.

On déduit :

$$I_a^2 + \left(I_r + \frac{B_E}{A_E} \right)^2 = \frac{1}{A_E^2} \tag{68}$$

L'équation (68) représente un cercle dont le centre a les coordonées :

$$I_{ao} = 0 \tag{69}$$

$$I_{ro} = -\frac{B_E}{A_E} \tag{70}$$

et dont le rayon a la valeur :

$$R_o = \frac{1}{A_E}. \tag{71}$$

Pour :

$$I_a = 0 \tag{72}$$

les points à l'intérieur du domaine satisfont à l'inégalité :

$$I_r < \frac{1 - B_E}{A_E} \tag{73}$$

de même que pour :

$$I_r = 0 \tag{74}$$

ils satisfont a l'inégalité :

$$I_a < \frac{\sqrt{1 - B_E^2}}{A_E} \tag{75}$$

Dans ce domaine la tension au consommateur ne reste plus égale a la tension nominale, mais devient plus grande et sa valeur s'obtient de l'équation :

$$U_d^4 [B_E + A_E I_r]^2 \quad U_d^2 + A_E^2 I_a^2 = 0. \tag{76}$$

Cette équation s'obtient en partant de la relation (49) dans laquelle on annule Y_a et on fait $E_g = 1$.

b) *Le domaine avec le réglage à la limite en fonctionnent avec une phase mise à la terre* est défini comme étant le domaine de variation de I_a et I_r dans lequel la force électromotrice du générateur en fonctionnement avec une phase mise à la terre garde la valeur minimum $E_{g\ min} = 1$.

Dans ce qui suit on va appeller ce domaine *le second domaine*. Ainsi que dans le cas précédent ce domaine représente dans le plan I_a, I_r une surface limité par un contour formé. Au long de ce contour la f.é.m. a la valeur $E_{g\ min} = 1$.

L'équation du contour qui limite ce domaine s'obtient en éliminant U_d entre les deux équations suivantes :

$$U_d^4 [B_E + A_E (I_r - Y_a)]^2 - U_d^2 + A_E^2 I_a^2 = 0 \tag{77}$$

$$U_d^4 [B_u + A_u (I_r - Y_a) - \alpha]^2 - U_d^2 [(B_u + A_u I_r)^2 + A_u^2 I_a^2] + A_u^2 I_a^2 = 0. \tag{78}$$

On obtient une équation du huitième degré en I_a et I_r. En tenant compte que A_u a en général des valeurs voisines de zéro et que B_u a des valeurs voisines de l'unité on obtient d'une manière aproximative :

$$U_d = \frac{1}{1-\alpha} \tag{79}$$

En remplaçant la valeur U_d déduite de l'équation (79) dans la relation (77) on obtient :

$$\frac{\left(I_r + \frac{B_E}{A_E} - Y_a\right)^2}{\left[\frac{(1-\alpha)}{A_E}\right]^2} + \frac{I_a^2}{\left[\frac{1}{(1-\alpha)\,A_E}\right]^2} = 1 \tag{80}$$

Cette équation représente une élipse dans le plan I_a, I_r. Le centre de l'élipse a les coordonées :

$$I_{ao} = 0 \tag{81}$$

$$I_{ro} = Y_a - \frac{B_E}{A_E} \tag{82}$$

La grande demiaxe (au long de l'axe I_a) a la valeur :

$$a = \frac{1}{(1-\alpha)\,A_E} \tag{83}$$

et la petite demiaxe (au long de l'axe I_r) a la valeur :

$$b = \frac{1-\alpha}{A_E} \tag{84}$$

Pour :

$$I_a = 0 \tag{85}$$

les points a l'intérieur du domaine satisfont à l'inégalité :

$$I_r < \frac{1-\alpha}{A_E} + Y_a - \frac{B_E}{A_E} \tag{86}$$

et pour:

$$I_r = 0 \tag{87}$$

ces points satisfont à l'inégalité :

$$I_a < \frac{1}{(1-\alpha)^2} \sqrt{\left(\frac{1-\alpha}{A_E}\right)^2 - \left(\frac{B_E}{A_E} - Y_a\right)^2} \tag{88}$$

IV. *L'analyse des surtensions dans les domaines avec le réglage à la limite.*

a) *Dans le premier domaine* la tension au consommateur est donné par l'équation (76) et a la valeur :

$$U_d = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\,A_E^2 I_a^2\,(B_E + A_E I_r)}}{2\,(B_E + A_E I_r)^2}} \tag{89}$$

La valeur maximum que cette tension peut atteindre a lieu pour la marche à vide ($I_a = I_r = 0$).

On obtient :

$$U_{d\ max} = \frac{1}{B_E} \tag{90}$$

La tension entre les bornes du générateur rapportée à la tension nominale entre phases devient, d'après les relations (48) et (49) égale à :

$$(U_g)_{max} = \frac{B_u}{B_E} \tag{91}$$

b) *Dans le second domaine* la tension entre une phase „saine" et la terre, au consommateur, rapportée à la tension nominale entre phases est donnée par les équations (16) et (77) et a la valeur :

$$\frac{V_{ab}}{\sqrt{3}} = \sqrt{1 + K + K^2}\ \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\,A_E^2 I_a^2 [B_E + A_E (I_r - Y_a)]^2}}{2\,[B_E + A_E (I_r - Y_a)]^2}} \tag{92}$$

La valeur maximum de cette tension a lieu pour la marche à vide ($I_a = I_r = 0$).

On obtient :

$$\frac{V_{ab}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1 + K + K^2}}{B_E - A_E Y_a} \tag{93}$$

La tension entre les phases b et c du générateur rapportée a la tension nominale entre phases devient [tenant compte des équations (52), (53), (54), (55) et (63)] :

$$\left(\frac{V_{bc\ gen}}{\sqrt{3}}\right)_{max} = \frac{B_u - A_u Y_a - a}{B_E - A_E Y_a} \tag{94}$$

L'exploitation du système à l'intérieur du premier domaine n'est pas récommandable pour les raisons suivantes :

a. Une telle exploitation implique le fonctionnement du générateur sans réglage de tension, chose inacceptable dans l'actuelle situation des systèmes électriques modernes.

b. Une telle exploitation implique pour le générateur (et pour la machine primaire qui l'entraîne) des charges trop faibles, charges pour lesquelles la machine a un rendement réduit.

On peut affirmer que la région la plus probable pour le fonctionnement du système est à l'extérieur du premier domaine.

Le fonctionnement à l'intérieur du premier domaine n'est pas impossible, mais ce n'est pas un fonctionnement technique et la probabilité de sa réalisation est très réduite.

Par conséquent, les plus grandes surtensions qui peuvent apparaître pendant un fonctionnement avec une phase mise à la terre ont lieu le long du contour qui limite le premier domaine.

La valeur de ces surtensions se déduit des relations (68) et (92) ; elle est :

$$\frac{V_{ab}}{\sqrt{3}} = \sqrt{1+K+K^2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4[1-(B_E+A_E I_r)^2]\,[(B_E+A_E I_r)\;\;A_E Y_a]^2}}{2\,[(B_E+A_E I_r)-A_E Y_a]^2}} \quad (95)$$

On note :

$$B_E + A_E I_r = X$$

On obtient :

$$\frac{V_{ab}}{\sqrt{3}} = \sqrt{1+K+K^2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1\quad 4\,(1-X^2)\,(X-A_E Y_a)^2}}{2\,(X-A_E Y_a)^2}} \quad (96)$$

Le domaine de variation de X est compris entre :

$$X_{min} = B_E\,(I_r = 0) \quad (97)$$

$$X_{max} = 1\left(I_r = \frac{1-B_E}{A_E}\right) \quad (98)$$

Dans tout ce domaine la fonction définie par l'équation (96) décroit lorque X croit ; le maximum de cette fonction a donc lieu pour $X = B_E\,(I_r = 0)$.

On obtient :

$$\left(\frac{V_{ab}}{\sqrt{3}}\right)_{max} = \sqrt{1+K+K^2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4\,(1-B_E^2)(B_E-A_E Y_a)^2}}{2\,(B_E-A_E Y_a)^2}} \quad (99)$$

La valeur minimum de ces surtensions au long du contour du premier domaine a lieu pour $X = 1\left(I_a = 0\,;\; I_r = \frac{1-B_E}{A_E}\right)$.

Cette valeur est :

$$\left(\frac{V_{ab}}{\sqrt{3}}\right)_{min} = \frac{\sqrt{1+K+K^2}}{1-A_E Y_a}. \quad (100)$$

On a démontré donc que les valeurs maxima des surtension qui peuvent apparaître dans une éxploitation normale sont données par les formules (99) et (100) ; elles ont lieu au long du contour du premier domaine.

Mais il y a la possibilité du fonctionnement du réseau à l'intérieur du premier domaine. Cette possibilité apparaît au moment d'une avarie, lorsqu'il se produit un déclanchement de la charge. C'est le cas le plus dangereux du point de vue des surtensions.

Au cas où le déclanchement de la charge n'est pas accompagné d'un autre défaut, le fonctionnement continue a être symetrique ; la tension au consommateur est donnée par la formule (90) et la tension aux bornes du générateur est donnée par la formule (91).

Au cas où le déclanchement de la charge est accompagné d'une mise à la terre d'une phase la tension entre une phase „saine" et la terre rapportée à la tension nominale entre phases est donnée par la formule (93) et la tension entre les phases b et c du générateur (phases entre lequelles on suppose le régulateur branché) est donné par la formule (94).

Dans ce qui suit on va calculer les surtensions „prolongées" qui peuvent apparaître dans les différentes situations de fonctionnement envisagées plus haut. Les calcules ont été faits dans le cas des réseaux ayant des caractéristiques électriques défavorables au point de vue des surtensions.

V. *Calcul numérique des surtensions „prolongées" en tenant compte des effets des régulateurs de tension*

On va examiner quatre cas. Dans tous ces cas, le schéma pris en considération est celui représenté dans la figure 5.

Les premiers trois cas sont les mêmes que les cas 1, 3 et 6 de [2]. Il représentent des cas limite qui peuvent apparaître difficilement dans la pratique.

Les caractéristiques du générateur, du transformateur et de la ligne électrique sont indiquées dans le tableau 1.

Dans ce tableau, à l'exception des mentions contraires, les réactances (et admitances) sont rapportées a la réactance (respectivement admitance) fondamentale ; celle-ci résulte du choix de la tension nominale du générateur comme tension fondamentale et de la puissance nominale de celle-ci comme puissance fondamentale.

Les notations employées dans ce tableau sont celles des schémas 6, 7, 8 et 9.

Tableau 1

	Le nombre du cas	1	2	3	4
Générateur	S_N (MVA) Puissance nominale	30	5	15	15
	V_N (kV) Tension nominale entre phases	6,3	6,3	6,3	6,3
	$Z_n = V_N^2/S_N$ (Ω)	1,323	7,938	2,646	2,646
	X_d (réactance directe)	1,800	1,800	1,800	1,800
	X_i (réactance inverse)	0,250	0,250	0,200	0,250
Transformateur	S_N (MVA) Puissance nominale	30	5	15	Il n'y a pas
	V_{1N}/V_{2N} Rapport de transformation	6,3/121	6,3/66	6,3/38,5	
	X_{tr} (réactance longitudinale)	0,140	0,140	0,140	
	$Y_{tr\cdot t}$ (admitance transversale)	0,030	0,030	0,030	
Ligne	Le type de ligne éléctrique	aérienne		souterraine	
	Nombre des circuit	1	1	2	4
	Tension nominale	110	60	35	6
	l (km) Longueur	125	60	10	4
	$X_{L\,sp}$ (Ω/km)	0,427	0,440	0,058	0,020
	$Y_{dc\cdot sp}$ (S/km)	2,670	2,597	172,7	490,0
	$X_{Lh\cdot sp}$ (Ω/km)	1,200	1,450	0,232	0,080
	$Y_{hc\cdot sp}$ (S/km)	1,870	1,696	172,7	0,080
	X_L réactance longitudinale directe	0,1094	0,0303	0,0059	0,0302
	X_{Lh} réactance longitudinale homopolaire	0,3074	0,1000	0,0235	0,1210
	Y_{dc} admitance capacitive directe	0,0814	0,0676	0,0853	0,0052
	Y_{hc} admitance capacitive homopolaire	0,0570	0,0443	0,0853	0,0026

Les caractéristiques des quadripoles en T et en π représentées dans la figure 7 sont indiquées dans le tableau 2.

Tableau 2

Le nombre du cas		1	2	3	4
Le quadripole en π	$Y_1 = Y_{dc} - Y_{tr\cdot t}$	0,0514	0,0376	0,0553	0,0052
	$Y_2 = Y_{dc}$	0,0814	0,0676	0,0853	0,0052
	X_L	0,1094	0,0303	0,0059	0,0302
Le quadripole en T	$Y = Y_1 + Y_2 - Y_1 Y_2 Z_L$	0,1223	0,1051	0,1406	0,0104
	$X_1 = \frac{Y_1 X_L}{Y}$	0,0425	0,0108	0,0028	0,0151
	$X_2 = \frac{Y_2 X_L}{Y}$	0,0673	0,0195	0,0026	0,0151

Les caractéristiques des schémas représentés dans les figures 8 et 9 ainsi que les valeurs des grandeurs K et α sont indiquées dans le tableau 3.

Dans la déduction de la valeur de $X_{i\ tot}$ intervient la réactance inverse de la charge qui a été considerée égale à 90% de la réactance directe de la charge. A cause de celà, la réactance résultante du schéma inverse $X_{i\ tot}$ est une fonction de la charge. Considérant que la charge réactive I_r peut varier entre les limites 0 et 0,6, on a détérminé une valeur maximum (pour $I_r = 0$) et une valeur minimum (pour $I_r = 0{,}6$) de la réactance $X_{i\ tot}$.

On a considéré pour $X_{i\ tot\ (med)}$ la moyenne arithmétique des deux valeurs extrêmes mentionnées plus haut. Cette approximation est justifiée par le fait que $X_{i\ tot\ (med)}$ est connecté, dans le schéma résultant, en série avec la réactance $X_{h\ tot}$ qui a une valeur beaucoup plus grande que $X_{i\ tot\ (med)}$ de sorte que la variation de $X_{i\ tot}$ de $X_{i\ tot\ (max)}$ à $X_{i\ tot\ (med)}$ entraître une variation de la réactance totale de moins de 1%.

Tableau 3

Le nombre du cas		1	2	3	4
La déduction de la valeur $X_{i\ tot\ (med)}$	$X_i' = X_1 + X_{tr}$	0,1825	0,1508	0,1423	0,0151
	$X_i + X_1'$	0,4325	0,4003	0,3923	0,2651
	$\frac{X_i + X_1'}{1 - Y(X_i + X_1')}$	0,4580	0,4175	0,4150	0,2660
	$X_2 + \frac{X_i + X_1'}{1 \quad Y(X_i + X_1')}$	0,5253	0,4370	0,4185	0,2811
	X_{is}	$\frac{0,9}{I_r}$	$\frac{0,9}{I_r}$	$\frac{0,9}{I_r}$	$\frac{0,9}{I_r}$
	$X_{i\ to}$	$\frac{0,5253}{1+0,5831\ I_r}$	$\frac{0,4370}{1+0,4851\ I_r}$	$\frac{0,4186}{1+0,4646\ I_r}$	$\frac{0,2811}{1+0,312\ I_r}$
	$X_{i\ tot\ (med)}$	0,457	0,388	0,375	0,259

Tableau 3 (suite)

Le nombre du cas		1	2	3	4
La déduction de la valeur Y_a	$\frac{Y_{hc}}{1-Y_{hc}\,X_{Lh}}$	0,0580	0,0445	0,0855	0,0026
	$Y_{h\,tot} = Y_{hc} + \frac{Y_{hc}}{1-X_{hc}\,Y_{Lh}}$	0,1150	0,0888	0,1708	0,0052
	$X_{h\,tot} = \frac{1}{Y_{h\,tot}}$	8,6956	11,2612	5,8548	192,3077
	$X_{h\,tot} - X_{i\,tot\,(med)}$	8,2386	10,8732	5,4818	192,0487
	$Y_a = \frac{1}{X_{h\,tot} - X_{i\,tot\,(med)}}$	0,1214	0,0920	0,1824	0,0052
$K = Y_a\,X_{i\,tot\,(med)}$		0,0555	0,0357	0,0680	0,0013
$\beta = X_1 / \left[X_2 + \frac{X_1 + X_1'}{1-Y(X_1+X_1')} \right]$		0,4760	0,5730	0,5970	0,8900
$\alpha = K\beta$		0,0264	0,0204	0,0406	0,0012
$\sqrt{1+K+K^2}$		1,0278	1,0178	1,0340	1,0006

Les valeurs des constantes A_I, B_I, A_u, B_u, A_E et B_E sont indiquées dans la tableau 4.

Tableau 4

Le nombre du cas	1	2	3	4
$A_I = 1 - Y\,X_2$	0,9911	0,9979	0,9995	0,9998
$B_I = Y$	0,1323	0,1051	0,1406	0,0104
$A_u = X_1' + X_2 - X_1' X_2\,Y$	0,2482	0,1672	0,1458	0,0302
$A_u = 1 - Y\,X_1'$	0,9758	0,9841	0,9800	0,9998
$A_E = A_u + X_d\,A_I$	2,0322	1,9634	1,9449	1,8298
$B_E = B_u - X_d\,B_I$	0,7377	0,7949	0,7269	0,9811

Les constantes qui détérminent les deux domaines avec le réglage à la limite sont indiquées dans le tableau 5.

Tableau 5

	Le nombre du cas		1	2	3	4
Le premier domaine (un cercle)	(Le centre du cercle $I_a = 0$) $I_r = -\frac{B_E}{A_E}$		−0,3630	−0,4050	−0,3735	−0,5370
	Le rayon du cercle $R_o = \frac{1}{A_E}$		0,4920	0,5100	0,5140	0,5470
	La limite du domaine	$I_r = \frac{1 - B_E}{A_E}$	0,1290	0,1050	0,1405	0,0100
		$I_a = \frac{\sqrt{1 - B_E^2}}{A_E}$	0,3320	0,3090	0,3530	0,0110
Le second domaine (une élipse)	(Le centre de l'élipse $I_a = 0$) $I_r = Y_a - \frac{B_E}{A_E}$		−0,2416	−0,3130	−0,1911	−0,5318
	La grande demi axe $a = \frac{1}{(1-\alpha) A_E}$		0,5050	0,5210	0,5360	0,5480
	La petite demi axe $b = \frac{1-\alpha}{A_E}$		0,4790	0,4990	0,4930	0,5490
	La limite du domaine	$I_r = \frac{1-\alpha}{A_E} + Y_a - \frac{B_E}{A_E}$	0,2374	0,1360	0,3019	0,0162
		$I_a = \frac{1}{(1-\alpha)^2}\sqrt{\left(\frac{1-\alpha}{A_E}\right)^2 - \left(\frac{B_E}{A_E} - Y_a\right)^2}$	0,4140	0,3880	0,4530	0,0120

Pour les deux premiers cas les deux domaines avec le réglage à la limite ont été représentés dans les figures 10 et 11.

Les surtensions qui apparaissent dans les différentes situation examinées sont indiquées dans le tableau 6.

Tableau 6

Le nombre du cas		1	2	3	4
Fonctionnement normal à vide (le premier domaine)	Tension au consommateur (formule 90)	1,359	1,260	1,379	1,020
	Tension au générateur (formule 91)	1,328	1,240	1,351	1,020
Fonctionnement avec une mise à la terre, à vide (le second domaine)	Tension au consommateur (formule 93)	2,090	1,660	2,778	1,030
	Tension au générateur (formule 94)	1,871	1,545	2,450	1,028
Fonctionnement le long du contour du premier domaine	$I_r = 0$ Tension au consommateur (formule 99)	1,900	1,492	2,585	1,009
	$I_a = 0$ Tension au consommateur (formule 100)	1,364	1,341	1,800	1,001

Une comparaison des valeurs obtenues pour les surtensions „prolongées" avec et sans la considération des régulateurs de tension a été faite dans le tableau 7 et dans la fig. 12.

Les valeurs sont calculées pour le troisième des cas étudiés plus haut, cas auquel les surtensions ont eu les plus grandes valeurs.

Les surtensions ont été calculées pour trois valeurs du courant actif I_a (0 ; 0,4 et 0,8) et pour six valeurs du courant reactif I_r (0 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5).

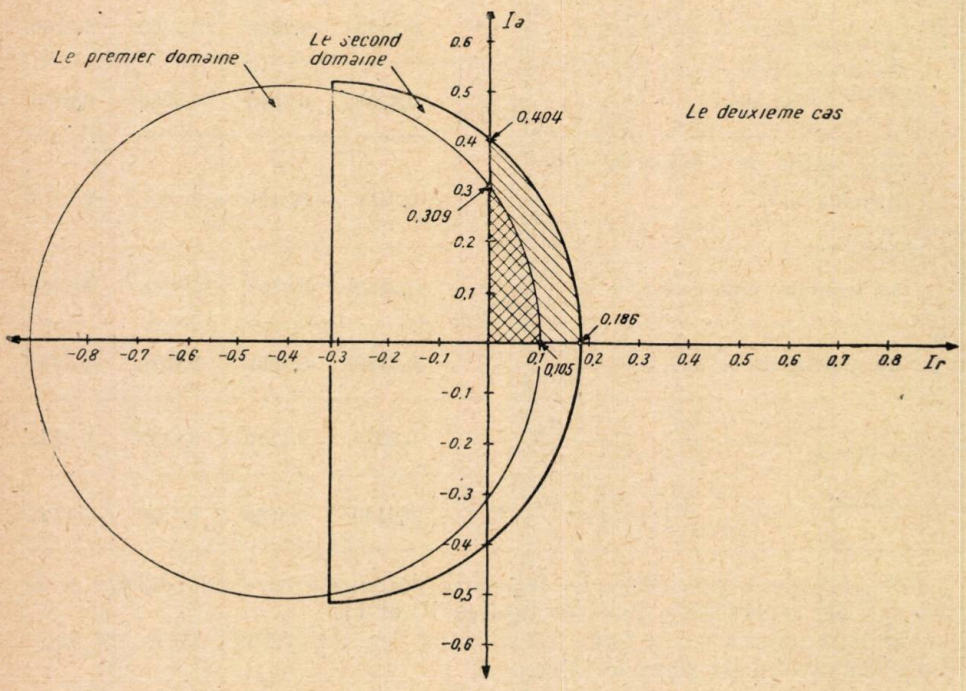


Fig 11.

Dans le tableau 7 ainsi que dans figure 12 on a fait les notations suivantes :

— I_a la composante active du courant au consommateur ;
— I_r la composante réactive du courant au consommateur ;
— I_{rg} la composante réactive du courant dans le générateur calculée par l'expression $I_r - Y$;
— $\frac{V_{ab}}{\sqrt{3}}_{(sans\ régl.)}$ la tension qui apparaît entre les phases a et b, au consommateur, au moment de la mise à terre de la phase a, rapportée à la tension nominale entre phases, dans l'hypotèse de l'inexistence du régulateurs de tension.

Cette tension a été calculé a l'aide de la formule (12) dans laquelle U_d représente la solution de l'équation (51).

— $\frac{V_{ab}}{\sqrt{3}_{(régl.)}}$ la même tension que la précédente a l'exception du fait qu'on suppose l'existence des régulateurs de tension à champ d'action illimité.

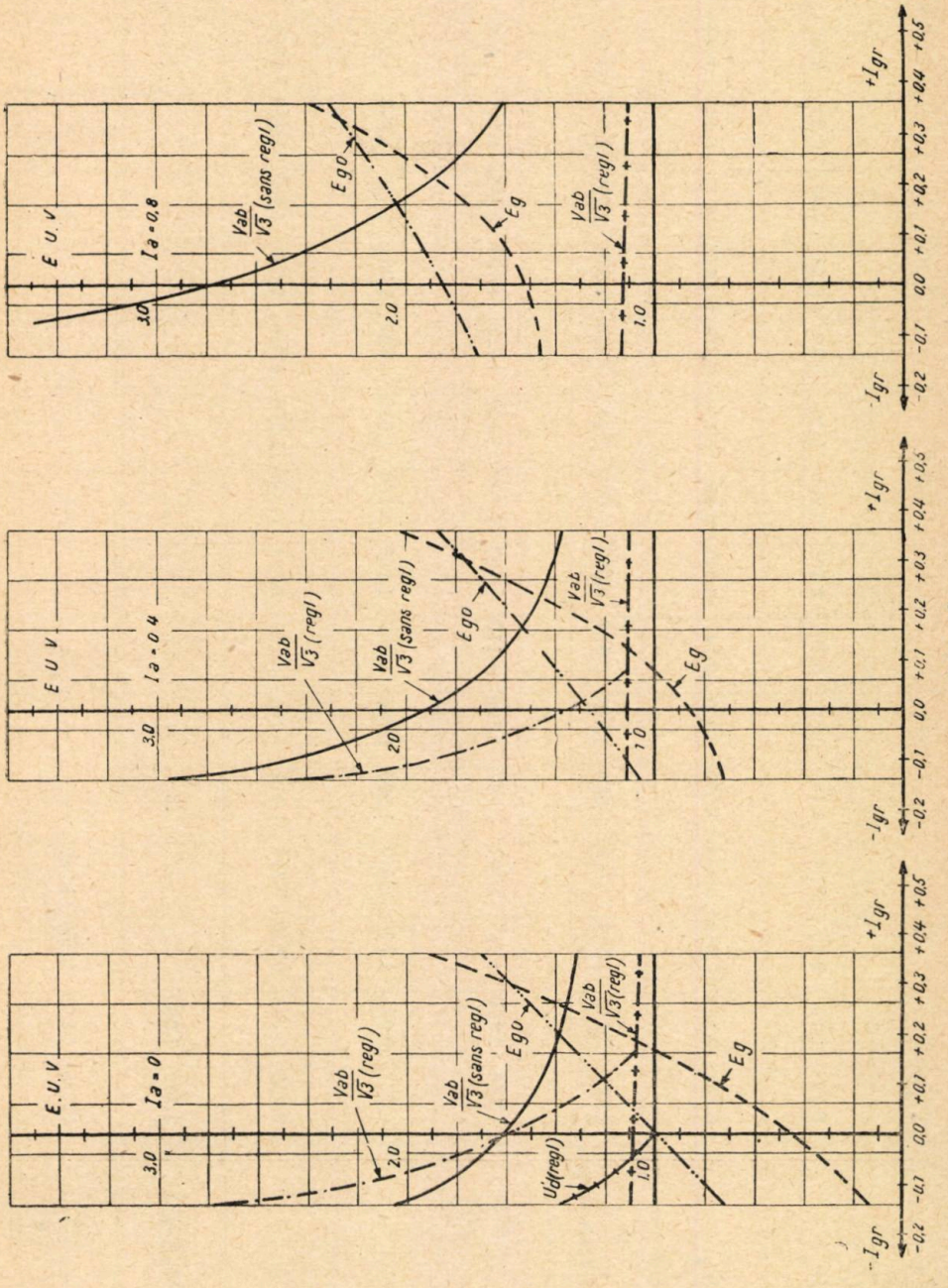


Fig. 12.

I_a	0,0						0,4						0,8					
I_r	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
I_{rg}	−0,141	−0,041	+0,059	+0,159	+0,259	+0,359	−0,141	−0,041	+0,059	+0,159	+0,259	+0,359	−0,141	−0,041	+0,059	+0,159	+0,259	+0,359
$\frac{V_{ab}}{\sqrt{3}}$ (sans régl.)	2,021	1,682	1,513	1,418	1,350	1,318	2,949	2,087	1,625	1,542	1,440	1,376	3,797	3,167	2,441	2,028	1,765	1,606
$\frac{V_{ab}}{\sqrt{3}}$ (régl.)	1,110	1,109	1,107	1,107	1,107	1,106	1,113	1,108	1,108	1,107	1,106	1,105	1,132	1,111	1,110	1,108	1,107	1,103
E_{go}	0,727	0,921	1,116	1,310	1,505	1,700	1,063	1,205	1,360	1,525	1,694	1,864	1,717	1,808	1,914	2,031	2,160	2,306
E_g	0,148	0,344	0,620	0,966	1,419	1,901	0,716	0,804	0,955	1,220	1,510	2,638	1,465	1,489	1,576	1,750	2,029	2,395
U'_d (régl).	1,379	1,086	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$\frac{V'_{ab}}{\sqrt{3}}$ (régl.)	2,778	1,826	1,259	1,082	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

— E_{go} la f.é.m. du générateur nécessaire au fonctionement normal pour maintenir au consommateur la tension nominale (U = 1).
Cette f.é.m. a été calculée a l'aide de la formule (47).

— E_g la f.é.m. du générateur en cas d'une mise à la terre en considérant l'existance d'un régulateur de tension à champ d'action illimité.
Cete f.e.m. se déduit de l'équation (49) dans laquelle U_d est une solution de l'équation (67) ;

— $U'_{d\ (régl.)}$ la tension qu'on obtient au consommateur en fonctionnement normal avec régulateur de tension, mais dans le premier domaine (E = 1). Cette tension a été calculée à l'aide de la formule (89) et elle a été déduite et représentée seulement a l'intérieur du premier domaine ;

— $\frac{V'_{ab}}{\sqrt{3}\ (régl.)}$ la tension au consommateur, entre les phases a et b dans l'hypotèse de la mise à la terre de la phase a en supposant le fonctionnement avec réglage de tension, mais dans le deuxième domaine (E = 1). Cette tension a été calculée à l'aide de la formule (93).

VI. *Conclusions sur l'influence des régulateurs de tension sur les surtensions „prolongées"*

Des précédentes considération on peut tirer les conclusions suivantes :
Dans le fonctionnement normal on distingue deux cas :

a) *Fonctionnement en dehors du premier domaine.* Dans cette région le régulateur de tension est éfficace et la tension peut être maintenue au consommateur dans les limites désirées.

b) *Fonctionnemnet au dedans du premier domaine.* A l'intérieur de ce domaine le régulateur de tension n'est pas éfficace. Le fonctionnement dans ce domaine est peu probable, ainsi qu'on l-a montré plus haut.

La marche à vide — point a l'intérieur de ce domaine — est quand même possible. Le cas peut survenir à l'occasion d'un déclanchement d'avarie de la charge. Les surtensions qui peuvent apparaître dans ce cas (pour les réseaux examinés dans ce qui précède) peuvent atteindre 1,3—1,4 fois la valeur de la tension nominale.

Dans le fonctionnement avec une phase mise à la terre, on distingue trois cas :

a) *Fonctionnement en dehors du premier et du second domaine.* Dans cette région, le régulateur agit d'une manière éfficace et la tension peut être maintenue pratiquement constante au consommateur, avec des variations d'environ 10 %.

Le fonctionnement dans cette région représente le cas le plus probable dans la pratique.

Le fonctionnement dans cette région, sans prendre en considération l'existance des régulateurs de tension, conduit à des surtensions d'environ 2—3 fois la valeur de la tension nominale. Ces surtensions se ré-

duisent, par la prise en considération de l'existence des régulateurs a environ 1,1 fois la valeur de la tension nominale.

b) *Le fonctionnement a l'intérieur du second domaine et en dehors du premier.* Ce fonctionnement est possible et a l'intérieur de cette région peuvent apparaître des surtensions qui sont d'autant plus élevées qu'on est plus rapproché du contour du premier domaine. Le long de ce contour les surtensions peuvent atteindre (dans les cas étudiés) des valeur d'environ 2 fois la valeur de la tension nominale.

c) *Fonctionnement à l'intérieur du premier domaine.* Pour ce fonctionnemment sont valables les observations faites plus haut à l'exception du fait que les surtensions qui peuvent apparaître dans la marche à vide peuvent atteindre des valeurs beaucoup plus élevées (dans les cas étudiés environ 2,8 fois la tension nominale).

DEUXIEME PARTIE

L'INFLUENCE DE LA SATURATION DANS LE FER DES TRANSFORMATEURS SUR LES SURTENSIONS PROLONGÉES

I. *La dépendance réelle entre le courant de magnetisation et la tension aux bornes d'un transformateur*

Les valeurs élevées obtenues pour les surtensions aux bornes du générateur et du transformateur provoquent une forte saturation du fer du transformateur. *La dépendence, supposée linéaire, entre le courant de magnetisation et la tension aux bornes du transformateur n'est plus réelle.*

La puissance réactive absorbé pour la magnétisation du noyau de fer du transformateur croit d'une façon beaucoup plus accentuée que dans l'hypothèse de la dépendance linéaire.

Il s'ensuit une diminution finale de la tension.

Comme les valeurs les plus élevées des surtensions ont été obtenues dans la marche à vide on va analyser ce que deviennent les surtensions dans ce cas, en prenant pour la dépendance entre le courant de magnétisation et la tension une fonction plus proche de la réalité.

La fonction est de la forme :

$$I = Y_{(v)}\, U^v \tag{101}$$

ou v este une fonction de U que l'on va determiner par expérience.

La puissance réactive absorbée pour la magnétisation devient :

$$Q = IU = Y_{(v)}\, U^{(v+1)} \tag{102}$$

Pour la tension nominale ($U = 1$) cette puissance a la valeur Q_o :

$$Q_o = Y_{(v)} \tag{103}$$

La puissance réactive absorbée sous une tension U rapportée a la puissance réactive Q_o est égale à :

$$q = \frac{Q}{Q_o} = U^{(v+1)} \tag{104}$$

On en déduit la valeur de v :

$$v = \frac{\log q}{\log U} - 1 \tag{105}$$

Pour déterminer la fonction v on va utiliser les données des tôles pour transformateurs de fabrication soviétique /9/.

Les valeurs employées sont indiquées dans le tableau 8. Il a été construit en considérant comme induction magnétique nominale B dans le noyau de fer la valeur 1,4 Wb/m².

Tableau 8

B (Wb/m²)	1,00	1,06	1,12	1,18	1,24	1,30	1,36	1,42	1,48
Tension rélative U	0,714	0,756	0,800	0,843	0,886	0,928	0,972	1,014	1,058
Puissance rélative q	0,181	0,22	0,272	0,352	0,456	0,596	0,854	1,108	1,500
log U	—0,1463	—0,1215	—0,0969	—0,0742	—0,0526	—0,0325	—0,0123	+0,0060	+0,0245
log q	—0,7423	—0,657 6	—0,5654	—0,4535	—0,3410	—0,2247	—0,0685	+0,0445	+0,1761
v	4,07	4,70	4,84	5,10	5,48	5,91	4,57	6,41	6,19

La variation de v en fonction de U est représenté dans la figure 13.

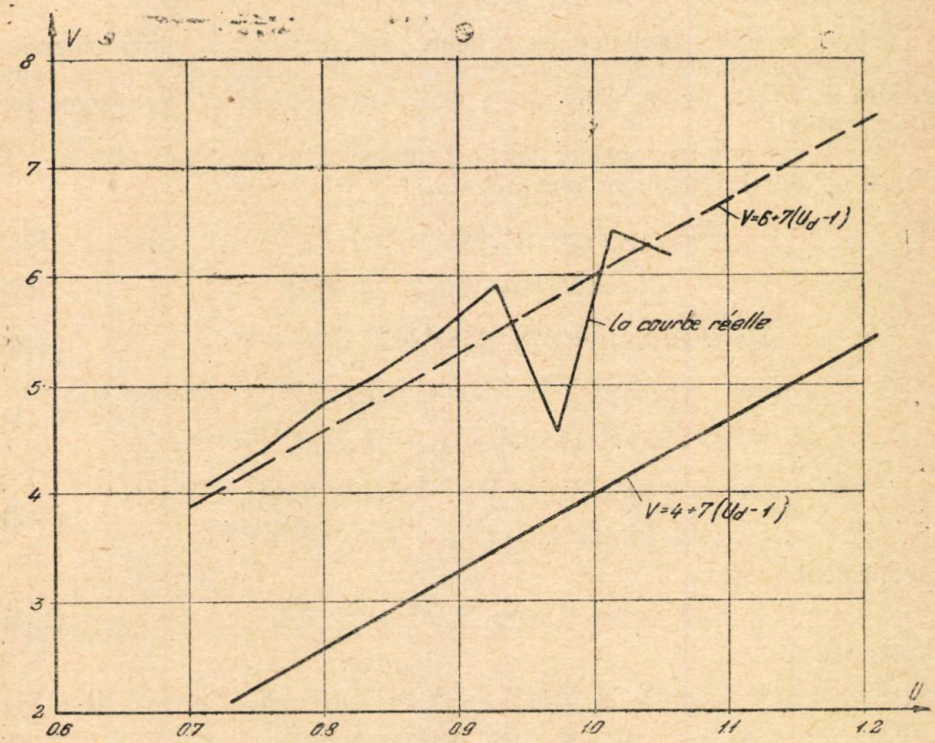


Fig. 13.

Dans cette figure on a représenté de même la dépendance idéalisée de ces deux grandeurs.

Cette dépendance a une forme linéaire et s'exprime par la relation

$$v = 6 + 7\ (U - 1) \tag{106}$$

Considérant que pour d'autres tôles cette dépendence de v avec la tension peut être moins accentuée on a finalment considéré dans le calcul la formule :

$$v = 4 + 7\ (U - 1) \tag{107}$$

L'utilisation de la formule (107) au lieu de (106) conduit évidemment à des surtensions plus élevées ; les résultats obtenus peuvent être considérés donc comme des limites supérieures, les valeur réelles étant dans la pratique égales ou inférieures à ces limites.

II. *Le calcul des surtensions dans la marche à vide en tenant compte du phénomène de la saturation*

Ainsi comme on l-a dit plus haut, on va calculer des surtensions qui peuvent apparaître dans le cas le plus dangereux et qui est la marche a vide, en prenant pour le courant de magnétisation du transformateur la formule :

$$I = Y\, U^{4+7\,(U-1)}$$

On va ensuite comparer les valeurs des surtensions ainsi obtenues avec celles qui résultent de la première partie de ce rapport pour se faire une idée de l'ordre de grandeur de la réduction que la saturation exerce sur les surtensions.

Le schéma pris en consideration est indiqué dans la figure 14.

On obtient les rélations suivantes :

$$\bar{I}_1 = j\, U_d\, (Y_a + Y_{dc}) \tag{108}$$

$$\bar{U}_{d1} = U_d\, [1 - X_L\, (Y_{dc} + Y_a)] \tag{109}$$

$$\bar{I}_2 = j\, Y_{dc}\, U_{d1} = j\, Y_{dc}\, U_d\, [1 - X_L\, (Y_{dc} + Y_a)] \tag{110}$$

$$\bar{I}_3 = -\, j\, Y_{tr.t}\, U_{d_1}^{4+7\,(U_{d_1}-1)} \cong -\, j\, Y_{tr.t}\, U_{d_1}^{4+7\,(U_d-1)} = \\ = -\, j\, Y_{tr.t} \{ U_d\, [1 - X_L\, (Y_{dc} + Y_a)] \}^{4+7\,(U_d-1)} \tag{111}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = j\, U_d \{ Y_{dc} + Y_a + Y_{dc} [1 - X_L (Y_a + Y_{dc})] \} - \\ j\, Y_{tr.t} \{ U_d\, [1 - X_L\, (Y_{dc} + Y_a)] \}^{4+7(U_d-1)} \tag{112}$$

et finalement :

$$E = 1 = U_d\, A + U_d^{4+7\,(U_d-1)} \times B \tag{113}$$

On a noté :

$$A = 1 - X_L\, (Y_{dc} + Y_a) - (X_{tr} + X_d) \{ Y_{dc} + Y_a + Y_{dc} [1 - X_L\, (Y_{dc} + Y_a)] \} \tag{114}$$

$$B = Y_{tr.t}\, [1 - X_L\, (Y_{dc} + Y_a)]^{4+7\,(U_d-1)}\, (X_{tr} + X_d) \tag{115}$$

Pour le fonctionnement normal ($Y_a = 0$) on obtient :

$$A = 1 - X_L Y_{dc} - Y_{dc}(X_{tr} + X_d)(2 - X_L Y_{dc}) \quad (116)$$

$$B = Y_{tr.t}[1 - X_L Y_{dc}]^{4+7(U_d-1)}(X_{tr} + X_d) \quad (117)$$

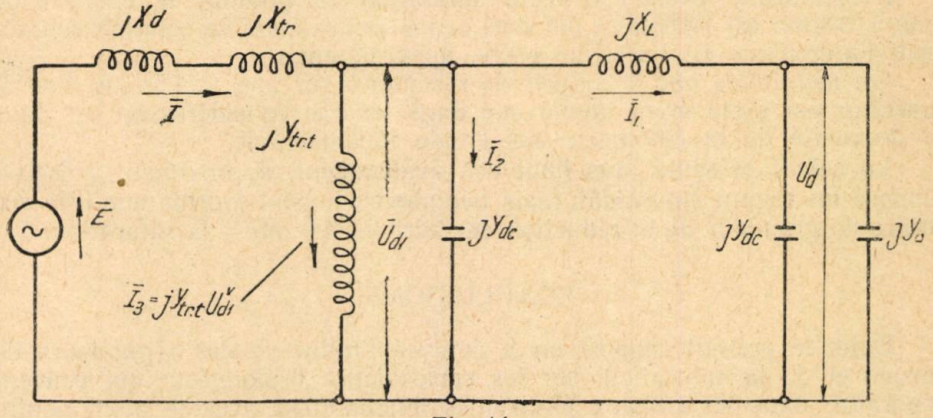


Fig. 14.

Les équations (113) pour les premiers trois cas considérés dans la première partie sont :

Pour le régime normal :

$$0{,}0582\ (U_d \times 0{,}9911)^v + 0{,}6766\ U_d = 1 \quad \text{Premier cas} \quad (118)$$

$$0{,}0582\ (U_d \times 0{,}9930)^v + 0{,}7359\ U_d = 1 \quad \text{Second cas} \quad (119)$$

$$0{,}0582\ (U_d \times 0{,}9995)^v + 0{,}6685\ U_d = 1 \quad \text{Troisième cas} \quad (120)$$

Pour le régime avec une phase mise à la terre :

$$0{,}0582\ (U_d \times 0{,}9778)^v + 0{,}4300\ U_d = 1 \quad \text{Premier cas} \quad (121)$$

$$0{,}0582\ (U_d \times 0{,}9951)^v + 0{,}5550\ U_d = 1 \quad \text{Second cas} \quad (122)$$

$$0{,}0582\ (U_d \times 0{,}9984)^v + 0{,}3139\ U_d = 1 \quad \text{Troisième cas} \quad (123)$$

Ces équations ont été résolues dans un premier cas : $v = 4 + 7\,(U_d - 1)$ (considérant la saturation) et dans un second cas : $v = 1$ (réseau linéaire).

Les résultats obtenus sont indiqués dans le tableau 9.

Tableau 9

Nombre du cas	Mode de fonctionnement	Valeur U_d obtenue sans considérer la saturation ($v = 1$)	Valeur de U_d obtenue en considérant la saturation $v = 4 + 7\,(U_d - 1)$
1	Normal $Y_a = 0$	1,359	1,227
	Une phase à la terre $Y_a \neq 0$	2,090	1,372
2	Normal $Y_a = 0$	1,260	1,178
	Une phase à la terre $Y_a \neq 0$	1,660	1,296
3	Normal $Y_a = 0$	1,379	1,226
	Une phase à la terre $Y_a \neq 0$	2,778	1,399

On voit que les surtensions qui, sans considérer la saturation, atteignent des valeurs d'environ 2 à 3 se reduisent par l'effet de saturation à un maximum d'environ 1,4.

Evidemment, lorsqu'une forte saturation se produit, le courant de magnétisation est fortement deformé et les armoniques de courant, notamment l'armonique du troisième ordre, apparaissent.

On mentionne que le danger de résonance sur une armonique d'ordre supérieur est exclu étant donné que dans les cas considérés on est dans la proximité de la résonance sur l'onde fondamentale.

Le calcul présenté plus haut est, évidemment, approximatif puisqu'il suppose un régime sinusoidal, mais néanmoins, il peut fournir une idée sur l'ordre de grandeur de la réduction des surtensions due à la saturation.

CONCLUSIONS

Dans le présent rapport on a analysé l'influence des régulateurs de tension et de la saturation, sur les surtensions „prolongées" qui peuvent apparaître dans les réseaux électriques fonctionnant avec le point neutre isolé.

On a démontré que les régulateurs de tension réduisent les surtensions à des valeurs négligeable tant que la charge active et réactive du réseau reste en dehors d'un certain domaine. Le fonctionnement en dehors de ce domaine est d'ailleurs le plus probable dans la pratique.

Le cas le plus dangereux qui peut arriver et dans lequel les régulateurs ne peuvent plus agir est la marche à vide du réseau avec une phase mise à la terre. Dans ce cas, les surtensions qui peuvent apparaître sans considérer l'effet de saturation sont de l'ordre de grandeur de 2 à 3 fois la tension nominale. En considérant la saturation du fer des transformateurs, les surtensions dans ce cas se réduisent à des valeurs maxima d'environ 1,4 fois la tension nominale, valeurs qui ne peuvent péricliter l'isolement des autres phases.

La Chaire de Centrales et Reseau électriques
Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Dimo P.* — Cauza supratensiunilor „prelungite" în rețelele cu neutrul izolat. Studii și Cercetări de Energetică, anul III (1952) pag. 15—95.
2. *Manea F.:* Verificarea prin calcul a supratensiunii prelungite posibile, în ipoteza rezonanței pentru rețele cu neutrul izolat. Studii și Cercetări de Energetică, anul III (1953), pag. 97—125.
3. *Dimo P., Arie E., Manea F., Ionescu S.* — Verificări experimentale și precizări în problema supratensiunilor prelungite constatate la rețelele de înaltă tensiune cu neutrul izolat. Studii și Cercetări de Energetică, anul V, nr. 3—4 (1955). T. 435—465.
4. *Dimo P.* — Cauza supratensiunilor prelungite în rețetele cu neutrul izolat. Revista Energetica (1953) nr. 11, p. 26—31.
5. *Manea F.* — Exemplu de calcul al supratensiunii prelungite, Revista Energetica (1953), nr. 11, pag. 31—32.

6. *Dimo P.* — Cauza supratensiunilor prelungite în rețelele de curent alternativ cu neutrul izolat și concluzii asupra modului de tratare a neutrului. Energie-Technik nr. 5 (1956), pag. 209—212.
7. *Dimo P.* — Autoexcitația alternatoarelor, cauza de naștere a supratensiunilor în rețelele de înaltă tensiune cu neutrul izolat. Revue d'Electrotechnique et d'Energétique (Edition de l'Académie de la Républipue Populaire Roumaine). Tom. 1, (1956) nr. 1, pag. 89—97.
8. x x x Colectivul de Electroenergetică al Institutului de Energetică al Academiei: Legarea neutrului la pămînt la rețelele de înaltă tensiune. Studii și Cercetări de Energetică. Tom. 1, nr. 3—4 (1951) pag. 161—202. Editura Academiei Republicii Populare Romîne.
9. *Postinikov I. M.* — Proiectarea mașinilor electrice, E.E.S.

ВЛИЯНИЕ РЕГУЛЯТОРА НАПРЯЖЕНИЯ И ЯВЛЕНИЯ НАСЫЩЕНИЯ НА ДЛИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ

(Краткое содержание)

Исследуется влияние регулятора напряжения и насыщения стали трансформаторов на стационарные перенапряжения, которые могут появляться вследствие замыкания на землю фазы сети с изолированной нейтралью.

Доказано, что эти перенапряжения сокращены регуляторами напряжения до пренебрежительных величин, если нагрузка генераторов находится вне определенных пределах. Внутри этих пределов регуляторы напряжения не могут уменьшать появляющиеся перенапряжения, но они уменьшены благодаря насыщению стали до относительно небольших величин.

THE INFLUENCE OF THE VOLTAGE REGULATORS AND TRANSFORMER CORES SATURATION ON OVERVOLTAGES CAUSED BY THE GROUNDING OF A PHASE

(Summary)

The paper analyses the influence of voltage regulators and saturation of transformer cores on the overvoltages caused by the grounding of a phase in an electric system with insulated neutral is considered.

It is shown, that as long as the charge remain out of a certain area, the overvoltages are substantially reduced by the voltage regulators and the tension can be held in desired limits.

Within this area, the overvoltages are no more limited by the voltage regulators but the saturation of transformer cores are reducing them at low levels.

L'INFLUENCE DES REGULATEURS DE TENSION ET DU PHENOMENE DE SATURATION SUR LES SURTENSIONS „PROLONGEES"

(Résumé)

On examine l'influence des régulateurs de tensions et de la saturation du fer des transformateurs sur les surtensions stationnaires qui peuvent apparaître à la suite d'une mise à la terre d'une phase dans un réseau électrique avec le point neutre isolé.

On démontre que ces surtensions sont reduites par les régulateurs de tension a des valeurs négligeables tant que la charge reste en dehors d'un certain domaine. A l'intérieur de ce domaine, les surtensions qui peuvent apparaître ne peuvent pas être réduites par les régulateurs de tension, mais sont réduites par la saturation du fer à des valeurs relativement faibles.

EINFLUSS DER SPANNUNGSREGLER UND DER TRANSFORMATORSÄTTIGUNG AUF STATIONÄRE ÜBERSPANNUNGEN

(Zusammenfassung)

Es wird der Einfluss der Spannungsregler und der Sättigung der Transformatoren auf die, infolge eines Erdschlusses in einem Netz mit isoliertem Sternpunkt eintretenden stationären Überspannungen untersucht.

Es wird nachgewiesen, dass, insofern die Last ausserhalb eines bestimmten Bereiches bleibt, diese Überspannungen durch die Spannungsregler wesentlich herabgesetzt werden.

Die innerhalb dieses Bereiches auftretenden Überspannungen können nicht durch die Spannungsregler vermindert werden, werden aber infolge der Sättigung des Transformatorkerns in verhältnissmässig geringen Grenzen gehalten.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

621.316

SCHÉMAS ÉQUIVALENTS DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES OBTENUS À L'AIDE DU CALCUL MATRICIEL

par EUGEN POTOLEA

On fait le plus aisément possible l'étude des régimes equilibrés et déséquilibrés des réseaux électriques en utilisant la méthode des composantes symétriques. Cette méthode-ci conduit à la construction des quelques schémas équivalents, nécessaires à l'étude des différentes asymétries longitudinales ou transversales qu'on peut rencontrer dans les réseaux électriques.

Ci-dessous on va exposer une méthode unitaire pour l'obtention de différents schémas équivalents à l'aide du calcul matriciel.

L'utilisation de cette méthode mène à la construction de quelques nouveaux schémas, comme ceux du tableau II (8, 9) et ceux des figures 18 et 19. Les premiers schémas mentionnés viennent combler une lacune du tableau des asymétries simples permettant l'étude générale d'un court circuit biphasé qu'on recontre assez souvent dans les réseaux électriques. Les derniers schémas mentionnés permettent l'étude de la ligne qui fonctionne dans le système nommé „deux conducteurs — terre", par la même méthode des composantes symétriques appliquées commodément au reste du réseau.

1) ELÉMENTS SYMÉTRIQUES DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES

Les systèmes électriques sont constitués généralment par des éléments triphasés (générateurs, transformateurs, lignes, consommateurs) qui peuvent être considérés symétriques dans la plupart des cas rencontrés dans la pratique de tous les jours. Malgré la symétrie des elements des réseaux, le calcul est pourtant laborieux, à cause de la présence des impédances de la méthode des componentes symétriques dont les éléments symétriques et des admittances mutuelles. Cette difficulté peut être évitée par l'utilisation sont caractérisés seulement par des impédances et par des admittances propres à quelques réseaux fictifs.

1.1. *La méthode des composantes symétriques.*

Soit un réseau triphasé formé seulement par des éléments symétriques auxquels on applique un système de tensions asymétriques $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ (fig. 1 a). Ces trois tensions asymétriques peuvent être décomposées en trois componentes conformement aux relations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \overline{V}_1 = \overline{V}_h + \overline{V}_d + \overline{V}_i \\ \overline{V}_2 = \overline{V}_h + a^2\overline{V}_d + a\overline{V}_i \\ \overline{V}_3 = \overline{V}_h + \overline{V}_d + a^3\overline{V}_i \end{cases}$$

d'où il résulte :

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{V}_h = \frac{1}{3}(\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3) \\ \overline{V}_d = \frac{1}{3}(\overline{V}_1 + a\overline{V}_2 + a^2\overline{V}_3) \\ \overline{V}_i = \frac{1}{3}(\overline{V}_1 + a^2\overline{V}_2 + a\overline{V}_3) \end{cases}$$

dans lesquelles $\overline{V}_h$, $\overline{V}_d$, $\overline{V}_i$ sont dénommées composantes symetriques se référant à la phase „1" et „a" représent l'opérateur $e^{j\frac{2\pi}{3}}$ On obtient la circultation des courants de la fig. 1 (b) en superposant les circulations de la figure 1 (c, d, e). On peut observer que les tensions appliquées à chacun des réseaux de la figure 1 (c, d, e) forment un système de tensions symétriques et qu'elles peuvent donc déterminer une circulation de courants symétriques. Par conséquent, le système de tensions $\overline{V}_h$, $\overline{V}_h$, $\overline{V}_h$ dénommé homopolaire, déterminera le système de courants homopolaires $\overline{I}_h$, $\overline{I}_h$, $\overline{I}_h$; le système de tensions $\overline{V}_d$, $a^2\overline{V}_d$, $a\overline{V}_d$ dénomé direct, determinera le système de courants directs $\overline{I}_d$, $a^2\overline{I}_d$, $a\overline{I}_d$, tandis que le système de tensions $\overline{V}_i$, $a\overline{V}_i$, $a^2\overline{V}_i$, dénommé inverse, déterminera le système de courants inverses I_i, $a\overline{I}_i$, $a^2\overline{I}_i$. Les relations entre les courants des phases et des composantes symétriques des courants, seront donc :

$$(3)\quad \begin{cases} \overline{I}_1 = \overline{I}_h + \overline{I}_d + \overline{I}_i \\ \overline{I}_2 = \overline{I}_h + a^2\overline{I}_d + a\overline{I}_i \\ \overline{I}_3 = \overline{I}_h + a\overline{I}_d + a^2\overline{I}_i \end{cases}$$

ou

$$(4)\quad \begin{cases} \overline{I}_h = \frac{1}{3}(\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3) \\ \overline{I}_d = \frac{1}{3}(\overline{I}_1 + a^2\overline{I}_2 + a\overline{I}_3) \\ \overline{I}_i = \frac{1}{3}(\overline{I}_1 + a^2\overline{I}_2 + a\overline{I}_3) \end{cases}$$

L'étude des schémas de la fig. 1 (c, d, e) nous fera remarquer qu'il suffit de déterminer les courants d'une seule phase par exemple ceux de la

phase 1, en utilisant, en vue de cela, les trois schémas monophasés de la fig. 1 (*f*, *g*, *h*).

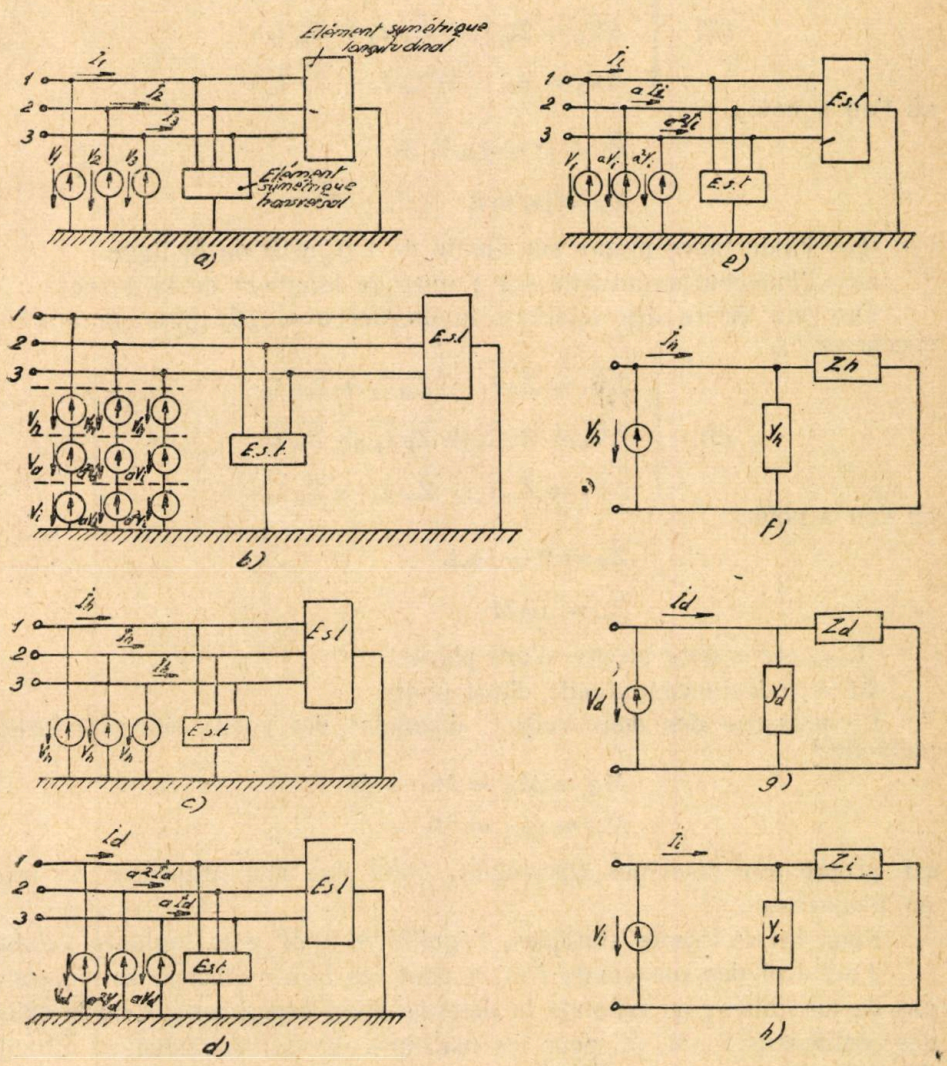


Fig. 1. La méthode des composantes symétriques

1.2. *Eléments triphasés longitudinales.*

Un réseau triphasé doit être généralement considéré comme étant constitué par trois boucles phase-terre (fig. 2) caracterisées par des impédances propres et mutuelles. Dans ce cas-là, les chutes de tension sur

une longuer quelconque S de la ligne, seront les suivantes:

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta\overline{V}_1 = \overline{Z}_p \overline{I}_1 + \overline{Z}_m \overline{I}_2 + \overline{Z}_m \overline{I}_3 \\ \Delta\overline{V}_2 = \overline{Z}_m \overline{I}_1 + \overline{Z}_p \overline{I}_2 + \overline{Z}_m \overline{I}_3 \\ \Delta\overline{V}_3 = \overline{Z}_m \overline{I}_1 + \overline{Z}_m \overline{I}_2 + \overline{Z}_p \overline{I}_3 \end{cases}$$

où l'on a noté:

$$\overline{Z}_p = (r + j\,\omega\, l)\, S$$

$$\overline{Z}_m = j\,\omega\, m\, S$$

l = l'inductance propre sur l'unité de longueur de la ligne.

m = l'inductance mutuelle sur l'unité de longueur de la ligne.

On peut écrire des relations analoguer avec (5) pour la machine synchrone *).

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta\overline{V}_1 = \overline{Z}_p \overline{I}_1 + \overline{Z}_m \overline{I}_2 + \overline{Z}'_m \overline{I}_3 \\ \Delta\overline{V}_2 = \overline{Z}'_m \overline{I}_1 + \overline{Z}_p \overline{I}_2 + \overline{Z}_m \overline{I}_3 \\ \Delta\overline{V}_3 = \overline{Z}_m \overline{I}_1 + \overline{Z}'_m \overline{I}_2 + \overline{Z}_p \overline{I}_3 \end{cases}$$

où l'on a noté:

$$\overline{Z}_p = R + j\omega L$$

$$\overline{Z}_m = j\omega M$$

L = inductance propre d'une phase.

M = inductance mutuelle d'une phase.

La présance des deux valeurs distinctes des coefficients d'induction mutuelle:

$$M_{12} = M_{23} = M_{31} = M$$

$$M_{21} = M_{32} = M_{13} = M'$$

est propre aux machines électriques, étant due aux influences du rotor en mouvement.

Pour les élélments statiques, l'égalité $M = M'$ este toujours valable.

Le calcul des coeficients l et m pour les lignes électriques n'éprouve pas de difficultés; en échange la détermination expérimentale ou le calcul des coefficients L, M, M' pour les machines devient extrêmement difficile. C'est à cause de cella qu'il est plus aisé d'utiliser trois autres grandeurs, faciles à déterminer conformément aux définition ci-dessous.

L'impédance homopolaire d'un élément triphasé symétrique est le rapport entre les chutes de tension et le courant d'une phase lorsque les courants qui circulent forment un système homopolaire. Cette circulation de

*) Il faut remarquer qu'on ne peut arriver aux relations (6) en partant des équations de fonctionnement de la machine sinchrone aux pôles saillants, de sorte que pour cel.e-ci on ne peut définir les impédances fictives de la meme manière que pour tous les autres éléments symétriques du réseau triphasé [B6].

courants est justement celle de la fig. 1(*c*) de sorte que des relations (5) il résulte :

$$\overline{Z}_h = \frac{\Delta\overline{V}_h}{\overline{I}_h} = \overline{Z}_p + 2\overline{Z}_m \tag{7}$$

L'impédance directe (cyclique ou de travail) d'un élément triphasé symétrique est le rapport entre la chute de tension et le courant d'une phase lorsque les courants qui circulent forment un système direct.

Cette circulation de courants est justement celle de la fig. 1 (*d*) de sorte que des relations (5) il résulte :

$$\overline{Z}_d = \frac{\Delta\overline{V}_d}{\overline{I}_d} = \overline{Z}_p - \overline{Z}_m \tag{8}$$

L'impédance inverse d'un élément symétrique est le rapport entre la chute de tension et le courant d'une phase lorsque les courants qui circulent, forment un système inverse.

Cette circulation de courants est jutement celle de la fig. 1 (*e*), de sorte que des relations (5) il resulte :

$$\overline{Z}_i = \frac{\Delta\overline{V}_i}{\overline{I}_i} = \overline{Z}_p - \overline{Z}_m \tag{9}$$

Les relations (7), (8), (9) déterminent les impédances homopolaire directe et inverse pour une ligne electrique. En utilisant les relations (6) on détermine de la même manière pour une machine synchrone les impédances correspondantes qui s'introduisent ensuite dans les schémas monofilaires de la fig. 1 (*f, g, h*) ou de la fig. 2 (*c*) :

$$(10)\quad \begin{cases} \overline{Z}_h = \overline{Z}_p + \overline{Z}_m + \overline{Z}'_m \\ \overline{Z}_d = \overline{Z}_p + a^2\overline{Z}_m + a\overline{Z}'_m \\ \overline{Z}_i = \overline{Z}_p + a\overline{Z}_m + a^2\overline{Z}'_m \end{cases}$$

De tout ce qu'on vient de dire, on constate qu'un élélment triphasé symétrique peut être caractérisé par les impédances $\overline{Z}_p$, $\overline{Z}_m$, $\overline{Z}'_m$ ou par les impédances $\overline{Z}_h, \overline{Z}_d, \overline{Z}_i$. Les trois premières impédances correspondent à un schéma triphasé (fig. 2 b), et les trois dernières correspondent à une représentation par trois réseaux monofilaires indépendants (sans couplage magnétiques ou électriques) qui ont reçu la dénomination de réseaux fictifs (fig. 2 c).

On peut observer qu'il intervient une force électromotrice, produite par la machine considérée comme symétrique, uniquement à l'intérieur du réseau direct. Au cas d'un fonctionnement normal, le sysfème de tensions $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3$ forme un système direct, de sorte que $\overline{V}_h = \overline{V}_i = 0$ Par consé-

quent il n'y aura pas de circulation de courants dans les réseaux homopolaire et inverse car il n'y aura par de force électromotrice qui les provoque.

On effectue le calcul du régime équilibré des réseaux symétriques en n'utilisant que le réseau direct.

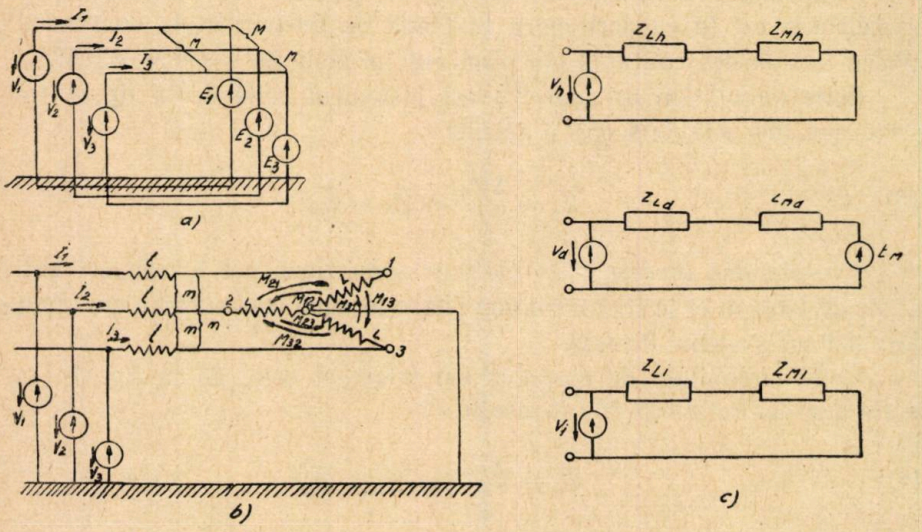


Fig. 2. Éléments triphasés longitudinales

1.3. *Eléments triphasés transversaux.*

On a pris jusqu'ici en considération seulement le couplage magnétique entre les circuits, en omettant le couplage éléctrique. Ce couplage électrique présente une importance réduite dans le cas des machines et des transformateurs, mais pour les lignes électriques aériennes et souterraines il ne peut être négligé. Entre les trois conducteurs d'une ligne électrique et la terre il y a une influence électrique qui peut être caracterisée par des capacités propres et mutuelles C_p et C_m (fig. 3). En introduisant les admittances propres et mutuelles on exprime généralement les courants supplémentaires dans les phases de la ligne par les relations:

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta\overline{I}_1 = \overline{Y}_p\,\overline{V}_1 + \overline{Y}_m\,\overline{V}_{12} + \overline{Y}_m\,\overline{V}_{13} \\ \Delta\overline{I}_2 = \overline{X}_p\,\overline{V}_2 + \overline{Y}_m\,\overline{V}_{21} + \overline{Y}_m\,\overline{V}_{23} \\ \Delta\overline{I}^3 = \overline{Y}_p\,\overline{V}_3 + \overline{Y}_m\,\overline{V}_{31} + \overline{Y}_m\,\overline{V}_{32} \end{cases}$$

où l'on a noté:

$$\overline{X}_p = G_p + j\omega C_p \simeq j\omega C_p$$

$$\overline{Y}_m = G_m + j\omega C_m \simeq j\omega C_m$$

Au lieu de travailler à l'aide de ces admittances partielles, dans la méthode des composantes symétriques, on définit trois admittances dans l'ordre suivant :

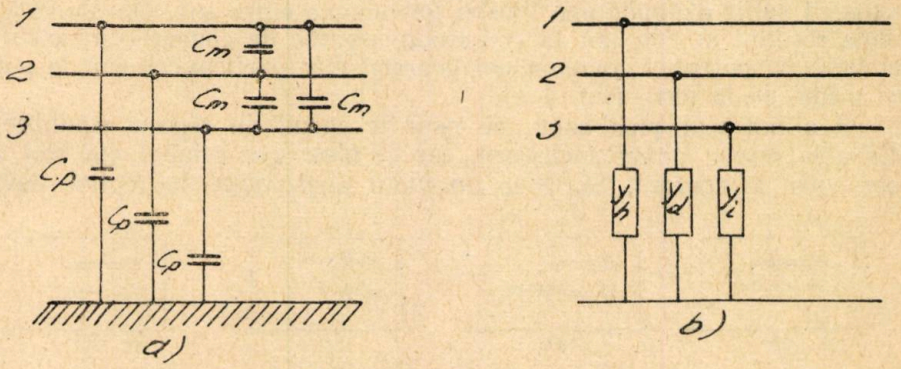


Fig. 3. Elements triphases transversaux

L'admittance homopolaire d'un élément triphasé symétrique est le rapport entre le courant supplémentaire et la tension de la phase respective lorsque les tensions appliquées forment un système homopolaire.

Dans ces conditions il résulte des relations (11), la relation :

$$\overline{Y}_h = \frac{\Delta \overline{I}_h}{\overline{V}_h} = \overline{Y}_p \tag{12}$$

L'admittance directe (cyclique ou de travail) de l'élément triphasé symétrique est le rapport entre le courant supplémentaire et la tension de la phase respective lorsque les tensions appliquées forment un système symétrique direct.

Dans ces conditions il résulte des relations (11) la relation :

$$\overline{Y}_d = \frac{\Delta \overline{I}_d}{\overline{V}_d} = \overline{Y}_p + 3\overline{Y}_m \tag{13}$$

On définit l'admittance inverse d'une manière analogue :

$$\overline{Y}_i = \overline{Y}_p + 3\overline{Y}_m \tag{14}$$

1.4. *Les schémas des réseaux fictifs.*

On a déjà montré qu'un réseau triphasé est constitué par trois boucles ayant une branche commune — la terre — qui peut être regardée comme un conducteur de retour pour les courants de chaque phase. Quant à la représentation par les trois réseaux fictifs (fig. 1) il faut souligner que le potentiel du conducteur de retour n'est pas encore précisé et qu'il n'a aucun rapport avec le potentiel de la terre.

On déduit des relations (2), que les trois réseaux fictifs doivent posséder des conducteurs de retour ayant le même potentiel. En effet, du moment

que les tensions triphasées $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ sont définies par rapport à un potential commune — la terre — il résulte que les tensions V_h, V_d, V_t seront définies par rapport à un potentiel commun — la terre fictive —. Pour fixer à un potentiel commun les conducteurs de retour des réseaux fictifs, il suffit d'établir une liaison galvanique entre eux. On arrive à un même résultat si l'on fait la connexion séparée de chaque conducteur de retour à un potentiel commun qui pourrait être particulièrement le potentiel même de la terre (fig. 4 a).

O a fait voir plus haut que pour le calcul du régime équilibré on utilise le réseau direct seulement, car ce n'est que celui-ci qui soit parcouru par le courant. Si, pour un motif quelconque, le régime devient

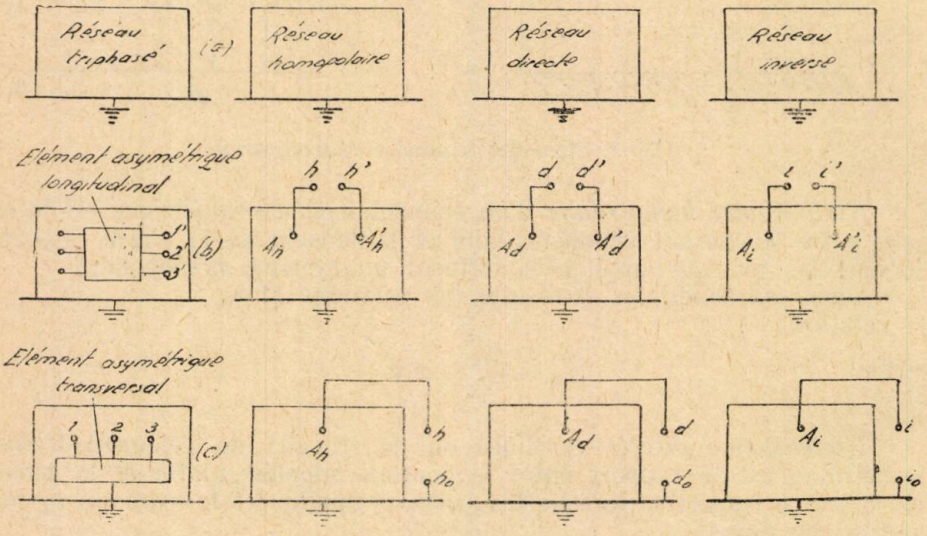


Fig. 4. Les schémas des réseaux fictifs

déséquilibré, alors les réseaux inverse et homopolaire, seront aussi parcours par des courants. L'apparition de ces courants dans les réseaux inverse et homopolaire, où il ny a pas de force électromotrice, est due à l'apparition de quelques couplage magnétiques et électriques êntre les réseaux fictifs. Si l'on considère les asymétries du réseau triphasé et si l'on impose aux réseaux fictifs, on obtient des schémas équivalents sur la base desquels on calcule la circulation des courants dans les différents cas de régimes déséquilibrés.

Les asymétries du réseau triphasé peuvent être divisées, selon leur caractère, en deux catégories :

I. Des asymétries d'impédances ou longitudinales.

II. Des asymtéries d'admittances ou transversales.

Selon le nombre des admittances ou des impédances qui caractérisent l'asymétrie, celle-ci peut être simple on multiple.

Quel que soit la caractère ou la complexité de l'asymétrie, on peut toujours l'a considérer comme étant due à un seul au à plusieurs élèments triphasés asymétriques.

Comme le réseau est asymétrique, à l'exception de quelques éléments asymétriques, il est nécessaire de metrre en évidence les bornes de ces éléments, ainsi que l'indique la fig. 4.

Avant de passer a l'étude des différentes asymétries, il s'impose de compléter les réseaux fictifs de la fig. 4, avec les schémas équivalents d'un élément rencontré parfois dans les réseaux électriques (fig. 5, a, b).

En considérant la figure 5 (a), on écrit les relations :

$$\overline{V}_1 = \overline{V}_2 = \overline{V}_3 = \overline{V}_h$$

$$\Delta\overline{I}_1 + \Delta\overline{I}_2 + \Delta\overline{I}_3 = \overline{Y}_0\,\overline{V}_h$$

Quant aux composantes symétriques, il en résulte les conditions :

$$(15)\quad \begin{cases} \Delta\overline{I}_h = \dfrac{1}{3}\,\overline{V}_0\,\overline{V}_h \\ \overline{V}_d = \overline{V}_i = 0 \end{cases}$$

qui conduisent au schéma équivalent de la fig. 5 (c).

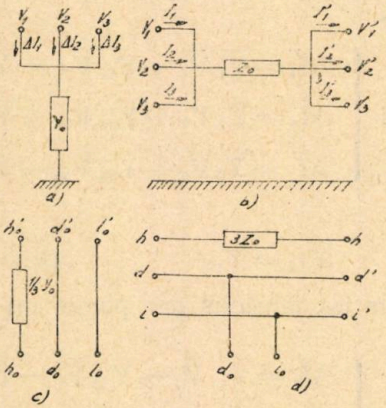


Fig. 5. Un élément triphasé particulier rencontré dans les réseaux électriques

En considérant la fig. 5 (b), on écrit les relations :

$$\Delta\overline{V}_1 = \Delta\overline{V}_2 = \Delta\overline{V}_3 = \overline{Z}_0\,(\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3)$$

$$\overline{V}_1 = \overline{V}_2 = \overline{V}_3 = \overline{V}_h$$

$$\overline{V}'_1 = \overline{V}'_2 = \overline{V}'_3 = \overline{V}'_h$$

Quant aux composantes symétriques, il en résulte les conditions :

$$(16)\quad \begin{cases} \Delta\overline{V}_h = 3\overline{Z}_0\,\overline{I}_h \\ \overline{V}_d = \overline{V}_i = 0 \\ \overline{V}'_d = \overline{V}'_i = 0 \end{cases}$$

qui conduisent au schéma équivalent de la fig. 5 (d).

On rencontre souvent l'élément de la fig. 5 (c) dans les schémas equivalents car il est justement l'interprète de la mise à la terre du point neutre par un impédance.

2) ÉLÉMENTS ASYMÉTRIQUES DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES

Dans le cas le plus général, un élément longitudinal asymétriques est caractérisé par trois impédances propres et six impédances mutuelles, de sorte qu'on écrit les chutes de tension pour chaque phase, sous les formes suivantes :

$$(17)\quad \begin{cases} \Delta\overline{V}_1 = \overline{Z}_{11}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{12}\overline{I}_2 + \overline{Z}_{13}\overline{I}_3 \\ \Delta\overline{V}_2 = \overline{Z}_{21}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{22}\overline{I}_2 + \overline{Z}_{23}\overline{I}_3 \\ \Delta\overline{V}_3 = \overline{Z}_{31}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{32}\overline{I}_2 + \overline{Z}_{33}\overline{I}_3 \end{cases}$$

Un élément transversal asymétrique est généralement caractérisé par trois admittances propres et trois admittances mutuelles, de telle manière que les courants supplémentaires apparaissant dans les phases de la ligne, sont les suivants :

$$(18)\quad \begin{cases} \Delta\overline{I}_1 = \overline{Y}_1\overline{V}_1 + \overline{Y}_{12}\overline{V}_{12} + \overline{Y}_{13}\overline{V}_{13} \\ \Delta\overline{I}_2 = \overline{Y}_2\overline{V}_2 + \overline{Y}_{21}\overline{V}_{31} + \overline{Y}_{23}\overline{V}_{23} \\ \Delta\overline{I}_3 = \overline{Y}_3\overline{V}_3 + \overline{Y}_{31}\overline{V}_{31} + \overline{Y}_{32}\overline{V}_{31} \end{cases}$$

ou :

$$\overline{Y}_{jk} = \overline{Y}_{kj} \qquad (k, j = 1, 2, 3)$$

Pour faire ressortir les tensions par phase, on écrit le système (18) sous la forme :

$$(19)\quad \begin{cases} \Delta\overline{I}_1 = \overline{Y}_{11}\overline{V}_1 - \overline{Y}_{12}\overline{V}_2 - \overline{Y}_{13}\overline{V}_3 \\ \Delta\overline{I}_2 = \overline{Y}_{21}\overline{V}_1 + \overline{Y}_{22}\overline{V}_2 - \overline{Y}_{23}\overline{V}_3 \\ \Delta\overline{I}_3 = -\overline{Y}_{31}\overline{V}_1 - \overline{Y}_{32}\overline{V}_2 + \overline{Y}_{33}\overline{V}_3 \end{cases}$$

où l'on a noté :

$$(20)\quad \begin{cases} \overline{Y}_{11} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_{12} + \overline{Y}_{13} \\ \overline{Y}_{22} = \overline{Y}_2 + \overline{Y}_{21} + \overline{Y}_{23} \\ \overline{Y}_{33} = \overline{Y}_3 + \overline{Y}_{31} + \overline{Y}_{32} \end{cases}$$

En utilisant les notations du calcul matriciel, on écrit les systèmes (17) et (19) sous la forme :

$$(21)\quad \begin{cases} \|\Delta\overline{V}\| = \|\overline{Z}\|\ \|\overline{I}\| \\ \|\Delta\overline{I}\| = \|\overline{Y}\|\ \|\overline{V}\| \end{cases}$$

où l'on a noté :

$$\|\Delta\overline{V}\| = \begin{array}{c|c} 1 & \Delta\overline{V}_1 \\ 2 & \Delta\overline{V}_2 \\ 3 & \Delta\overline{V}_3 \end{array} \qquad \|\overline{Z}\| = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} & \overline{Z}_{13} \\ 2 & \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22} & \overline{Z}_{23} \\ 3 & \overline{Z}_{31} & \overline{Z}_{32} & \overline{Z}_{33} \end{array} \qquad \|\overline{I}\| = \begin{array}{c|c} 1 & \overline{I}_1 \\ 2 & \overline{I}_2 \\ 3 & \overline{I}_3 \end{array}$$

$$\|\Delta\overline{I}\| = \begin{array}{c|c} 1 & \Delta\overline{I}_1 \\ 2 & \Delta\overline{I}_2 \\ 3 & \Delta\overline{I}_3 \end{array} \qquad \|\overline{Y}\| = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \overline{Y}_{11} & -\overline{Y}_{12} & -\overline{Y}_{13} \\ 2 & -\overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} & -\overline{Y}_{23} \\ 3 & -\overline{Y}_{31} & -\overline{Y}_{32} & \overline{Y}_{33} \end{array} \qquad \|\overline{V}\| = \begin{array}{c|c} 1 & \overline{V}_1 \\ 2 & \overline{V}_2 \\ 3 & \overline{V}_3 \end{array}$$

En connaissant la matrice de connexion $\|\overline{C}_s\|$ de la théorie des composantes symétriques :

$$(22) \qquad \begin{aligned} \|\overline{I}\| &= \|\overline{C}_s\| \ \|\overline{I}_s\| \\ \|\overline{V}\| &= \|\overline{C}_s\| \ \|\overline{V}_s\| \end{aligned}$$

dans lesquelles :

$$\|\overline{I}_s\| = \begin{array}{c|c} h & \overline{I}_h \\ d & \overline{I}_d \\ i & \overline{I}_i \end{array} \qquad \|\overline{V}_s\| = \begin{array}{c|c} h & \overline{V}_h \\ d & \overline{V}_d \\ i & \overline{V}_1 \end{array} \qquad \|\overline{C}_s\| = \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ h & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & a^2 & a \\ i & 1 & a & a^2 \end{array}.$$

on peut écrire les équations des réseaux transformés (B. 28).

$$(22) \qquad \begin{cases} \|\Delta\overline{V}'\| = \|\overline{Z}'\| \ \|\overline{I}_s\| \\ \|\Delta\overline{I}'\| = \|\overline{Y}\| \ \|\overline{V}_s\| \end{cases}$$

où :

$$(24) \qquad \begin{cases} \|\Delta\overline{V}'\| = \|\overline{C}_s\|_t^* \cdot \|\overline{V}\| \\ \|\Delta\overline{I}'\| = \|\overline{C}_s\|_t^* \cdot \|\overline{I}\| \\ \|\overline{Z}'\| = \|\overline{C}_s\|_t^* \cdot \|\overline{Z}\| \cdot \|\overline{C}_s\| \\ \|\overline{Y}'\| = \|\overline{C}_s\|_t^* \cdot \|\overline{Z}\| \cdot \|\overline{C}_s \end{cases}$$

Il est plus comode, par considérations de symétrie, d'introduire au lieu des matrices définies par (24) les matrices définies comme dans la mtéhode des composantes symétriques :

$$(25) \qquad \begin{cases} \|\Delta\overline{V}_s\| = \dfrac{1}{3} \|\overline{C}_s\|_t^* \|\Delta\overline{V}\| \\ \|\Delta\overline{I}_s\| = \dfrac{1}{3} \|\overline{C}_s\|_t^* \|\Delta\overline{I}\| \end{cases}$$

qui ne diffère de celle de (24) que par un coeficient numérique.

En utlisant ces dernères matrices, on écrira les équations des réseaux fictifs sous la forme :

$$(26)\quad \begin{cases} \|\Delta\overline{V}_s\| = \|\overline{Z}_s\|\,\|\overline{I}_s\| \\ \|\Delta\overline{I}_s\| = \|\overline{Y}_s\|\,\|\overline{V}_s\| \end{cases}$$

où l'on a noté :

$$(27)\quad \begin{aligned} \|\overline{Z}_s\| &= \frac{1}{3}\,\|\overline{C}_s\|_t^*\,\|\overline{Z}\|\,\|\overline{C}_s\| \\ \|\overline{Y}_s\| &= \frac{1}{3}\,\|\overline{C}_s\|_t^*\,\|\overline{Y}\|\,\|\overline{C}_s\| \end{aligned}$$

et l'on a affecté l'indice „s" aux grandeurs correspondant aux réseaux fictifs.

2.1 *Construction des schémas équivalents.*

En effectuant les opérations indiqueés par les relations (27) on obtient les matrices correspondantes aux réseaux fictifs :

$$\|\overline{Z}_s\| = \begin{array}{c|ccc} & \text{h} & \text{d} & \text{i} \\ \hline \text{h} & \overline{Z}_{hh} & \overline{Z}_{hd} & \overline{Z}_{hi} \\ \text{d} & \overline{Z}_{dh} & \overline{Z}_{dd} & \overline{Z}_{di} \\ \text{i} & \overline{Z}_{ih} & \overline{Z}_{id} & \overline{Z}_{ii} \end{array} \qquad \|\overline{Y}_s\| = \begin{array}{c|ccc} & \text{h} & \text{d} & \text{i} \\ \hline \text{h} & \overline{Y}_{hh} & \overline{Y}_{hd} & \overline{Y}_{hi} \\ \text{d} & \overline{Y}_{dh} & \overline{Y}_{dd} & \overline{Y}_{di} \\ \text{i} & \overline{Y}_{ih} & \overline{Y}_{id} & \overline{Y}_{ii} \end{array}$$

De la compariason des matrices $\|\overline{Z}\|$ aux matrices $\|\overline{Z}_s\|$ et des matrices $\|\overline{Y}\|$ aux $\|\overline{Y}_s\|$ il résulte que les élements paraissant sur les

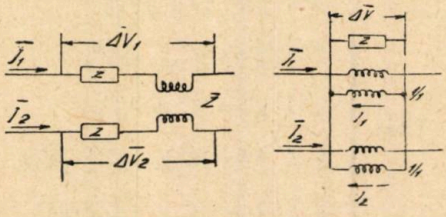


Fig. 6. Schéma équivalent d'un couplage réalisé par impédance mutuelle

diagonales jouent le rôle des impédances et des admittances propres aux réseaux fictifs tandis que les éléments du reste des compartiments jouent le rôle des admittances mutuelles. La présence des impédances et des admittances mutuelles fait voir que les trois réseaux fictifs ne sont pas indépendants et qu'ils sont couplés conformément aux relations des courants imposées par la matrice $\|\overline{Z}_s\|$ ou conformément aux relations des tensions imposées par la matrice $\|\overline{Y}_s\|$.

Les couplages imposés par les matrices $\|\overline{Z}_s\|$ et $\|\overline{Y}_s\|$ dans les schémas équivalents peuvent être realisés à l'aide des transformateurs, ayant des rapports de transformation choisis de manière à ce qu'ils correspondent aux valeurs des impédances et des admittances mutuelles. Il est pourtant possible que ces couplages soient réalisées à l'aide de quelque transformateurs aux rapports constants, indépendants des valeurs des impédances et des admittances mutuelles. Cette possibilité est extremement utile ayant en vue la nécesitée de la représentation des schémas équivalents sur la table de calcul, pour l'étude des régimes de fonctionnement des systèmes électriques.

Dans la fig. 6 on fait voir comment le couplage par des transformateur à rapport 1/1 peut-être réalisé dans le cas particulier des deux circuits couplés par une impédance mutuelle $\overline{Z}$ égale aux impédances propres.

Il est facile à démontrer que les deux schémas de la figure 6 sont équivalents, à savoir :

$$\Delta\overline{V}_1 = \Delta\overline{V}_2 = \Delta\overline{V} = \overline{Z}\,(\overline{I}_1 + \overline{I}_2)$$

Dans la fig. 7 on fait voir comment peut-être réalisé le couplage par des transformateurs à rapport 1/1, dans le cas particulier des deux circuits couplés par une admittance mutuelle $\overline{Y}$. Il est facile à démontrer que les deux schémas de la fig. 7 sont équivalents, c'est-à-dire.

$$\Delta\overline{I}_1 = \overline{Y}\,\overline{V}_{12} = \overline{Y}\,(\overline{V}_1 - \overline{V}_2)$$

$$\Delta\overline{I}_2 = \overline{Y}\,\overline{V}_{21} = \overline{Y}\,(\overline{V}_2 - \overline{V}_1)$$

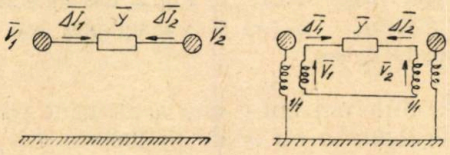


Fig. 7. Schéma équivalent d'un couplage par admittance mutuelle

Dans la construction des schémas équivalents pour les différentes asymétries on rencontre assez souvent les cas particuliers ou les matrices $\|\overline{Z}_s\|$ $\|\overline{Y}_s\|$ ont tous les éléments égaux. Les schémas équivalents pour ces cas sont presentés dans la fig. 8, conformément à laquelle on peut écrire les relations :

$$\Delta\overline{V}_h = \frac{1}{3}\overline{Z}\,(\overline{I}_h + \overline{I}_d + \overline{I}_i)$$

$$\Delta\overline{V}_d = \frac{1}{3}\overline{Z}\,(\overline{I}_h + \overline{I}_d + \overline{I}_i)$$

$$\Delta\overline{V}_i = \frac{1}{3}\overline{Z}\,(\overline{I}_h + \overline{I}_d + \overline{I}_i)$$

et

$$\Delta \bar{I}_h = \frac{1}{3}\bar{Y}(\bar{V}_h + \bar{V}_d + \bar{V}_i)$$

$$\Delta \bar{I}_d = \frac{1}{3}\bar{Y}(\bar{V}_h + \bar{V}_d + \bar{V}_i)$$

$$\Delta \bar{I}_i = \frac{1}{3}\bar{Y}(\bar{V}_h + \bar{V}_d + \bar{V}_i)$$

En se basant sur les schémas construits pour les matrices à tous les éléments égaux, on peut obtenir de schémas pour ces cas là lorsque les

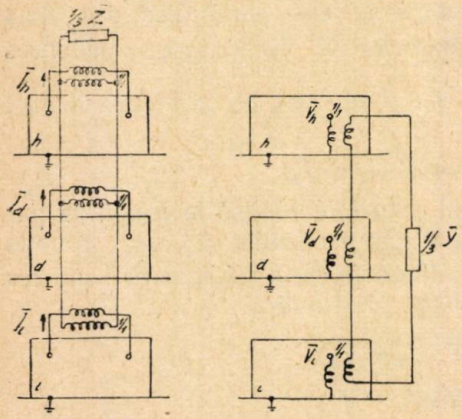


Fig. 8. Schémas équivalents pour le cas particulier lorsque les matrices $\|\bar{Z}_s\|$ et $\|\bar{Y}_s\|$ ont tous les éléments égaux

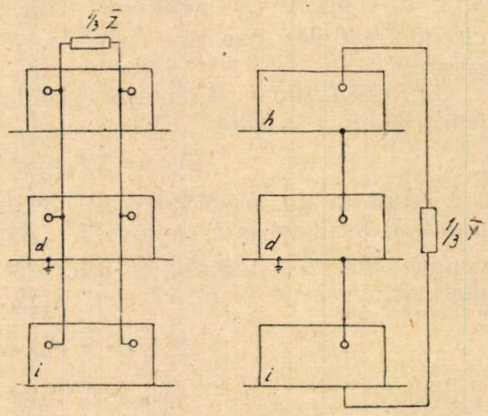


Fig. 9. Les schémas équivalents sans couplages aux transformateurs

éléments des matrices différent entre elle seulement par le fait qu'ils sont multiplies par les opérateurs a ou a^2 de la théorie des composantes symétriques.

Dans ces cas là, on introduit dans les schémas équivalent, des transformateurs dits „rotateurs" qui ont des rapports de transformation 1/a et $1/a^2$ et qui produisent la rotation des courants et des tension avec les angles $\frac{2}{3}\pi$ et $\frac{4}{3}\pi$. Il faut remarquer que, en cas des asymetries simples, ces transformateurs rotateurs peuvent, être toujours evités par un choix corespondant de la phase de référence pour laquelle on construit le schéma équivalents.

Il y a la possibilité d'éviter même les transformateurs à rapport 1/1, en introduisant de simples connexions galvaniques, à la place des couplages magnétiques. De cette manière les schémas de la fig. 8 peuvent être presentés comme dans la fig. 9.

Il faut remarquer que l'introduction des liaisons galvanique peut être faite, seulement après la suppression des liaisons au potentiel commun — la terre — pour deux des réseaux fictifs, par exemple les réseaux homopolaire et inverse. Le couplage galvanique ainsi introduit aura comme le déplacement des potentiels des réseaux homopolaire et inverse. Par consequent, les tensions homopolaire et inverse ne peuvent plus être dé-

terminées par rapport au potentiel commun de la terre fictive des réseaux, mais elles doivent être déterminées chacune séparaiment par rapport aux conducteurs de potentiel zero des réseaux homopolaire et inverse.

En ce qui concerne la possibilité de remplacement des couplages magnetiques par des connexion galvaniques ces dernièrs peuvent etre de deux categories.

I. Des connexions galvaniques produisant un déplasement artificiel des potentiels des réseaux fictifs. Ces connexions peuvent etre introduites seulement après la suppression des liaisons à la terre pour deux réseaux fictifs, tel qu'on l'a vu dans la fig. 9.

S'il y avait encore d'autres couplages de ce genre entre les réseaux fictifs ils ne pouraient être remplacés par des connexions galvaniques parceque apparaitrait dans les schémas équivalents une fausse circulation de courants. En effet, les connexions galvanique introduites feront paraitre differents deplacements artificiels des potentiel des réseaux fictifs et par conséquent il y aura des courants d'égalisation des potentiels qui n'appaissent pas au cas des couplages magnétiques.

II. Des connexions galvaniques ne produisant pas de deplacements des potentiels des réseaux fictifs. Ces connexions peuvent être introduites dans un nombre illimité sans la suppression des liaisons à la terre des réseaux fictifs. Telles sont par exemple les connexions qu'on introduit dans le schémas équivalent du court circuit biphasé.

2. 2. *Asymétries longitudinales*

La matrice $\|\overline{Z}_s\|$ correspondant aux réseaux fictifs possède généralement neuf éléments distincts, qui s'expriment en fonction des éléments de la matrice $\|\overline{Z}\|$ en effectuant les opérations indiquées par la première relation de (27). On obtien les schémas équivalents en décomposant tout d'arbord la matrice $\|\overline{Z}\|$ en six matrices simples, ce qui correspond en réalité à la décomposition de l'asymétrie multiple longitudinale en six asymétries simples :

$$\|\overline{Z}\| = \|\overline{Z}\|_p + \|\overline{Z}\|_m$$

	1	2	3
1	$\overline{Z}_{11}$	$\overline{Z}_{12}$	$\overline{Z}_{13}$
2	$\overline{Z}_{21}$	$\overline{Z}_{22}$	$\overline{Z}_{23}$
3	$\overline{Z}_{31}$	$\overline{Z}_{32}$	$\overline{Z}_{33}$

$=$

	1	2	3
1	$\overline{Z}_{11}$		
2		$\overline{Z}_{22}$	
3			$\overline{Z}_{33}$

$+$

	1	2	3
1		$\overline{Z}_{12}$	$\overline{Z}_{13}$
2	$\overline{Z}_{21}$		$\overline{Z}_{23}$
3	$\overline{Z}_{31}$	$\overline{Z}_{32}$	

La matrice $\|\overline{Z}\|_p$ se décompose en trois matrices simples pour lesquelles on calcule les matrices correspondantes $\|\overline{Z}_s\|_p$:

$\|\overline{Z}\|_p =$

	1	2	3
1	$\overline{Z}_{11}$		
2			
3			

$+$

	1	2	3
1			
2		$\overline{Z}_{22}$	
3			

$+$

	1	2	3
1			
2			
3			

$$(28)\quad \|\bar{Z}_s\|_p = \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline h & \frac{1}{3}\bar{Z}_{11} & \frac{1}{3}\bar{Z}_{11} & \frac{1}{3}\bar{Z}_{11} \\ d & \frac{1}{3}\bar{Z}_{11} & \frac{1}{3}\bar{Z}_{11} & \frac{1}{3}\bar{Z}_{11} \\ i & \frac{1}{3}\bar{Z}_{11} & \frac{1}{3}\bar{Z}_{11} & \frac{1}{3}\bar{Z}_{11} \end{array} + \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline h & \frac{1}{3}\bar{Z}_{22} & \frac{1}{3}a^2\bar{Z}_{22} & \frac{1}{3}a\bar{Z}_{22} \\ d & \frac{1}{3}a\bar{Z}_{22} & \frac{1}{3}\bar{Z}_{22} & \frac{1}{3}a^2\bar{Z}_{22} \\ i & \frac{1}{3}a^2\bar{Z}_{22} & \frac{1}{3}a\bar{Z}_{22} & \frac{1}{3}\bar{Z}_{22} \end{array} +$$

$$+ \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline h & \frac{1}{3}\bar{Z}_{33} & \frac{1}{3}a\bar{Z}_{33} & \frac{1}{3}a^2\bar{Z}_{33} \\ d & \frac{1}{3}a^2\bar{Z}_{33} & \frac{1}{3}\bar{Z}_{33} & \frac{1}{3}a\bar{Z}_{33} \\ i & \frac{1}{3}a\bar{Z}_{33} & \frac{1}{3}a^2\bar{Z}_{33} & \frac{1}{3}\bar{Z}_{33} \end{array}$$

Les matrices (28) conduisent à la construction des schémas équivalents de l'annexe I (1, 2, 3).

La première des matrices (28) fait voir que les trois réseaux vus des bornes h—h', d—d', i—i' (fig. 4) sont couplés parallèlement sur une impédance $\frac{1}{3}\bar{Z}_1$. Si le potentiel de chaque réseau était arbitraire, le couplage pourrait être alors réalisé par de simples liaisons galvaniques, comme il ressort de l'anexe I (5).

La deuxième matrice du groupe (28) impose l'introduction de quelques couplages magnétiques qui se réalisent à l'aide de quelques transformateurs ayant des rapports de transformation 1/1, 1^2a, $1/a^2$. Le premier transformateurs a le rôle d'isoler et les deux derniers ont aussi le rôle de produire une rotation des phases avec $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ c'est pourquoi ils ont pris le nom de transformateurs rotateurs. Le schéma équivalent contenant de transformateurs rotateurs (l'annexe I, 2) ne peut être simplifié en remplaçant les couplages magnétique par d'autres galvaniques car ces derniers ne peuvent interpréter la rotation des phases. L'introduction d'une simple liaison galvanique n'est possible que dans le cas du réseau homopolaire (où intervient le transformateurs à rapport 1/1) et cela après avoir supprimé en prealable, la mise à la terre du réseau homopolaire.

Le couplage correspondant à la dernière matrice de (28) est représenté dans l'annexe I (3) et il est obtenu en se basant sur les mêmes jugements que ceux d'en haut.

On peut aussi décomposer la matrice $\|\overline{Z}\|_m$ en trois matrices :

$$\|\overline{Z}\|_m = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & & & \\ 2 & & & \overline{Z}_{23} \\ 3 & & \overline{Z}_{32} & \end{array} + \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & & & \overline{Z}_{13} \\ 2 & & & \\ 3 & \overline{Z}_{31} & & \end{array} + \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & & \overline{Z}^1{}_2 & \\ 2 & \overline{Z}_{21} & & \\ 3 & & & \end{array}$$

mais les matrices $\|\overline{Z}_s\|_m$ correspondantes ne mènent pas à des schémas équivalents plus simples. Dans ce cas la décomposition en asymétries simples ne présente aucun avantage ; voila pourquoi, il est plus raisonnable de calculer directement la matrice. $\|\overline{Z}_s\|_m$.

2. 3. *Asymétries transversales*

La matrice $\|\overline{Y}_s\|$ correspondant aux réseaux fictifs possède généralement neuf éléments distincts, qui s'expriment en fonction des elements de la matrice $\|\overline{Y}\|$ en effectuant les operations indiquées par la seconde relation de (27). On obtient les schémas équivalents en décomposant la matrice $\|\overline{Y}\|$ en six matrices simples, ce qui correspond à la décomposition de l'asymétrie multiple, en six asymétries simples.

$$\|\overline{Y}\| = \|\overline{Y}\|_p + \|\overline{Y}\|_m$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \overline{Y}_1 + \overline{Y}_{12} + \overline{Y}_{13} & -\overline{Y}_{12} & -\overline{Y}_{13} \\ 2 & -\overline{Y}_{21} & \overline{Y}_2 + \overline{Y}_{21} + \overline{Y}_{23} & -\overline{Y}_{23} \\ 3 & -\overline{Y}_{31} & -\overline{Y}_{32} & \overline{Y}_3 + \overline{Y}_{31} + \overline{Y}_{32} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \overline{Y}_1 & & \\ 2 & & \overline{Y}_2 & \\ 3 & & & \overline{Y}_3 \end{array} + \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \overline{Y}_{12} + \overline{Y}_{13} & -\overline{Y}_{12} & -\overline{Y}_{13} \\ 2 & -\overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{21} + \overline{Y}_{23} & -\overline{Y}_{23} \\ 3 & -\overline{Y}_{31} & -\overline{Y}_{32} & \overline{Y}_{31} + \overline{Y}_{32} \end{array}$$

On décompose la matrice $\|\overline{Y}\|_p$ en trois matrices simples pour lesquelles on calcule les matrices correspondantes.

$$\|\overline{Y}\|_p = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \overline{Y}_1 & & \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array} + \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & & & \\ 2 & & \overline{Y}_2 & \\ 3 & & & \end{array} + \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & & & \\ 2 & & & \\ 3 & & & \overline{Y}_3 \end{array}$$

$$(29)\quad \|\overline{Y}_s\|_p = \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline h & \frac{1}{3}\overline{Y}_1 & \frac{1}{3}\overline{Y}_1 & \frac{1}{3}\overline{Y}_1 \\ d & \frac{1}{3}\overline{Y}_1 & \frac{1}{3}\overline{Y}_1 & \frac{1}{3}\overline{Y}_1 \\ i & \frac{1}{3}\overline{Y}_1 & \frac{1}{3}\overline{Y}_1 & \frac{1}{3}\overline{Y}_1 \end{array} + \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline h & \frac{1}{3}\overline{Y}_2 & \frac{1}{3}a^2\overline{Y}_2 & \frac{1}{3}a\overline{Y}_2 \\ d & \frac{1}{3}a\overline{Y}_2 & \frac{1}{3}\overline{Y}_2 & \frac{1}{3}a^2\overline{Y}_2 \\ i & \frac{1}{3}a^2\overline{Y}_2 & \frac{1}{3}a\overline{Y}_2 & \frac{1}{3}\overline{Y}_2 \end{array} +$$

$$+ \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline h & \frac{1}{3}\overline{Y}_3 & \frac{1}{3}a\overline{Y}_3 & \frac{1}{3}a^2\overline{Y}_3 \\ d & \frac{1}{3}a_2\overline{Y}_3 & \frac{1}{3}\overline{Y}_3 & \frac{1}{3}a\overline{Y}_3 \\ i & \frac{1}{3}a\overline{Y}_3 & \frac{1}{3}a^2\overline{Y}_3 & \frac{1}{3}\overline{Y}^2 \end{array}$$

On décompose aussi la matrice $\|\overline{Y}\|_m$ en trois matrices simples pour lesquelles on calcule les matrices correspondantes

$$\|\overline{Y}\|_m = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & \overline{Y}_{23} & -\overline{Y}_{23} \\ 3 & & -\overline{Y}_{23} & \overline{Y}_{23} \end{array} + \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \overline{Y}_{31} & & -\overline{Y}_{31} \\ 2 & & & \\ 3 & -\overline{Y}_{31} & & \overline{Y}_{31} \end{array} +$$

$$+ \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \overline{Y}_{12} & -\overline{Y}_{12} & \\ 2 & -\overline{Y}_{12} & \overline{Y}_{12} & \\ 3 & & & \end{array}$$

$$(30)\quad \|\overline{Y}_s\|_m = \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline h & & & \\ d & & \overline{Y}_{23} & -\overline{Y}_{23} \\ i & & -\overline{Y}_{23} & \overline{Y}_{23} \end{array} + \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline h & & & \\ d & & \overline{Y}_{31} & -a^2\overline{Y}_{31} \\ i & & -a^2\overline{Y}_{31} & \overline{Y}_{31} \end{array} +$$

	h	d	i
h			
+ d		$\overline{Y}_{12}$	$-a^2\overline{Y}_{12}$
i		$-a^2\overline{Y}_{12}$	$\overline{Y}_{12}$

On construit les schémas équivalents de l'annexe II (1, 2, 3) en se basant sur les matrices de (29).

La première des matrices (29) fait voir que les trois réseaux fictifs vus aux bornes $h - h_0$, $d - d_0$, $i - i_0$ (fig. 4) sont couplés en série avec une admittance $\frac{1}{3}\overline{Y}_1$. Le couplage des réseaux fictifs peut être obtenu par des transformateurs ou par des liaisons galvaniques en tenant compte des mêmes observations du paragraphe 2. 2.

Les deux dernières matrices imposent des couplages par des transformateurs rotateurs tels qu'on les a fait voir dans l'annexe II (2, 3).

Les matrices de (30) imposent des couplages qui n'affectent que les réseaux direct et inverse. On voit que la matrice $\|\overline{Y}_s\|$ correspondante à l'admittance $\overline{Y}_{23}$ est égale à la matrice $\|\overline{Y}\|$ et par conséquent les réseaux direct et inverse doivent etre couplés par l'admittance $\overline{Y}_{23}$ de même que les phases 2 et 3 sont couplées par la même admittance (l'annexe II, 7). Dans ce cas le couplage par transformateurs à rapport 1/1 n'est pas nécessaire, car la liaison galvanique introduite, ne provoque aucun déplacement artificiel des potentiels des réseaux fictifs.

Les matrices correspondant aux admittances $\overline{Y}_{31}$ et $\overline{Y}_{12}$contiennent l'opérateur „a" ; c'est pourquoi le couplage des réseaux doit être effectué par des transformateurs rotateurs (l'annexe II 8, 9).

2. 4. *Les schémas équivalents de quelques asymétries simples*

On peut obtenir des schémas équivalents pour les cas les plus varies d'asymétrie, à l'aide des annexes I et II.

Ces schémas restent valables pour n'importe quelle valeur complexe des impédances et des admittances, y compris les valeurs limite $\overline{Z} = \infty$ et $\overline{Y} = \infty$. Dans ces derniers cas, les matrices $\|\overline{Z}_s\|$ et $\|\overline{Y}_s\|$ perdent leur sens si bien que leur utilisation dans les calculs et les démonstrations n'est plus possible. Pour l'obtention des schémas équvalents de ces asymétries caractérisées par les valeurs limite des paramètres, il est utile d'introduire des matrices inverses qui ne perdent pas leurs sens et qui resultent des relations (27) :

$$\begin{cases} \|\overline{Z}_s\|^{-1} = \frac{1}{3}\|\overline{C}_s\|_t^* \|\overline{Z}\|^{-1}\|\overline{C}_s\| \\ \|\overline{Y}\|_s^{-1} = \frac{1}{3}\|\overline{C}_s\|_t^* \|\overline{Z}\|^{-1}\|\overline{C}_s\| \end{cases}$$

1°. *L'interruption de deux phases.* En considérant les matrices :

$$\|\overline{Z}\| = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \overline{Z}_1 & & \\ 2 & & \overline{Z}_2 & \\ 3 & & & \overline{Z}_3 \end{array} \qquad \|\overline{Z}\|^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1/\overline{Z}_1 & & \\ 2 & & 1/\overline{Z}_2 & \\ 3 & & & 1/\overline{Z}_3 \end{array}$$

et en introduisant les conditions $\overline{Z}_2 = \overline{Z}_3 = \infty$ conformement à (21), il résulte que :

$$\|\overline{Z}\|^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1/\overline{Z}_1 & & \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array} \qquad \|\overline{Z}_s\|^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline h & {}^1/_3\overline{Z}_1 & {}^1/_3\overline{Z}_1 & {}^1/_3\overline{Z}_1 \\ d & {}^1/_3\overline{Z}_1 & {}^1/_3\overline{Z}_1 & {}^1/_3\overline{Z}_1 \\ i & {}^1/_3\overline{Z}_1 & {}^1/_3\overline{Z}_1 & {}^1/_3\overline{Z}_1 \end{array}$$

La matrice $\|\overline{Z}_s\|^{-1}$ est une matrice d'admittance et elle impose le couplage de l'annexe II (1) ou celui de l'annexe II (5) pour le cas particulier $\overline{Z}_1 = 0$. On introduit ce dernier couplage entre les bornes des réseaux de la fig. 4 (b) ainsi qu-il ressort de la fig. 10. Si l'on suppriment la mise à la terre de deux réseaux fictifs, le couplage par transformàteurs peut être alors remplacé par des liaisons galvaniques (fig. 10).

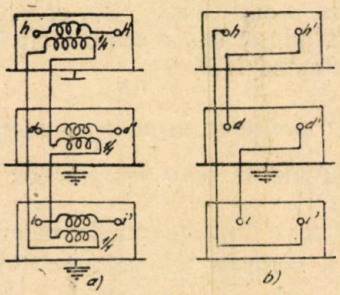


Fig. 10. L'interruption de deux phases

2°. *La mise à la terre des deux phases.*

En considérant les matrices :

$$\|\overline{Y}\| = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \overline{Y}_1 & & \\ 2 & & \overline{Y}_2 & \\ 3 & & & \overline{Y}_3 \end{array} \qquad \|\overline{Y}\|^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1/\overline{Y}_1 & & \\ 2 & & 1/\overline{Y}_2 & \\ 3 & & & 1/\overline{Y}_3 \end{array}$$

et en introduisant les conditions $\overline{Y}_2 = \overline{Y}_3 = \infty$ il résulte de (21) que :

$$\|\overline{Y}\|^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1/\overline{Y} & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline 3 & & & \end{array} \qquad \|\overline{Y}_s\| = \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline h & {}^1/_3\overline{Y}_1 & {}^1/_3\overline{Y}_1 & {}^1/_3\overline{Y}_1 \\ \hline d & {}^1/_3\overline{Y}_1 & {}^1/_3\overline{Y}_1 & {}^1/_3\overline{Y}_1 \\ \hline i & {}^1/_3\overline{Y}_1 & {}^1/_3\overline{Y}_1 & {}^1/_3\overline{Y}_1 \end{array}$$

La matrice $\|\overline{Y}_s\|^{-1}$ est une matrice d'impédance et elle impose le couplage de l'annexe I (1), respectivement celui de l'annexe I (5), pour le cas particulier $\overline{Y}_1 = O$. On introduit ce dernier couplage aux bornes des réseaux fictifs de la fig. 4 (c) comme on le voit sur la fig. 11 (a).

Le remplacement du couplage magnétique par de simples liaisons galvaniques peut être réalisé sans interrompre la mise à la terre des réseaux fictifs comme il ressort de la fig. 11 (b).

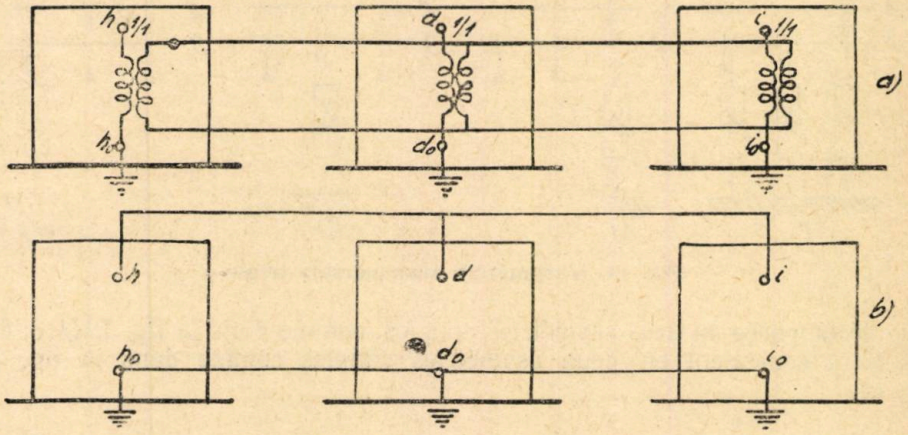


Fig. 11. La mise à la terre des deux phases

2. 5. *Les schemas équivalents des asymétries multiples.*

On obtient les schémas équivalents par le couplage des réseaux fictifs correspondant à chacune des asymétries simples dans lesqueles on peut décomposer l'asymétrie multiple étudiée.

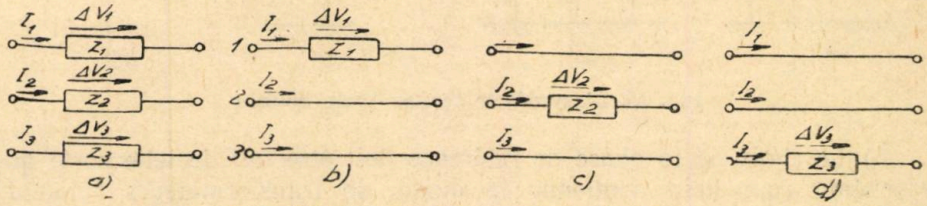


Fig. 12. L'asymétrie longitudinale triple

Pour obtenir les plus simples schémas équivalents il est récommandable de tenir compte des considérations suivantes :

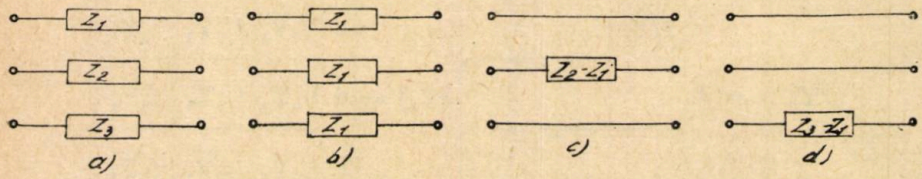


Fig. 13. L'asymétrie longitudinale double

a) L'asymétrie multiple étudiée doit être décomposée en aussi peu que possible d'asymétries simples. Par exemple l'asymétrie multiple de la fig. 8 (a) peut être décomposée en trois asymétries simples, comme dans la fig. 8 (b, c, d) ou bien seulement en deux asymétries simples, comme dans la fig. 9 (c, d), tandis que l'asymétrie multiple de la fig. 10 (a) peut

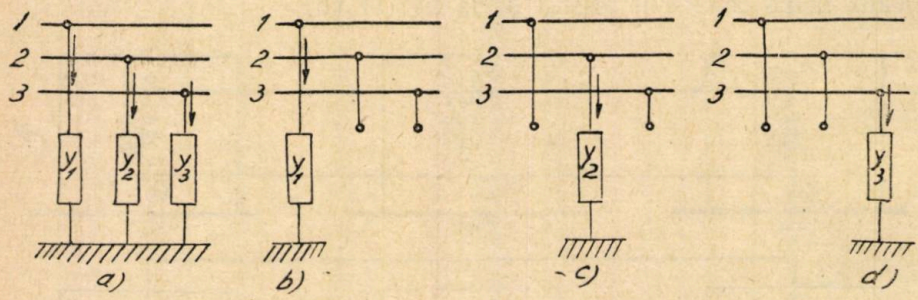


Fig. 14. L'asymétrie transversale triple

être décomposée en trois asymétries simples, comme dans la fig. 10 (a, c, d), ou bien, seulement en deux asymétries simples comme dans la fig. 11 (b, c).

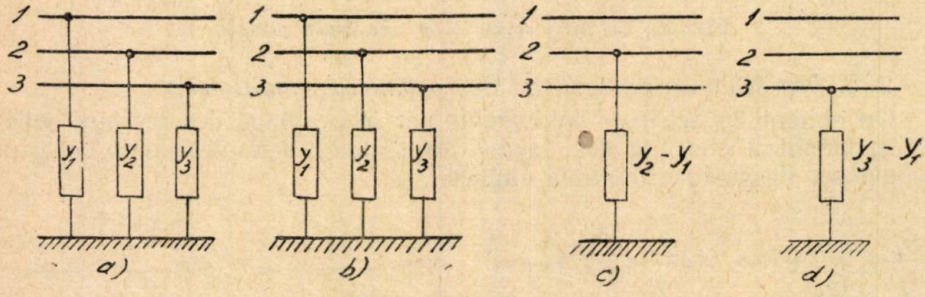


Fig. 15. L'asymétrie transversale double

b) Le choix de la phase de référence doit être fait de telle sorte que le schéma équivalent contienne le moins de transformateurs rotateurs possibles.

c) Il faut, autant que possible, remplacer les couplages magnétiques par de simples liaisons galvaniques. En ce qui concerne ces dernières, on peut remarquer que les couplages entre les réseaux fictifs peuvent être généralement divisès en deux catégories.

I-Les couplages de la première catégorie qui, lorsqu'ils sont réalisés par de liaisons galvaniques, produisent des déplacements des potentiels des réseaux fictifs. L'introduction des liaisons galvaniques dans le schéma équivalent peut être faite dans ce cas uniquement pour un seul couplage, après avoir interrompu la mise à la terre de deux réseaux fictifs.

II-Les couplages de la deuxième catégorie, qui lors-qu'ils sont réalisés par de liaisons galvaniques, ne produisent pas de déplacement des potentiels des réseaux fictifs. L'introduction des liaisons galvaniques dans le schéma équivalent peut être faite pour n'importe quel couplage.

1°. *La rupture d'une phase avec mise à la terre.* On introduira entre les trois réseaux fictifs deux couplage, l'un pour l'interruption d'une phase (annexe I, 5) l'autre pour la mise à la terre d'une phase (annexe II, 5).

On obtient le schéma équivalent de la fig. 16 (b) où tous les deux couplages font partie de la première catégorie. En interrompant la mise à la terre des réseaux et en remplaçant un des couplages par des liaisons galvaniques, il résulte le schéma équivalent de la fig. 16 (c).

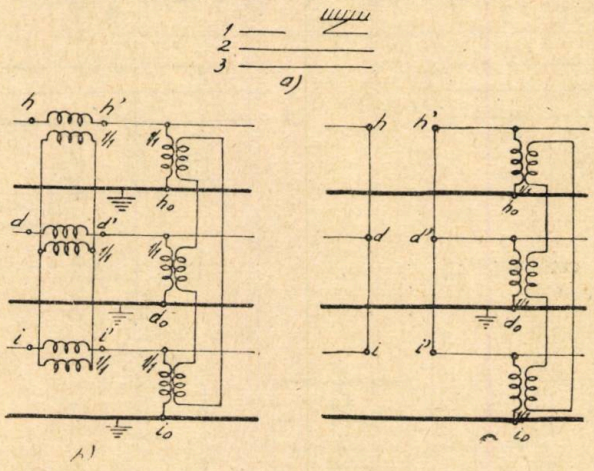


Fig. 16. La rupture d'une phase avec mise à la terre

On peut introduire sur ce dernier schéma une simplification en remplaçant le transformateur du réseaux direct par de simples liaisons galvaniques.

2°. *Court circuit entre deux phases par arc électrique et mise à la terre d'une de cettes phases.* En tenant compte que les impédances de l'arc sont celles de la fig. 17 (a) il s'ensuit que cette configuration peut être considérée comme une asymétrie simple telle qu'elle ressort de la fig. 17 (b).

En utilisant les réseaux de la fig. 4 (c) et en introduisant le couplage imposé par la rupture d'une phase (l'annexe I, 5), on obtient le schéma équivalent de la fig. 17 (c) qui peut être ensuite transformé, comme dans la fig. 17 (d).

3°. *La ligne aérienne qui fonctionne dans le systéme „deux conducteurs-terre“*. La ligne qui fonctionne dans le systéme, „deux conducteurs — terre“ représente une asymétrie tant longitudinale que transversale.

On étudie l'asymétrie longitudinale en considérant le schéma de la fig. 18 (a) et en calculant la matrice $\|\overline{Z}_s\|$ correspondant à la matrice $\|\overline{Z}\|$

$$\|\overline{Z}\| = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & \overline{Z}_p & \overline{Z}_m \\ 3 & & \overline{Z}_m & \overline{Z}_p \end{array}$$

$$\|\overline{Z}_s\| = \begin{array}{c|ccc} & h & d & l \\ \hline h & \frac{2}{3}(\overline{Z}_p+\overline{Z}_m) & -\frac{1}{3}(\overline{Z}_p+\overline{Z}_m) & -\frac{1}{3}(\overline{Z}_p+\overline{Z}_m) \\ d & -\frac{1}{3}(\overline{Z}_p+\overline{Z}_m) & \frac{1}{3}(2\overline{Z}_p-\overline{Z}_m) & \frac{1}{3}(-\overline{Z}_p+2\overline{Z}_m) \\ i & -\frac{1}{3}(\overline{Z}_p+\overline{Z}_m) & \frac{1}{3}(-\overline{Z}_p+2\overline{Z}_m) & \frac{1}{3}(2\overline{Z}_p-\overline{Z}_m) \end{array}$$

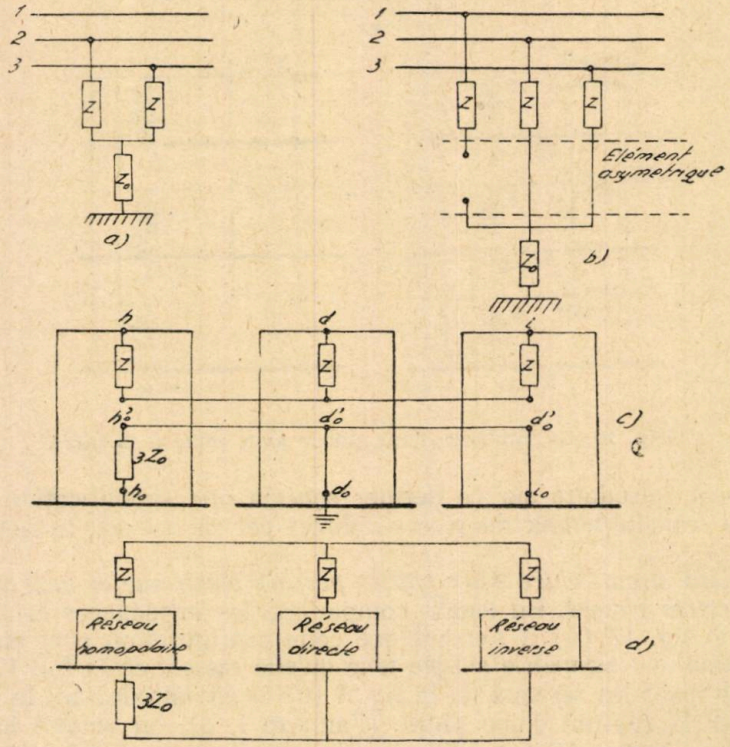


Fig. 17. Court circuit entre deux phases par arc électrique et mise à la terre d'une phase

Avant d'introduire les couplages entre les réseaux fictifs, on fait la remarque suivante : dans le cas de la ligne qui fonctionne dans le système „deux conducteurs — terre", il n'y a pas de possibilité d'une circulation de courant homopolaire et par conséquent le réseau homopolaire n'intervient pas. En ne considérant que le réseau direct et inverse, on obtient le schéma équivalent de la fig. 18 (b) ou l'on a noté :

$$\overline{Z}_{dd} = \overline{Z}_{ii} = \frac{1}{3}(2\overline{Z}_p - \overline{Z}_m)$$

$$\overline{Z}_{di} = \overline{Z}_{id} = \frac{1}{3}(-\overline{Z}_p + 2\overline{Z}_m)$$

On fait l'étude de l'asymétrie transversale en considérant le schéma de la fig. 19 (a) et en calculant $\|Y\|_s$ correspondant à la matrice $\|Y\|$.

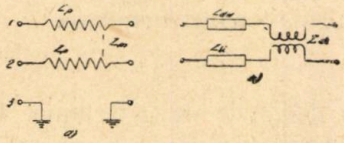


Fig. 18. L'asymétrie longitudinale de la ligne qui fonctionne dans le systéme „deux conducteurs-terre"

$$\|\overline{Y}\| = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & \overline{Y}_p + \overline{Y}_m & -\overline{Y}_m \\ 3 & & -\overline{Y}_m & \overline{Y}_p + \overline{Y}_m \end{array}$$

$$\|\overline{Y}_s\| = \begin{array}{c|ccc} & h & d & i \\ \hline h & \frac{3}{2}\overline{Y}_p & -\frac{1}{3}\overline{Y}_p & -\frac{1}{3}\overline{Y}_p \\ d & -\frac{1}{3}\overline{Y}_p & \frac{2}{3}\overline{Y}_p + \overline{Y}_m & \frac{2}{3}\overline{Y}_p - \overline{Y}_m \\ i & -\frac{1}{3}\overline{Y}_p & \frac{2}{3}\overline{Y}_p - \overline{Y}_m & \frac{2}{3}\overline{Y}_p + \overline{Y}_m \end{array}$$

Le schéma équivalent correspondant à la matrice $\|Y_s\|$ est donné dans la fig. 196 où l'on a noté :

$$\overline{Y}_{di} = \overline{Y}_{id} = \overline{Y}_m - \frac{2}{3}\overline{Y}_p \qquad \overline{Y}_d = \overline{Y}_p$$

$$\overline{Y}_{ih} = \overline{Y}_{hi} = \frac{1}{3}\overline{Y}_p \qquad \overline{Y}_i = \overline{Y}_p$$

$$\overline{Y}_{hd} = \overline{Y}_{hd} = \frac{1}{3}\overline{Y}_p \qquad \overline{Y}_h = 0$$

Etant donné le fait que la barre de tension du réseau homopolaire est libre, on peut calculer la résultante des admittances connexées entre les barres de tensions des réseaux direct et inverse, en obtenant le schéma simple de la fig. 19 (c).

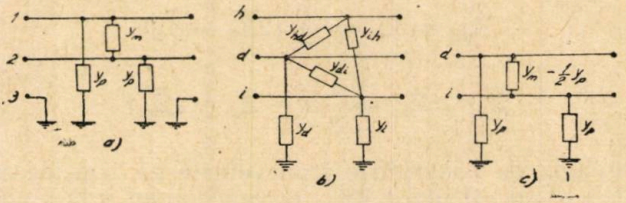


Fig. 19. L'asymétrie transversale de la ligne qui fonctionne das le système „deux conducteurs—terre"

Voici un exemple de calcul : On demande de déterminer l'asymétrie des tensions chez les consommateurs alimentés par une ligne qui fonctionne dans le système „deux conducteurs terre". On donne :

— la tension nominale de la ligne	— 35 kV
— la longueur de la ligne	— L = 30 Km
— Les conducteurs de la ligne	— 01 — Al — 35
— Les impédances du consommateur	
$Z_{cd} = (196 + j\,147)\,\Omega$	
$Z_{bi} = (\ 98 + j\ \ 49)\,\Omega$	

On considère comme nulles les impédances de la source génératrice et l'on néglije les admittances de la ligne.

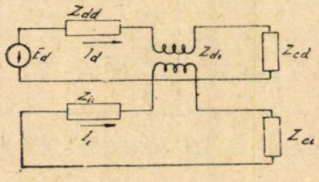
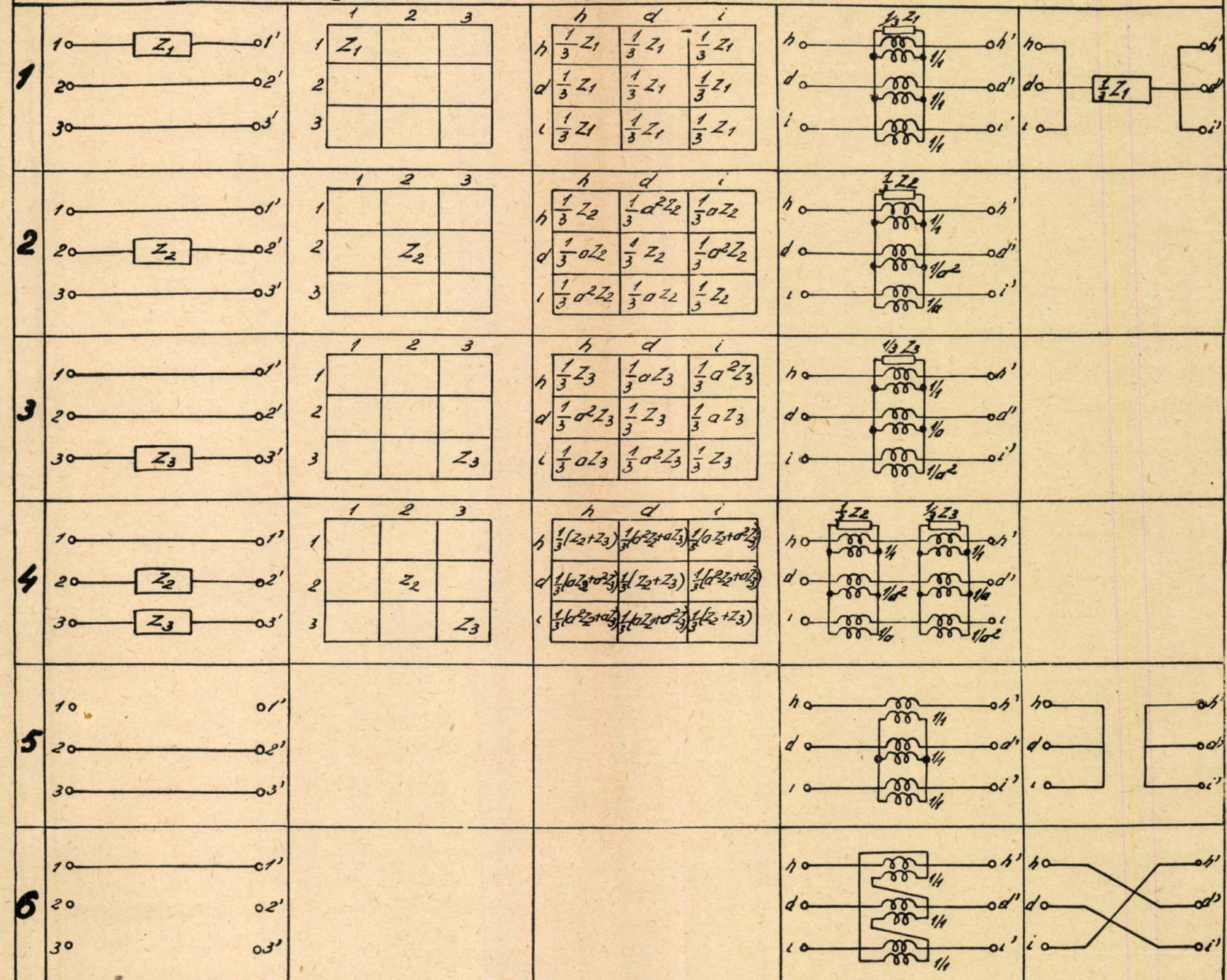


Fig. 20. Schéma équivalent pour la calcul de la ligne qui fonctionne dans le système deux „conducteurs-terre"

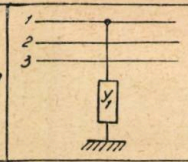
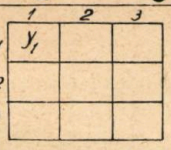
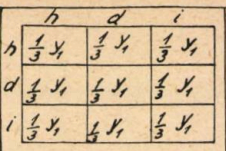
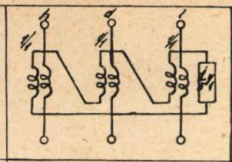
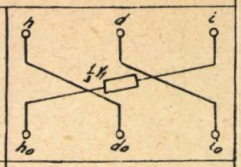
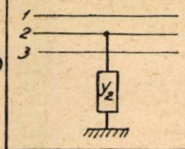
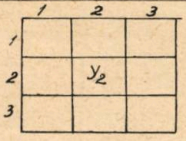
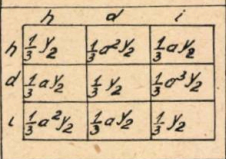
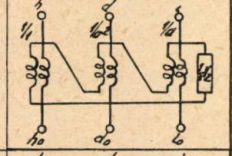
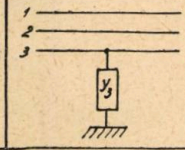
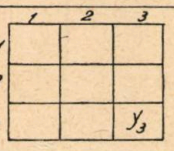
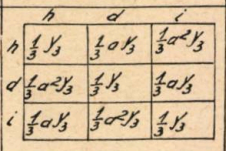
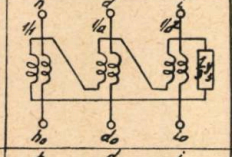
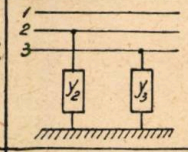
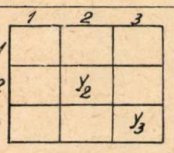
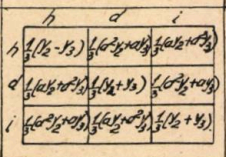
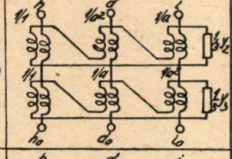
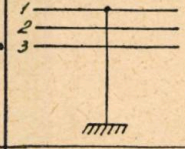
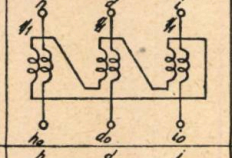
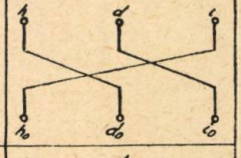
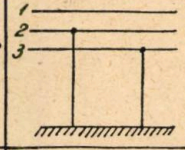
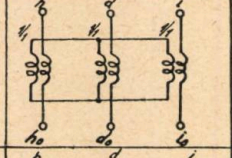
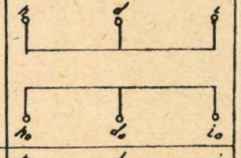
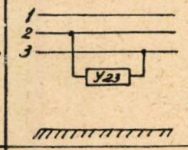
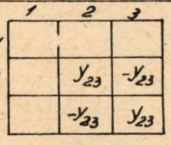
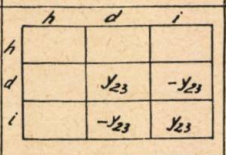
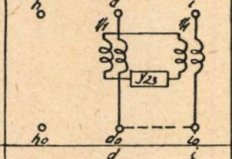
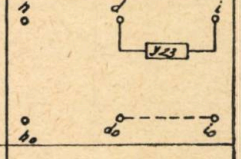
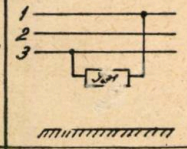
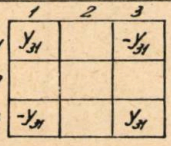
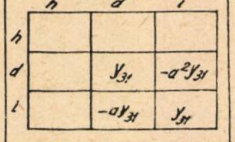
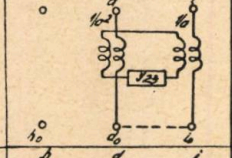
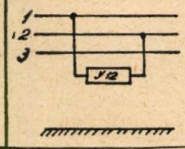
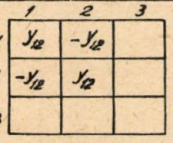
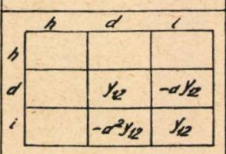
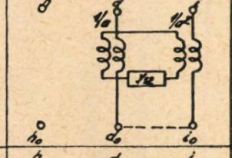
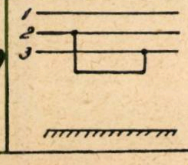
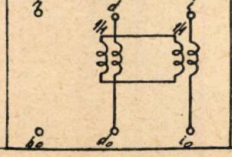
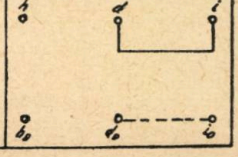
Dans la figure 20 on voit le schéma équivalent d'après lequel on fait le calcul. On écrit les relations :

$$\begin{cases} \overline{E}_d = \overline{Z}_{dd}\,\overline{I}_d + \overline{Z}_{di}\,\overline{I}_i + \overline{Z}_{cd}\,\overline{I}_d \\ 0 = \overline{Z}_{ii}\,\overline{I}_i + \overline{Z}_{di}\,\overline{I}_d + \overline{Z}_{ci}\,\overline{I}_i \end{cases}$$

L'annexe I - Asymetries longitudinales -



L'annexe II – Asymetries transversales. –

1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Les solutionos du système plus haut mentionné, seront :

$$\overline{I}_d = \frac{\overline{E}_d\,(\overline{Z}_{ii} + \overline{Z}_{ci})}{\Delta}$$

$$\overline{I}_i = \frac{\overline{E}_{dd} + \cdot\, \overline{Z}_{di}}{\Delta}$$

ou

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{Z}_{dd} + \overline{Z}_{cd} & \overline{Z}_{di} \\ \overline{Z}_{di} & \overline{Z}_{ii} + \overline{Z}_{ci} \end{vmatrix}$$

Les tensions aux bornes du consommateur sont les suivantes :

$$\overline{U}_{cd} = \overline{Z}_{cd}\,\overline{I}_d = \frac{\overline{E}_d}{\Delta}\,(\overline{Z}_{ii} + \overline{Z}_{ci})\,\overline{Z}_{cd}$$

$$\overline{U}_{ci} = \overline{Z}_{ci}\,\overline{I}_i = \frac{\overline{E}_d}{\Delta}\,\overline{Z}_{di}\,\overline{Z}_{ci}.$$

Le rapport des tensions est :

$$\frac{\overline{U}_{ci}}{\overline{U}_{cd}} = \frac{\overline{Z}_{di}}{\overline{Z}_{ii} + \overline{Z}_{ci}} \cdot \frac{\overline{Z}_{ci}}{\overline{Z}_{cd}}$$

Pour déterminer les impédances $\overline{Z}_{ii}$ et $\overline{Z}_{di}$ on calcule d'abord les impedances $\overline{Z}_p$ et $\overline{Z}_m$ (B_3) à l'aide des relations :

$$\overline{Z}_p = \left(R_o + j\,0{,}145\,\log\frac{D_e}{r_e} \right) L$$

$$\overline{Z}_m = \left(j\,0{,}145\,\log\frac{D_e}{d} \right) L$$

où l'on introduit les valeurs :

$R_o = 0{,}91\,\Omega$ /Km
$D_e = 1000$ m
$r_e = 3{,}78$ cm
$d = 3$ m
$L = 30$ Km

En faisant les calcuis, on obtient :

$$\overline{Z}_p = (0{,}91 + j\,0{,}79)\;30\,\Omega$$

$$\overline{Z}_m = (j\,0{,}37)\;30\,\Omega$$

et

$$\overline{Z}_{dd} = \overline{Z}_{ii}\,(13{,}2 + j\,12{,}1)\,\Omega$$

$$\overline{Z}_{di} = \overline{Z}_{id} = (-9{,}1 - j\,0{,}50)\,\Omega$$

Le module du rapport des tensions est le suivant:

$$\left|\frac{\overline{U}_{ci}}{\overline{U}_{cd}}\right| = \left|\frac{-9{,}1 - j\,0{,}05}{116{,}2 + j\,61{,}1} \cdot \frac{98 + j\,49}{196 + j\,147}\right| = \frac{110}{245} = 0{,}031$$

— On peut constater que l'asymétrie des tensions aux bornes des consommateurs est assez petite 3,1% et par conséquent, à ce point de vue, la ligne „deux conducteurs-terrè" ne crée pas de difficultés.

La Chaire de Centrales et Reseaux électriques
Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAFIE

1. *Socolov N. I.* — Построение и применение комплексных схем замещения при сложных несимметричных цепях. Электричество, н. 8, 1949.
2. *Cernin A. B.* — Короткие замыкания при неполнофазных режимах электрических систем. Г.Е.И. — 1952.
3. *Wagner C. F.* şi *Evans R. D.* — Symetrical components — New-York. Mebraw Hill — 1933.
4. *Kron G.* — A short course în tensor analysis for electrical engineers. New-York John Wiley — 1942.
5. *Clarke E.* — Circuit analysis of a. c. power sisteme, New-York John Wiley — 1950.
6. *Potolea E.* — Maşina sincronă, element nesimetric al reţelelor electrice. Electrotehnica Nr. 11 — 1958 — Bucureşti.

ЕКИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ ЕЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОЛУЧЕННЫЕ С ПОМОЩЮ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

(Краткое содержание)

В этой статье излагается единый метод получения екивалентных схем електрических цепей с помощю матричного исчисления. Доказывается как могут быть получены екивалентные схемы для любых несиметрий и таким образом строятся некоторые новые схемы как на пример схемы 8 и 9 из второго приложения и схемы показаные на рисунках 14 и 15.

Первые две показаные схемы дополняют таблицу простых несиметрических схем а последние дают возможность изучения работы линий в системе „два проводника — земля".

THE APPLICATION OF MATRICIAL CALCULUS TO STUDY OF THE POWER NETWORKS EQUIVALENT SCHEEMS

(Summary)

An unitarian method to obtain by the matricial calculus the equivalent scheems of the power networks is exposed in the article. Now can be obtained the equivalent scheems for every assymetry it is also laid out, arriving on this occasion to construction of new scheems as that of annex II (8.9) and those of item 14 an 15. The first scheems mentioned are going to fill a gap in the tables of simple assymetries and the last ones present the possibility to study the work of a line in the „two conductors-earth" system.

SCHÉMAS ÉQUIVALENTS DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES OBTENUS A L'AIDE DU CALCUL MATRICIEL

(Résumé)

On expose dans cet article une méthode unitaire pour obtenir des schémas équivalents des réseaux électriques à l'aide du calcul matriciel. On y fait voir comment on peut obtenir les schémas équivalents pour n'importe quelle asymétrie et l'on arrive à cette occasion, à la construction de quelques schémas inédits, ceux de l'annexe 11 (8,9) et ceux de la figure 14 et 15. Les premiers schémas mentionnés viennent combler une lacune du tableau des asymétries simples et les derniers, offrent la possibilité d'étudier le fonctionnement d'une ligne dans le systèmes „deux conducteurs terre".

BESTIMMUNG GLEICHWERTIGER SCHEMEN ELEKTRISCHER NETZE DURCH MATRIZENRECHNUNG

(Zusammenfassung)

In diesem Aufsatz wird eine einheitliche Methode zur Bestimmung der gleichwertigen Schemen elektrischer Netze mit Hilfe der Matrizenrechnung mitgeteilt.

Es wird gezeigt wie man für jede Asymetrie die gleiwertigen Schemen erhält. Auf diesem Wege lassen sich bisher umbekannte Schemen konstruieren, wie jene im Anhang II (8,9) und Bild 14 u. 15. Erstere füllen eine bischerige Lücke der Tabelle der einfachen Asymetrien, während letzetere die Untersuchung einer im „Zwei Leiter-Erde' System arbeitenden Leitung gestatten.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

ELECTRONICA

621.285.3

THE INFLUENCE OF HARMONICS ON THE ELECTRONIC OSCILLATOR PROVIDED WITH A NONLINEAR REACTIVE ELEMENT

by MIHAI DRĂGĂNESCU

1. *Introduction.*

In a previous work [1] it was established a differential equation of an electronic oscillator taking into account the nonlinearity of the grid-cathode capacitance. Establishing this equation the most important restrictions were: a) grid currents neglected, with fixed negative bias for the control grid and b) the dynamic characteristic of the electron tube coincides with the static one, that is the electron tube has a great internal resistance in comparison with the anode load. The established equation had the form:

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \varepsilon\omega_0[1 + Bh(q)]\frac{dq}{dt} + \omega_0^2[q + a(q)] = 0 \qquad (1)$$

where q represents the electric charge of the nonlinear condenser of the grid resonant circuit, $g(q)$ is a polynomial begining with q^2 and wich expresses the reactive nonlinearity, $h(q)$ is a polynomial begining in general with q, being affected by both active and reactive nonlinearities and ε is the famous van der Pol's parameter [2]. It is to be noted that the equation is written in q (the electric charge) because it has a simpler form [3] than in u (the difference of potential across the condenser). It is to be noted also that the nonlinear coefficient of the first derivatives in equation (1) is affected not only by the nonlinear transfer characteristic of the electron tube but also in a great measure by the reactive nonlinearity [1].

In the work [1] the equation (1) was solved by method of equivalent linearisation, which takes into account only the fundamental, neglecting the harmonics. This method applyes only when ε is a small parameter, but even in this case the solution obtained had shown the effect of the reactive nonlinearity on the amplitude and the frequency of oscillations. A more powerfull method is at disposition when ε is small, the wellknown „method of the small parameter „of Poincaré and Andronov [4] [5] [7] which takes into account also the harmonics. There are methods of treating the equation (1) when ε is very great and the oscillator accuses relaxation oscillations [4] [5], but are not available methods for intermediate values of ε. In such a case, a useful information one obtains at least for the frequency of oscillations if one expresses it in function of

the procent of harmonics. Van der Pol [2] obtained for the equation of the electronic oscillator with linear reactive elements the formula

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k^2}{\sum_{k=1}^{n} k^2 A_k^2} \tag{2}$$

where ω it the frequency of oscillations, ω_0 the resonant frequency of the tank circuit and A_k the amplitude of the kth harmonic. Such a formula is useful form a teoretical point of vue but can be used also for explaining experimental results [6]. It is well known that in formula (2) the harmonics are depending on ε.

In this paper the formula (2) is completed. Completed in the sense that the new formula does take into account the influence of the variation of the d.c. component form the static to the dynamic regim and the influence of the reactive nonlinearities.

2. *The new general formula.*

In order to establish the new formula one suppose that the differential equation of the oscillator has the form (1) which is now rewritten

$$\ddot{x} - \varepsilon\omega_0[1+h(x)]\dot{x} + \omega_0^2[x+g(x)] = 0 \tag{3}$$

where $h(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$ and $g(x) = \alpha x^2 + \beta x^3 + \ldots$. One admits that the equation (3) has a periodic solution which takes the form:

$$x = \Delta A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t + \Phi_k) \tag{4}$$

where ΔA_0 represents the increasing from the static to the dynamic regim of the stationary component.

Multiplying equation (1) by $x\,dt$ and integrating over a period one obtains:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x\ddot{x}\,dt - \frac{\varepsilon_0\omega_0}{T}\int_0^T [1+h(x)]x\dot{x}\,dt + \frac{\omega_0^2}{T}\int_0^T x[x+g(x)]dt = 0 \tag{5}$$

Taking into account that,

$$\frac{1}{T}\int_0^T x\ddot{x}\,dt = \frac{1}{T}x\dot{x}\Big|_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}^2\,dt = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k^2 k^2\omega^2 \tag{6}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2\,dt = (\Delta A_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \tag{7}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T [1+h(x)]x\dot{x}\,dt = \frac{1}{T}\oint [1+h(x)]x\,dx = 0 \tag{8}$$

one obtains easily:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k^2 + 2(\Delta A_0)^2 + \frac{2}{T}\int_0^T x\, g(x)\, dt}{\sum_{k=1}^{n} k^2 A_k^2} \tag{9}$$

which is the new formula. Let us examine two cases:

a) *The case when the reactive elements are linear.*

In this case $g(x) \equiv 0$. This condition leads also to $\Delta A_0 = 0$. Indeed, an equation of the form

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{10}$$

has allways $\Delta A_0 = o$. This is to be understood also on the physical model of the electronic oscillator which is described by such an equation where x represents the grid-catode difference of potential (or the electric charge on the condenser of the grid resonant circuit). Neglecting grid currents at an oscillator whith fixed negative bias of the control grid, it is impossible any change of the medium value of the grid-cathode difference of potential (or respectively of the electric charge). It is quite different when the condenser has a nonlinear capacitance, but this question will be examined later.

In conclusion, for an electronic oscillator wich has a fixed negative bias of the grid and the reactive elements are linear the formula (9) reduces to van der Pol's formula (2).

b) *The case when the reactives elements are nonlinear,* when the oscillator is described by equation (3). In general, in this case $\Delta A_0 \neq 0$. Even at a simpler conservative equation, with nonlinear restoring force (or nonlinear reactive elements).

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 + \beta x^3 = 0 \tag{11}$$

the solution has $\Delta A_0 = -\alpha \frac{A^2}{2}$ where A is the amplitude of oscillation. This is due to the term αx^2. If $\alpha = 0$ the reactive nonlinearity is symmetric towards the origin and $\Delta A_0 = 0$. Also the equation (3) has in general $\Delta A_0 \neq 0$ In annex I, the equation (3) is solved using the method of Lindstedt (one variant of the method of the small parameter). In order to do this easily it was supposed that ε is a small parameter and that α and β are also small parameters of the same order as ε. This has no importance here because the aim of that calculus was to show a value for the d.c. component which was found to be

$$\Delta A_0 = -\alpha \frac{A^2}{2} \tag{12}$$

A being the amplitude of the fundamental. Also for equation (3) like for equation (11) the d.c. component is due to the same term αx^2. In this case the formula (9) must be taken into consideration. That formula will be developed in the next paragraph under a more suitable form.

3. *Another form of formula (9).*

It was shown in the beginning of the second paragraph that $g(x)$ has the form

$$g(x) = \alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4 + \delta x^5 + \dots \tag{13}$$

The integral from the expresion (9) becomes:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x\, g(x)\, dx = \frac{\alpha}{T}\int_0^T x^3\, dt + \frac{\beta}{T}\int_0^T x^4\, dt + \dots\dots \tag{14}$$

where

$$x = \Delta A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t + \Phi_k) \tag{15}$$

The calculus of the first two integrals of the second member of the relation (14) is given in annex II and the results are:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^3\, dt = (\Delta A_0)^3 + \frac{3}{T}\Delta A_0 \sum_{k=1}^{n} A_k^2 - \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\nu/2} A_k^2 A_{2k} \sin(\Phi_{2k} - 2\Phi_k) =$$

$$= f_\alpha(\Delta A_0, A_1, A_2, \dots, A_n; \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n) \tag{16}*)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^4\, dt = (\Delta A_0)^4 + 3(\Delta A_0)^2 \sum_{k=1}^{n} A_k^2 - 3(\Delta A_0)\sum_{k=1}^{\nu/2} A_k^2 A_{2k} \sin(\Phi_{2k} - 2\Phi_k) +$$

$$+ \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n} A_k^4 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu/3} A_k^3 A_{3k} \cos(3\Phi_k - \Phi_{3k}) + \frac{3}{4}\sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq l)}}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k^2 A_l^2 -$$

$$- \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\xi/4} A_k^2 A_{2k} A_{4k} \cos(2\Phi_k - \Phi_{2k} + \Phi_{4k}) +$$

$$+ \frac{1}{8}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1 \\ k+l=m=p \\ k\neq l\neq m\neq p}}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} A_k A_l A_m A_p \cos(\Phi_k + \Phi_l + \Phi_m + \Phi_p) -\right.$$

*) In expression (16), $\nu = n$, if n is an even numebr. but $\nu = n - 1$ if n is an odd number.

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\k+l=m-p\\k\neq l\neq m\neq p}}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} A_k A_l A_m A_p \cos(\Phi_k+\Phi_l+\Phi_m-\Phi_p) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\k-l=m+p\\k\neq l\neq m\neq p}}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} A_k A_l A_m A_p \cos(\Phi_k-\Phi_l+\Phi_m+\Phi_p) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\k-l=m-p\\k\neq l\neq m\neq p}}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} A_k A_l A_m A_p \cos(\Phi_k \quad \Phi_l+\Phi_m-\Phi_p) =$$

$$=\frac{3}{8}A_1^4+f_\beta(\Delta A_0, A_1, A_2, \ldots, A_p;\ \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) \qquad (17)^*)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^5\,dt = \ldots\ldots = f_\gamma(\Delta A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n;\ \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) \qquad (18)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^6\,dt = \ldots\ldots = \frac{10}{32}A_1^6+f_\delta(\Delta A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n; \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) \qquad (19)$$

The functions f_α, f_β, ... have the property that for

$$\Delta A_0 = A_2 = A_3 = \ldots = A_n = 0 \qquad (20)$$

they are all equal to zero

$$f_\alpha = f_\beta = f_\gamma = f_\delta = \ldots = 0 \qquad (21)$$

Taking into account the relations (14), (16), (17), (18), (19),... the formula (9) becomes:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k^2+\left[\frac{3}{4}\beta A_1^4+\frac{10}{16}\delta A_1^6+\ldots\right]+\left[2(\Delta A_0)^2+2\alpha f_\alpha+2\beta f_\beta+2\gamma f_\gamma+\ldots\right]}{\sum_{k=1}^{n} k^2 A_k^2} \qquad (22)$$

If we note

$$f_{A1} = \frac{3}{4}\beta A_1^4+\frac{10}{16}\delta A_1^6+\ldots\ldots \qquad (23)$$

*) In expresion (17), ν is the first number (*numbering from n to 1*) divisible by 2, η is the first number divizible by 3, and ξ by 4.

and

$$f_{arm} = \frac{2(\Delta A_0^5) + 2\alpha f_\alpha + 2\beta f_\beta + 2\gamma f_\gamma + \ldots}{f_{A1}} \tag{24}$$

then the formula (22) becomes :

$$\boxed{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k^2}{\sum_{k=1}^{n} k^2 A_k^2}\left[1 + \frac{f_{A1}}{\sum_{k=1}^{n} A_k^2}(1 + f_{arm})\right]} \tag{25}$$

This is the corrected form of van der Pol's formula (2). It was arranged in suc ha form to compare it with formula (2). Van der Pol's expresion is corrected here by a factor equal to one plus a function depending on the amplitude of the harmonics (and also on the d.c. component ΔA_0). This functon in turn is composed of two terms, one of them $\frac{f_A^2}{\Sigma A_k^2}$ depending essentially on the fundamental and the other on the harmonics. The expression correcting Van der Pol 's formula is depending only on the reactive nonlinear element. This arrangement of formula (25) is valuable especialy in the case of a small procent of harmonics.

Sometimes it is preferable to calculate $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ which is easily found to be

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\sum_{k=1}^{n}(k^2 - 1) A_k^2}{2\sum_{k=1}^{n} k^2 A_k^2} + \frac{f_{A1}}{2\sum_{k=1}^{n} k^2 A_k^2}(1 + f_{arm}) \tag{26}$$

Such a formula is usefull in considering the question of frequency stability of the electronic oscillator. The relative frequency deviation as it may be seen from formula (26) has a wellknown first term completed by a second term wich represents the influence of the nonlinear reactive element.

4. *The case when the procent of harmonics is small.*

Let us suppose that the procent of harmonics is relatively small. For this it is supposed that α and β are small quantities of the same order with ε. Moreover, γ and δ will be small quantities of second and third order and so on. In such a case in annex I *) is shown that ΔA_0, A_2, A_3

*) see (I.20).

and A_4 are of the same order with ε Then, the expresiion of f_α and from (16) an (17) will de arranged after the order of magnittude:

$$f_\alpha = \left[\frac{3}{2}\Delta A_0 \cdot A_1^2 - \frac{3}{4}A_1^2 \cdot A_2 \sin(\Phi_2 - 2\Phi_1)\right] + \\ + \left[\frac{3}{2}\Delta A_0 \cdot A_2^2 - \frac{3}{4}A_2^2 A_4 \sin(\Phi_4 - 2\Phi_2)\right] + \ldots \quad (27)$$

$$f_\beta = -\frac{1}{2}A_1^3 A_3 \cos(3\Phi_1 - \Phi_3) + \left[3(\Delta A_0)^2 A_1^2 - 3(\Delta A_0)A_1^2 A_2 \cdot \sin(\Phi_2 - \Phi_1) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2}A_1^2(A_2^2 + A_3^2 + A_4^2) - \frac{3}{2}A_1^2 A_2 A_4 \cos(2\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_4)\right] + \ldots \quad (28)$$

The first great parantheses of (27) is of the order of magnetude of ε, the second of ε_2, etc.... In (28) the first term is of the order of magnitude of ε, the parantheses is of ε^2, etc.... In general the other similar functions will be of the same structure

$$f_\gamma = M_1\varepsilon + M_2\varepsilon^2 + \ldots \quad (29)$$

$$f_\delta = N_1\varepsilon + N_2\varepsilon^2 + \ldots \quad (30)$$

Then

$$f_{arm} = \frac{2\Delta A_0)^2 + 2\left\{\alpha\left[\frac{3}{2}\Delta A_0 \cdot A_1^2 - \frac{3}{4}A_1^2 A_2 \sin(\Phi_2 - 2\Phi_1)\right] - \right.}{\frac{3}{4}\beta A_1^4 + \frac{10}{16}\delta A_1^6 + \ldots} \\ \frac{\left. - \beta A_1^3 A_3 \cos(3\Phi_1 - \Phi_3)\right\} + \ldots}{\frac{3}{4}\beta A_1^4 + \frac{10}{16}\delta A_1^6 + \ldots} \quad (31)$$

where the denominator has the written term $\sim\varepsilon^2$. The numerator has the first term $\sim\varepsilon$, the second $\sim\varepsilon^2$ and so on. Neglecting at the denominator the terms superior to ε, one obtains

$$f_{arm} = \frac{8}{3}\cdot\frac{(\Delta A_0)^2}{\beta A_1^4} + \frac{2\alpha\left[\frac{3}{2}\Delta A_0 \cdot A_1^2 - \frac{3}{4}A_1^2 A_2 \sin(\Phi_2 - 2\Phi_1)\right]}{\frac{3}{4}\beta A_1^4} \\ \frac{-\beta A_1^3 A_3 \cos(3\Phi_1 - \Phi_3)}{\frac{3}{4}\beta A_1^4} + \ldots = F_{arm} + \ldots \quad (32)$$

These two first term of f_{arm} which are noted by F_{arm} are of the order of magnitude of ε. Then one may write,

$$f_{A1}(1+f_{arm}) = \frac{3}{4}\beta A_1^4 + \frac{3}{4}\beta A_1^4 F_{arm} + \ldots =$$

$$= \frac{3}{4}\beta A_1^4 + \mathcal{A}\varepsilon^2 + \ldots \tag{33}$$

where

$$\mathcal{A} = \frac{3}{4} \cdot \frac{A_1^4 \beta F_{arm}}{\varepsilon^2} \tag{34}$$

and the expression (26) becomes

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\sum_{k=2}^{n}(k^2-1)A_k^2}{2\sum_{k=1}^{n}k^2A_k^2} + \frac{\frac{3}{4}\beta A_1^4 + \mathcal{A}\varepsilon^2 + \ldots.}{2\sum_{k=1}^{n}k^2A_k^2} \tag{35}$$

or,

$$\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\sum_{k=2}^{n}(k^2-1)A_k^2}{2A_1^2} + \frac{3}{8}\beta A_1^2 + \frac{\mathcal{A}}{2A_1^2}\varepsilon^2 + \ldots} \tag{36}$$

This formula must be used for an oscillator with a small procent of harmonics that is for the stable frequency oscillators. The formula (36) shows that near the first van der Pol 's term it must be added the term $\frac{3}{8}\beta A_1^2 + \ldots$ which represents *directly* the nonlinear reactance. The nonlinearity of the reactance influences also the harmonics which enter into the first term, but *it must be emphasized that the term* $\frac{3}{8}\beta A_1^2$ *has a greater importance.* Indeed, if ε and β are small numbers of the first order, then the first harmonics have their amplitude of the same order of magnitude as ε (this is well known and can be seen on the solution of equation (9) in annex I). If so, the second term of (36) is a small quantity of the first order and the first term is a small quantity of the second order.

The analysis of this paragraph is therefore setting of the great importance of the nonlinear effects of reactances on the frequency of oscillations of an electronic oscillator. Before all we must think of the nonlinearty of the reactance elements and afterwards of the harmonics. Thinking of the nonlinear reactance it results that it must be as small as possible, as constant as possible, and the amplitude of oscillations to be small and constant. These are the first conditions for a good constant frequency oscillator. The fact that the most important correction for the

frequency of oscillations is given by the term $\frac{3}{8}\beta A_1^2$ was proofed in another work [1], this term appearing even when the harmonics are completly neglected.

Electronic laboratories
Polytechnical Institute of Bucharest

Annex 1

In this annex one solves equation (3) by Lindsted's method [8] [5]. For this one supposes that

$$h(x) = a x + b x^2 + c x^3 + \ldots \tag{I.1}$$

$$g(x) = \alpha x^2 + \beta x^3 + \ldots \tag{I.2}$$

and that α and β are small parameters of the same order of magnitude as ε, the other coefficents of $g(x)$ being small quantities of superior order to ε. This condition holds also for the superior coefficient of $h(x)$.

Noting

$$\frac{\beta}{\alpha} = T \tag{I.3}$$

$$\alpha = k\varepsilon \tag{I.4}$$

and introducing a new independent variable $\tau = \omega t$, the equation (3) becomes

$$\omega^2 \ddot{x} - \varepsilon \omega \omega_0 (1 + \alpha x + b x^2 + c x^3 + \ldots) \dot{x} + \\ + \omega_0^2 [x + k\varepsilon (x^2 + T x^3 + \ldots)] = 0 \tag{I.5}$$

Supposing that the periodic solution and the frequency of oscillations have the forms *)

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \tag{I.6a}$$

$$\omega = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots \tag{I.6b}$$

and introducing these expressions into the equation (6) one obtains the following sequence of differential equations:

$$1 \quad p_0^2 \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \tag{I,7}$$

$$\varepsilon \quad p_0^2 \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + 2 p_0 p_1 \ddot{x}_0 - \omega_0 p_0 \dot{x}_0 - a \omega_0 p_0 x_0 \dot{x}_0 - \\ - b \omega_0 p_0 \dot{x} x_0^2 - c \omega_0 p_0 \dot{x}_0 x_0^3 + k \omega_0^2 x_0^2 + \\ + k T \omega_0^2 x_0^3 = 0 \tag{I.8}$$

$$\varepsilon^2 \quad p_0^2 \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + (p_1^2 + 2 p_0 p_2) \ddot{x}_0 + 2 p_0 p_1 \ddot{x}_1 - \\ - \omega_0 (p_0 \ddot{x}_1 + p_1 \dot{x}_0) - a \omega_0 (p_0 \dot{x}_1 + p_1 \dot{x}_0) x_0 - \\ - a \omega_0 p_0 \dot{x}_0 x_1 - b \omega_0 (p_0 \dot{x}_1 + p_1 \dot{x}_0) x_0^2 - \\ - 2 b \omega_0 p_0 \dot{x}_0 x_0 x_1 - c \omega_0 (p_0 \dot{x}_1 + p_1 \dot{x}_0) x_0^2 - \\ - 3 c \omega_0 p_0 \dot{x}_0 x_0^2 x_1 + 2 k \omega_0^2 x_0 x_1 + 3 k T \omega_0^2 x_0^2 x_1 = 0 \tag{I.9}$$

$$\cdots \quad \cdots$$

*) The initial conditions are

$$x_0(0) = A \quad x_1(0) = x_2(0) = \ldots = 0$$

$$\dot{x}_0(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \ldots = 0$$

The solution of the first equation having to be of the form $x_0 = A \sin$ then it results

$$p_0 = \omega_0 \tag{I.10}$$

From the second equation (I. 8) one determines x_1, after the replacement of x_0 with the precedent value:

$$\omega_0^2 (\ddot{x}_1 + x_1) = 2\omega_0 p_1 A \sin\tau + \omega_0^2 A \cos\tau + a\omega_0^2 A^2 \sin\tau\cos\tau + b\omega_0^2 A^3 \sin^2\tau\cos\tau + c\omega_0^2 A^4 \sin^3\tau\cos\tau - k\omega_0^2 A^2 \sin^2\tau - kT\omega_0^2 A^3 \sin^3\tau \tag{I.11}$$

or developing $\sin^3\tau$ and $\sin^2\tau$ the equation (I. 11) becomes

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{kA^2}{2} + \left(2\frac{p_1}{\omega_0}A - \frac{3kTA^3}{4}\right)\sin\tau + \left(A + \frac{bA^3}{4}\right)\cos\tau + \left(\frac{aA^2}{2} + \frac{cA^4}{4}\right)\sin 2\tau + \frac{kA^2}{2}\cos 2\tau + \frac{3kTA^3}{4}\sin 3\tau - \frac{bA^3}{4}\cos 3\tau - \frac{cA^4}{8}\sin 4\tau \tag{I.12}$$

In order to eliminate "the secular terms" it is necessary that:

$$2\frac{p_1}{\omega_0}A - \frac{3kTA^3}{4} = 0 \tag{I.13}$$

$$A + \frac{bA^3}{4} = 0 \tag{I.14}$$

From the condition (I. 13) one deduces

$$p_1 = \frac{3}{8}\omega_0 kTA^2 \tag{I.15}$$

or taking into account the relations (I. 3) and (I. 4) one obtains

$$p_1 = \frac{3}{8}\cdot\frac{\beta\omega_0}{\varepsilon}A^2 \tag{I.16}$$

Therefore the frequency of oscillations [when it is taken into account the correction of the first order] will be (form (I. 6)),

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{3}{8}\beta A^2\right) \tag{I.17}$$

What is important is the fact that the active nonlinearity does not produce any change of first order in the frequency of oscillations. This first order correction is due only to the reactive nonlinearity (see also [1]) *).

*) In the previous work [1] it was demonstrated by the method of equivalent linearisation that $\omega = \omega_0\sqrt{1 + \frac{3}{4}\beta A^2}$ [and if β is a small parameter then $\omega = \omega_0\left(1 + \frac{3}{8}\beta A^2 + \ldots\right)$

From condition (I. 14) one obtains the amplitude of oscillations

$$A = 2\sqrt{-b} \tag{I.18}$$

Here $\sqrt{-b}$ can be equalled to van der Pol' s U_0 [2], because for an auto-oscillating system $b < 0$, an therefore $A = 2U_0$.

Now, once the secular terms have been let aside it is easy to obtain the solution of equation (I. 12) :

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{kA^2}{2} + \left(\frac{\alpha A^2}{2} + \frac{cA^2}{4}\right)\sin 2\tau + \frac{kA^2}{2}\cos 2\tau + \\ + \frac{3kTA^3}{4}\sin 3\tau - \frac{bA^3}{4}\cos 3\tau - \frac{cA^4}{8}\sin 4\tau \tag{I.12}$$

from where

$$x_1 = -\frac{kA^2}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{aA^2}{2} + \frac{cA^2}{4}\right)\sin 2\tau - \frac{kA^2}{6}\cos 2\tau - \\ - \frac{3}{32}kTA^3\sin 3\tau + \frac{bA^3}{32}\cos 3\tau + \frac{cA^4}{120}\sin 4\tau + X\sin\tau + Y\cos\tau \tag{I.19}$$

Where X and Y must be determined from the initial conditions $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$.

Doing this, the solution (I. 6) has the following form (when is taking into account only the correction of first order)

$$x = A\left[1 + \varepsilon\left(\frac{\alpha A}{6} + \frac{2cA^3}{15} + \frac{9}{32}kTA^2\right)\right]\sin\omega t + \varepsilon\left(\frac{2}{3}kA^2 - \frac{bA^3}{32}\right)\cos\omega t + \\ + \varepsilon\left\{-\frac{kA^2}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{aA^2}{2} + \frac{cA^4}{4}\right)\sin 2\omega t - \frac{kA^2}{6}\cos 2\omega t - \frac{3}{32}kTA^3\sin 3\omega t + \right. \\ \left. + \frac{bA^3}{23}\cos 3\omega t + \frac{cA^4}{120}\sin 4\omega t\right\} + \varepsilon^2\{\ldots\} + \ldots \tag{I.20}$$

We will not look here for the correction of second order because in the expression (I. 20) appears the term which has to be put in evidence, namely the d.c. component

$$\Delta A_0 = -\frac{\varepsilon kA^2}{2} = -\alpha\frac{A^2}{2} \tag{I.21}$$

The d.c. component depends on the reactive nonlinearity. If this nonlinearity is symmetrical then $\alpha = 0$ and $\Delta A_0 = 0$.

Annex II.

In this annex one calculates two integrals of the expression (14). The first of these is

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^3\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left[\Delta A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\sin(k\omega t + \Phi_k)\right]^3 dt \tag{II.4}$$

or

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^3\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{T}\int_0^T(\Delta A_0)^3\,\mathrm{d}\,t+\frac{3}{T}\int_0^T(\Delta A_0)^2\sum_{k=1}^{n}A_k\sin(k\omega t+\Phi_k)\,\mathrm{d}\,t+$$

$$+\frac{3}{T}\int_0^T\Delta A_0\left[\sum_{k=1}^{n}A_k\sin(k\,\omega\,t+\Phi_k)\right]^2\mathrm{d}\,t+\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{k=1}^{n}A_k\sin(k\,\omega\,t+\Phi_k)\right]^3\mathrm{d}\,t \tag{II.2}$$

Calculating every of these integrals *) one obtains,

$$\frac{1}{T}\int_0^T(\Delta A_0)^3\,\mathrm{d}\,t=(\Delta A_0)^3 \tag{II.5}$$

$$\frac{3}{T}\int_0^T(\Delta A_0)^2\sum_{k=1}^{h}A_k\sin(k\,\omega\,t+\Phi_k)\cdot\mathrm{d}t=0 \tag{II.6}$$

$$\frac{3}{T}\int_0^T\Delta A_0\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}A_k\sin(k\,\omega\,t+\Phi_k)\right]^2\mathrm{d}\,t=\frac{3}{2}\Delta A_0\cdot\sum_{k=1}^{n}A_k^2 \tag{II.7}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{k=1}^{n}A_k\sin(k\,\omega\,t)+\Phi_k)\right]^3\mathrm{d}\,t=$$

$$\frac{3}{T}\int_0^T\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_k^2A_l\sin^2(k\,\omega\,t+\Phi_k)\sin(l\,\omega\,t+\Phi_l)\mathrm{d}\,t=$$

$$=-\frac{3}{2T}\int_0^T\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_k^2A_l\cos2(k\,\omega\,t+\Phi_k)\sin(l\,\omega\,t+\Phi_l)\cdot\mathrm{d}\,t=$$

$$=-\frac{3}{2T}\int_0^T\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_2^kA_l(\sin\Phi_l\cos2\Phi_k\cos2k\,\omega\,t\cos l\,\omega\,t-$$

$$-\sin2\Phi_k\cos\Phi_l\sin2k\,\omega\,t\sin l\,\omega\,t)\,\mathrm{d}\,t=-\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\nu/2}A_k^2A_{2k}\sin(\Phi_{2k}-2\Phi_k) \tag{II.8}$$

*) It is taken into account that

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_k\,a_l \tag{II.3}$$

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^3=\sum_{k=1}^{n}a_k^3+3\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_k^2\,a_l+\sum_{\substack{k=1\\k\neq l\neq m}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}a_h\,a_l\,a_m \tag{II.4}$$

where $\nu = n$ if n is an even number, but $\nu = n - 1$ *if* n is an odd number. Therefore,

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^3\,dt = (\Delta A_0)^3 + \frac{3}{2}\Delta A_0 \sum_{k=1}^{n} A_k^2 - \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\nu/2} A_k^2 A_{2k}\sin(\Phi_{2k} - 2\Phi_k) \quad \text{(II.9)}$$

Now, the second integral of expression (14) becomes

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^4\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (\Delta A_0)^4\,dt + \frac{4}{T}\int_0^T (\Delta A_0)^3 \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t + \Phi_k)\,dt +$$

$$+\frac{6}{T}\int_0^T (\Delta A_0)^2\left[\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t + \Phi_k)\right]^2 dt + \frac{4}{T}\int_0^T \Delta A_0 \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t + \Phi_k)\right]^3 dt +$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t + \Phi_k)\right]^4 dt \quad \text{(II.10)}$$

Calculating every of these integrals *) one obtains,

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\Delta A_0)^4\,dt = (\Delta A_0)^4 \quad \text{(II.11)}$$

$$\frac{4}{T}\int_0^T (\Delta A_0)^3 \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t + \Phi_k)\,dt = 0 \quad \text{(II.12)}$$

$$\frac{6}{T}\int_0^T (\Delta A_0)^2 \left[\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t + \Phi_k)\right]^2 dt = 3(\Delta A_0)^2 \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \quad \text{(II.13)}$$

$$\frac{6}{T}\int_0^T (\Delta A_0)\left[\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t + \Phi_k)\right]^3 dt = -3(\Delta A_0)\sum_{k=1}^{\nu/2} A_k^2 A_{2k}\sin(\Phi_{2k} - 2\Phi_k)$$

(II.14) **)

*) For this it is taken into account that

$$(a_1 + a_2 + \ldots a_n)^4 = \sum_{k=1}^{n} a_k^4 + 4\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k^3 a_l + 3\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k^2 a_l^2 +$$

$$+ 6\sum_{\substack{k=1\\k\neq l\neq n}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_k^2 a_l a_m + \sum_{\substack{k=1\\k\neq l\neq m\neq p}}^{n}\sum_{l=2}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k a_l a_m a_p$$

**) See the integral (II.8).

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t+\Phi_k)\right]^4 \mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{k=1}^{n} A_k^4 \sin^4(k\omega t+\Phi_k)\,\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{4}{T}\int_0^T\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k^3 A_l \sin^3(k\omega t+\Phi_k)\sin(l\omega t+\Phi_l)\,\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{3}{T}\int_0^T\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k^2 A_l^2 \sin^2(k\omega t+\Phi_k)\sin^2(l\omega t+\Phi_l)\,\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{6}{T}\int_0^T\sum_{\substack{k=1\\k\neq l\neq m}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_k^2 A_l A_m \sin^2(k\omega t+\Phi_k)\sin(l\omega t+$$

$$+\Phi_l)\sin(m\omega t+\Phi_m)\cdot\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{\substack{k=1\\k\neq l\neq m\neq p}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} A_k A_l A_m A_p \sin(k\omega t+\Phi_k)\cdot\sin(l\omega t+\Phi_l)\cdot$$

$$\cdot(\sin m\omega t+\Phi_m)\cdot\sin(p\omega t+\Phi_p)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(II.15)}$$

It is preferable to calculate separately every of the integrals (II. 15). Then,

$$\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{k=1}^{n} A_k^4 \sin^4(k\omega t+\Phi_k)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n} A_k^4 \qquad \text{(II.16)}$$

$$\frac{4}{T}\int_0^T\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sin^3(k\omega t+\Phi_k)\sin(l\omega t+\Phi_e)\,\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k^3 A_l \sin 3(k\omega t+\Phi_k)\cdot\sin(l\omega t+\Phi_l)\,\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_i/3} A_k^3 A_{3k}\cos(3\Phi_k-\Phi_{3k}) \qquad \text{(II.17)*)}$$

*) n_i in the first number (numbering from n to 1) divisible by 3

$$\frac{3}{T}\int_0^T \sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k^2 A_l^2 \sin^2(k\omega t+\Phi_k)\sin^2(l\omega t+\Phi_l)\,dt = \frac{3}{4}\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k^2 A_l^2$$

$$\frac{6}{T}\int_0^T \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\k\neq l\neq m}}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_k^2 A_l A_m \sin^2(k\omega t+\Phi_k)\sin(l\omega t+\Phi_l)\sin(m\omega t+$$

$$+\Phi m)\,dt = -\frac{6}{2T}\int_0^T \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\k\neq l\neq m}}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_k^2 A_l A_m \cos 2(k\omega t+\Phi_k)\sin(l\omega t+\Phi_l)\cdot$$

$$\cdot\sin(m\omega t+\Phi_m)\cdot dt =$$

$$= -2\cdot\frac{6}{2T}\int_0^T \sum_{k=1}^{\xi/4} A_k^2 A_{2k} A_{4k}\cos(2k\omega t+\Phi_k)\cdot\sin(2k\omega t+\Phi_{2k})\cdot$$

$$\cdot\sin(4k\omega t+\Phi_{4k})\,dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\xi/4} A_k^2 A_{2k} A_{4k}\cos(2\Phi_k-\Phi_{2k}+\Phi_{4k}) \qquad \text{(II.19)*)}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\k\neq l\neq m\neq p}}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} A_k A_l A_m A_p \sin(k\omega t+\Phi_k)\sin(l\omega t+\Phi_l)\sin(m\omega t+\Phi_m)\cdot$$

$$\cdot\sin(p\omega t+\Phi_p)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4T}\int_0^T \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\k\neq l\neq m\neq p}}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} A_k A_l A_m A_p\{\cos[(k+l)\omega t+\Phi_k+\Phi_l]\cdot$$

$$\cdot\cos[(m+p)\omega t+\Phi_m+\Phi_p] -$$

$$-\cos[(k+l)\omega t+\Phi_k+\Phi_l]\cdot\cos[(m-p)\omega t+\Phi_m-\Phi_p] -$$

$$-\cos[(k-l)\omega i+\Phi_k-\Phi_l]\cdot\cos[(m+p)\omega t+\Phi_m+\Phi_p] +$$

$$+\cos[(m-p)\omega t+\Phi_m-\Phi_p]\cdot\cos[(k-l)\omega t+\Phi_k-\Phi_l]\}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\k\neq l\neq m\neq n\\k+l=m+p}}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} A_k A_l A_m A_p\cos[\Phi_k+\Phi_l+\Phi_m+\Phi_p] -$$

$$-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\k\neq l\neq m\neq n\\k+l=m-p}}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} A_k A_l A_m A_p\cos[\Phi_k+\Phi_l+\Phi_m-\Phi_p] -$$

*) ξ in the first number (numbering from n to 1) divisible by 4.

$$-\frac{1}{8}\sum_{\substack{k=1\\k\neq l\neq m\neq p\\k-l=m+p}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p-1}^{n} A_k A_l A_m A_p \cos\left[\Phi_k-\Phi_l+\Phi_m+\Phi_p\right]+$$

$$+\frac{1}{8}\sum_{\substack{k=1\\k\neq l\neq m\neq p\\k-l=m-p}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} A_k A_l A_m A_p \cos\left[\Phi_k-\Phi_l+\Phi_m-\Phi_p\right] \qquad \text{(II.20)}$$

Introducting the calculated integrals (II. 16) — (II. 20) into expression (II. 15) and afterwards introducing the expressions (II. 11) — (II. 15) into the expression (II. 10) one obtains the following expression :

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^4\,\mathrm{d}\,t=(\Delta A_0)^4+3\,(\Delta A_0)^2\sum_{k=1}^{n}A_k^2-$$

$$-3\,(\Delta A_0)\sum_{k=1}^{\nu/2}A_k^2 A_{2k}\sin\left(\Phi_{2k}-2\,\Phi_k\right)+$$

$$+\frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n}A_k^4-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\eta/3}A_k^3\,A_{3k}\cos\left(3\,\Phi_k-\Phi_{3k}\right)+$$

$$+\frac{3}{4}\sum_{\substack{k=1\\(k\neq l)}}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_k^2 A_l^2-\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\xi/4}A_k^2 A_{2k}\,A_{4k}\cos\left(2\,\Phi_k-\Phi_{2k}+\Phi_{4k}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\Bigg[\sum_{\substack{k=1\\k\neq l\neq m\neq n\\k+l=m+p}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}A_k A_l A_m A_p\cos\left(\Phi_k+\Phi_l+\Phi_m+\Phi_p\right)-$$

$$-\sum_{\substack{k=1\\k\neq l\neq m\neq n\\k+l=m-p}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}A_k A_l A_m A_p\cos\left(\Phi_k+\Phi_l+\Phi_m-\Phi_p\right)-$$

$$-\sum_{\substack{k=1\\k\neq l\neq m\neq n\\k-l=m+p}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}A_k A_l A_m A_p\cos\left(\Phi_k-\Phi_l+\Phi_m+\Phi_p\right)+$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq l\neq m\neq p\\k-l=m-p}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}A_k A_l A_m A_p\cos\left(\Phi_k-\Phi_l+\Phi_m-\Phi_p\right)\Bigg]$$

(II.21

BIBLIOGRAPHY

[1] *M. Drăgănescu* — The influence of nonlinear interelectrode capacitances on the electronic oscillator. Bul. Inst. Polit Buc. 19 (1957) Nr. 1—2 (in roumanian).
[2] *T. Tănăsecu* — Manual de Tuburi și Circuite electronice, vol. II, edit. Acad. R.P.R., 1957.
[3] *M. Drăgănescu* — Nonlinear capacitances (in roumanian). Automatica și Electronica 1, 1957, Nr. 2.
[4] *А. Андронов; С. Э. Хайкин*: Теория колебаний, ОНТИ, Moscova 1937.
[5] *N. Minorsky* — Introduction to nonlinear mechanics, 1947.
[6] *И. И. Минкова*: Исследование зависимости частоты автоколебаний от спектрального состава. Журнал Технической Физики № 4, 1677—1686.
[7] *Р. В. Савинов:* Автоколебания в существеннонелинейных консервативных системах. Доклады Академий Наук СССР 89 (1953) № 6, 995—7.
[8] *N. W. Mc. Lachlan* — Ordinary non-linear differential equations in engineering and physical sciences, Oxford. 1950.

ВЛИЯНИЕ ГАРМОНИКОВ НА АВТОГЕНЕРАТОР С НЕЛИНЕИНЫМ РЕАКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

(Краткое содержание)

Выводится формулу (9) для частоты автогенератора описанного уравненйем (3) которая заменяет формулу „van der Pol" — a (2), приемлемая только для $g(x) \equiv 0$. В частности, когда активные и реактивные элементы малы, формула (9) прекращается в формуле (36) откуда установленно что самыи нелинейныи реактивный элемент вводит для частоты поправку $\left[\frac{3}{8}\beta A_1^2\right]$ первого ордена. Гармоники вводят только поправку второго ордена. Значительность члена $\frac{3}{8}\beta A_1^2$ был проверен также в статье [1].

THE INFLUENCE OF HARMONICS ON THE ELECTRONIC OSCILLATOR PROVIDED WITH A NONLINEAR REACTIVE ELEMENT

(Summary)

In this work it is established the formula (9) for the frequency of oscillation of a system described by equation (3), which replaces van der Pol's formula (2), corresponding to the case $g(x) = 0$. In the case of small active and reactive nonlinearties, from formula (9) one obtains the expression (36) from where one deduces that the nonlinear reactive

element $\left(\text{the term } \frac{3}{8}\beta A_1^2\right)$ introduces by itself a first order correction for the frequency of oscillations and that the harmonics are introducing only a correction of second order. The importance of the term $\frac{3}{8}\beta A_1^2$ was also proofed in the work [1].

L'INFLUENCE DES HARMONIQUES SUR L'OSCILLATEUR ELECTRONIQUE PREVU AVEC UN ÉLÉMENT RÉACTIF NONLINÉAIRE

(Résumé)

On établit la formule (9) pour la fréquence des oscillations d'un system décrit par l'equation (3) qui remplace la formule (2) de van der Pol, qui était valable pour $g(x) = 0$. Dans le cas que les nonlinéarités (actives et réactives) ne sont pas importantes, la formule (2) prit la forme (36) d'où on constate que l'élément reactif nonlineaire $\left(\text{par le term } \frac{3}{8}\beta A_1^2\right)$ introduit une correction de première ordre pour la frequence des oscillations, pendant que les harmoniques introduisent seulement une correction de second ordre. L'importance du term $\frac{3}{8}\beta A_1^2$ a été verifiée de même dans l'article [1].

DER EINFLUSS HÖHERER HARMONISCHEH AUF EINEN ELEKTRONISCHEN OSZILLATOR MIT NICHTLINEAREM BLINDWIDERSTAND

(Zusammenfassung)

Es wird die Beziehung (9) für die Schwingfrequenz eines von der Gleichung (3) bescriebenen Systems festgelegt, die van der Pol's Formel (2) ersetzt, welche im Falle $g(x) = 0$ gültig war. Im Falle das die (aktiven und reactiven) Nichtlinearitäten nicht bedeutend sind, erhält die Formel (2) die Form (36), aus welcher man ersieht, dass das nichtlineare reaktive Element eine Korrektion erster Ordnung $\left(\text{durch das Glied } \frac{3}{8}\beta A_1^2\right)$ für die Frequenz bedingt, während die höheren Harmonischen nur eine Korrektion zweiter Ordnung bedingen. Die Bedeutung des Gliedes $\frac{3}{8}\beta A_1^2$ wurde desgleichen im Aufsatz [1] hervorgehoben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

UNDE ELECTROMAGNETICE

621.392

ON THE THEORY OF RECEIVING ANTENNAS SYSTEMS

by EDMOND NICOLAU

1 — When an external electromagnetic field falls on a receiving-antenna system, it is obtained a wave in the feeder. The antenna may be regarded as a device that transforms energy. From the point of view of the terminal load, the antenna is equivalent to a generator. It is our purpose to discuss the properties of the equivalent generator.

It is not possible to consider the transmitting and receiving antennas as isolated systems, neglecting the significant feature of the interaction between them. Any discussion of a receiving antenna assumes the existance of a radiating system.

The interaction between two antennas is given by the fundamental equations :

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \tag{1}$$

$$U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \tag{2}$$

where U_j is the input voltage applied to the j antenna, Z_{jk} is the mutual impedance between the j and k antennas, and I_k is the imput current of the k antenna.

According to the Thévenin's point of view, the receiving antenna is equivalent to a generator having a emf $\mathcal{E}$ and a internal impedance Z_i. It is generally assumed that for a given position of the antenna toward the incident wave, $\mathcal{E}$ is proportional to the field intensity of the wave, and that the generator has an internal impedance equal to the input impedance which the antenna presents to the feeder when used as a transmitter

We try to determine $\mathcal{E}$ and Z_i from the equations (1) and (2).

2 — We are considering the 1 antenna as the transmitting antenna, and the antenna 2 as a receiving one. To the 2 antenna we are not appling a voltage, but we have an output voltage U_2' :

$$U_2' = - U_2 .$$

If the load impedance is infinite, $I_2 = 0$, and Eqs. (1) and (2) become

$$U_1 = Z_{11} I_1' \tag{3}$$

$$- U_{2g} = Z_{21} I_1' \tag{4}$$

The emf of the equivalent generator is equal to U_{2g}, so that

$$\mathcal{E} = U_{2g} = - \frac{Z_{21}}{Z_{11}} U_1 \tag{5}$$

If the load impedance is zero, then

$$U_2 = 0$$

One can write Eqs. (1) and (2) as

$$U_1 = Z_{11} I_1'' + Z_{12} I_{2s} \tag{6}$$

$$0 = Z_{21} I_2'' + Z_{22} I_{2s} \tag{7}$$

so that

$$I_1'' = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_{2s}$$

and

$$I_{2s} = \frac{Z_{21}}{Z_{12} Z_{21} - Z_{11} Z_{22}} U_1 \tag{8}$$

The internal impedance of the equivalent generator is equal to the ratio of U_{2g} and I_{2s}:

$$Z_i = \frac{-Z_{21}}{Z_{11}} U_1 : \frac{Z_{21}}{Z_{12} Z_{21} - Z_{11} Z_{22}} U_1$$

$$Z_i = -\frac{Z_{21}^2}{Z_{11}} + Z_{22} \tag{9}$$

But as we have shown in a previons paper [1], at great distances between antennas, Z_{21} decrease at least as r^{-1} so that if $r \gg \lambda$

$$Z_{21}^2 \ll Z_{11}$$

and

$$Z_i = Z_{22} \tag{10}$$

We have established that the internal impedance of the receiving antenna is equal to the internal impedance of the same antenna acting as a transmitting one.

Concerning the emf of the equivalent generator, we have established that

$$\mathcal{E} = U_{2g} = Z_{21} I_1' \tag{11}$$

But if the two antennas are far enough, Z_{12} is very small, so that

$$I_1' = I_1'' = I_{10} \tag{12}$$

Let

$$\mathcal{E} = Z_{21} I_{10} \tag{13}$$

If we use the expression of Z_{jk} established be us [1], then we get

$$\mathcal{E} = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} I_{10} \int_{A_2}^{B_2} \int_{A_1}^{B_1} ((\nabla\nabla + k^2) f_1(\xi_1) \bar{i}_1 \psi_{21} \, d\xi_1 \, f_2(\xi_2) \bar{i}_2 \, d\xi_2 \tag{14}$$

where

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu,$$

ξ_i is the coordinate along the i antenna, $\mathbf{i}_j(\xi_j)$ is the unit vector directed along the j antenna, $\mathbf{f}_j(\xi_j)$ is the function representing the distribution of current along the j antenna, and

$$\psi_{21} = \frac{\exp(-jkr_{21})}{r_{21}}$$

where r_{21} is the distance between the two points with the coordinates ξ_1 and ξ_2.

It is convenient to give the field $\mathbf{E}_1$ produced by the first antenna in the region ocuppied by the second one:

$$\bar{\mathbf{E}}_1 = \frac{j}{4\pi\omega\varepsilon} \mathbf{I}_{10} \int_{A_1}^{B_1} (\nabla\nabla + k^2) f_1(\xi_1) \bar{i}_1 \psi_{21} \, d\xi_1 \tag{15}$$

From eqs. (14) and (1) we get

$$\mathcal{E} = \int_{A_2}^{B_2} \bar{\mathbf{E}}_1 \bar{i}_2 f_2(\xi_2) \, d\xi_2 \tag{16}$$

The emf are then of the following form

$$\mathcal{E} = \int_{A_2}^{B_2} \mathbf{E}_{1t} f_2(\xi_2) \, d\xi_2 . \tag{17}$$

where $\mathbf{E}_{1t}$ is the tangential component o the field $\mathbf{E}$.

For a rectilinear antenna, $\mathbf{E}_{1t}$ is independent of ξ_2, so that

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}_{1t} \int_{A_1}^{B_1} f_2(\xi_2) \, d\xi_2 . \tag{18}$$

The result reads

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}_t h_{ef} \tag{19}$$

where

$$h_{ef} = \int_A^B f(\xi) \, d\xi \tag{20}$$

is the effective height of the receiving antenna, defined for a transmitting antenna.

The formula (19) is valable for rectilinear antennas.

For loops

$$f(\xi) = 1$$

so that

$$\mathcal{E} = \int_A^B \bar{\mathbf{E}}_1 \bar{i}_2 \, d\xi_2$$

2. The last question to be considered is the receiving antenna pattern. We are defining the receiving antenna pattern as a surface defined in every direction by the ratio between the emf corresponding to the colatitude θ and the azimuth angle φ, $\mathcal{E}(\theta, \varphi)$ — and the $\mathcal{E}_{max}$:

$$c_r(\theta, \varphi) = \frac{\mathcal{E}(\theta, \varphi)}{\mathcal{E}_{max}}$$

In evaluating the performance of an antenna as a radiating or receiving system one considers only the field at a large distances, where the induction field can be neglected.

As we have shown,

$$\mathcal{E} = \int_A^B \bar{\mathbf{E}}\,\bar{i}\,f(\xi)\,d\xi$$

The magnitude of the field is constant in the region occupied by the receiving antenna. Let

$$\bar{\mathbf{E}}\,\bar{i} = \mathbf{E}_t \exp(-jkr)$$

This leads to the following relation

$$\mathcal{E} = \int_A^B \mathbf{E}_t f(\xi) \exp(-jkr)\,d\xi$$

If the receiving antenna is rectilinear, then

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}\cos\alpha$$

and

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}\int_A^B \cos\alpha\, f(\xi) \exp(-jkr)\,d\xi$$

We find

$$c_r(\theta, \varphi) = K\int_A^B \cos\alpha\, f(\xi) \exp(-jkr)\,d\xi \qquad (21)$$

If we use the same antenna as a transmitting one, the field produced is

$$\mathbf{E} = a\int \frac{[\mathbf{I}]}{r}\bar{i}\sin\theta\,d\xi$$

At large distances the antenna can be considered as an effective point source, radiating power that, per unit solid angle, is a function of direction only. Let

$$E = \frac{a}{r} I_o \int f(\xi) \exp(-jkr) \sin\theta \, d\xi$$

We define the transmitting pattern as the surface

$$c_e = \frac{E(\theta, \varphi)}{E_{max}}$$

From Eqs. (22) we get

$$c_e = K' \int f(\xi) \exp(-jkr) \sin\theta \, d\xi \tag{23}$$

For antenna with small cross section, $f(\xi)$ is harmonic; further

$$\sin\theta = \cos\alpha$$

and r is the same in the two cases.

It results that

$$c_e(\theta, \varphi) = c_r(\theta, \varphi)$$

i. e. the transmitting and the receiving pattern are the same for a given rectilinear antenna.

Department of Electronics
Polytechnical Institute of Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. *Edm. Nicolau* — On the Network Equations in Antenna Theory. Bul. Inst. Polit. Buc., XX (1958), 3, p. 153.

О ТЕОРЕМЕ ПРИЁМНЫХ АНТЕН

(Краткое содержание)

Даются эквивалентная схема приёмного антенна и доказываются что антенна — при приеме или передаче электромагнитных волн имеет одинаковые диаграммы направленности.

ON THE THEORY OF RECEIVING ANTENNAS SYSTEMS

(Summary)

It is established an equivalent schema for a receiving antenna. It is shown that the receiving antenna pattern is the same as the radiating antenna pattern for the same antenna.

SUR LA THÉORIE DE L'ANTENNE DE RÉCEPTION

(Résumé)

On établit le schéma équivalent d'une antenne de réception. On démontre que la caractéristique de directivité d'une antenne de réception est la même que la caractéristique de radiation de la même antenne.

ÜBER DIE THEORIE DER EMPFANGSANTENNES

(Zusammenfassung)

Es wird die Ersatzschaltung für eine Empfangsantenne festgelgt und es wird bewiesen dass die Richtcharakteristik einer linearen Empfangsantenne die gleiche mit der Richtcarakteristik der gleichen Antenne als Sedeantenne verwendet, ist.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

621.392

GHIDURI DE UNDĂ TRIUNGHIULARE

de AUREL MILLEA

Determinarea cîmpului electromagnetic în interiorul ghidurilor de undă drepte, de secțiune uniformă și fără pierderi, în regim permanent sinusoidal, necesită rezolvarea ecuației de tip Helmoltz cu două variabile în domeniul limitat de conturul secțiunii ghidului, cu condiția anulării funcțiunii sau a derivatei ei după normală pe frontiera domeniului, după cum modul de propagare este *TM* (transversal-magnetic) sau *TE* (transversal-electric). Funcțiunile proprii pentru această problemă se pot exprima prin funcțiuni trigonometrice și funcțiuni speciale (funcțiuni Bessel și Mathieu) în cazul domeniilor de formă dreptunghiulară, circulară și eliptică, folosind coordonate cartesiene, polare și respectiv eliptice; pentru alte forme ale secțiunii, în general, aceste soluții particulare ale problemei nu formează un sistem complet și ele pot descrie numai anumite moduri de propagare particulare.

Astfel în cazul ghidurilor de undă de secțiune triunghiulară nu există o soluție generală a problemei enunțate mai sus. Prin metode de aproximație se pot determina fără dificultăți numai funcțiunile proprii și valorile proprii fundamentale [1, 2]. Pornind de la o idee a lui Rayleigh [3] în legătură cu oscilațiile membranelor, amintită și de T. Kahan [4], am dedus soluția exactă a problemei propagării în ghidurile de undă triunghiulare pentru următoarele trei cazuri particulare: secțiune de forma unui triunghi dreptunghi isoscel, triunghi dreptunghi cu unghiurile de 30^0 și 60^0 și triunghi echilateral. În aceste cazuri funcțiunile proprii se pot exprima prin funcțiuni trigonometrice, după cum rezultă din calculele efectuate.

Metoda de calcul folosită.

Componentele cîmpului electromagnetic din ghidurile de undă pot fi exprimate prin două funcțiuni scalare u și v în modul următor [5]:

Pentru undele *TM*:

$$E_z = A\,u\,e^{j(\omega t-\beta z)}; \qquad H_z = 0; \tag{1}$$

$$\bar{E}_{tr} = -\,j\,A\,\frac{\beta}{h^2}\,\operatorname{grad} u\,e^{j(\omega t-\beta z)}; \tag{2}$$

$$\bar{H}_{tr} = -\,j\,A\,\frac{\varepsilon\,\omega}{h^2}\,(\bar{k}\times\operatorname{grad} u)\,e^{j(\omega t-\beta z)} \tag{3}$$

iar pentru undele TE:

$$E_z = 0; \quad H_z = B v e^{j(\omega t - \beta z)}; \tag{4}$$

$$\overline{E}_{tr} = jB \frac{\mu \omega}{h^2} (\overline{k} \times \operatorname{grad} v) e^{j(\omega t - \beta z)}; \tag{5}$$

$$\overline{H}_{tr} = -jB \frac{\beta}{h^2} \operatorname{grad} v \, e^{j(\omega t - \beta z)}. \tag{6}$$

Funcțiunile scalare $u(x, y)$ și $v(x, y)$ satisfac ecuația lui Helmholtz

$$\Delta_2 u + h^2 u = 0; \quad \Delta_2 v + h^2 v = 0, \tag{7}$$

iar condițiile la limită pe conturul Γ al secțiunii ghidului de undă sînt

$$u|_\Gamma = 0; \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma = 0. \tag{9}$$

In aceste relații $j\beta$ e constanta de propagare, z e coordonata cartesiană în lungul ghidului, $\overline{E}_{tr}$ și $\overline{H}_{tr}$ sînt componentele transversale ale cîmpului electromagnetic, A și B sînt constante și $h^2 = k^2 - \beta^2$, unde $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$.

Frecvențele critice ale ghidului de undă se exprimă în funcțiune de valorile proprii h^2 prin relația

$$f_{cr} = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \tag{10}$$

Problema determinării cîmpului electromagnetic din ghidul de undă se reduce deci la rezolvarea ecuației (7), cu condiția la limită (8) sau (9).

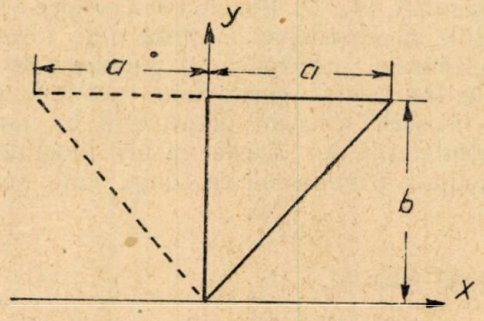


Fig. 1. Secțiunea ghidului de undă

Pentru ghidurile triunghiulare a căror secțiune are fie forma unui triunghi dreptunghi, fie a unui triunghi isoscel (fig. 1) căutăm expresiile funcțiunilor proprii sub forma de sume de soluții particulare ale ecuației lui Helmholtz în coordonate cartesiene:

$$u, v = \sum_{k=1}^{n} A_k \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \alpha_k \pi x \cdot \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \beta_k \pi (y - b), \tag{11}$$

cu condiția ca valorile proprii corespunzătoare soluțiilor particulare să fie egale între ele:

$$\pi^2(\alpha_k^2+\beta_k^2)=\pi^2(\alpha_l^2+\beta_l^2); \quad k, l=1, 2 \ldots n. \tag{12}$$

Funcțiunea proprie exprimată prin (11) satisface deci ecuația problemei; alegînd în mod convenabil funcțiunile trigonometrice sin și cos pentru fiecare caz în parte (ținînd seama de modul de propagare — *TM* sau *TE* — și de forma secțiunii — triunghi dreptunghi sau isoscel), expresia (11) va satisface și condițiile la limită pe dreptele $x=0$ și $y=b$. Rămîne să alegem mărimile A_k, α_k și β_k în așa fel încît să fie satisfăcute condițiile la limită și pe dreptele $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Pentru undele *TM* aceasta revine la a satisface identitatea

$$u(x, \xi x)\equiv 0, \tag{13}$$

sau

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \alpha_k \pi x \cdot \sin \pi(\xi x - b)\equiv 0, \tag{14}$$

unde $\xi=\frac{b}{a}$. În cazul triunghiului dreptunghi în primul factor din termenii sumei alegem funcțiunea sin, iar în cazul triunghiului isoscel rămîne și sin și cos căci funcțiunea proprie poate fi antisimetrică sau simetrică față de axa *Oy*. Transformînd produsele de funcțiuni trigonometrice în sume se obține

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \left\{ \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} [(\alpha_k-\xi\beta_k)\pi x+\beta_k \pi b] - \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} [(\alpha_k+\xi\beta_k)\pi x-\beta_k \pi b] \right\}\equiv 0. \tag{15}$$

Pentru undele *TE* condiția la limită pe dreptele $y=\pm\xi x$ e satisfăcută dacă

$$\xi\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y\ \xi x}\equiv 0, \tag{16}$$

sau

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \left[\alpha_k \pi \xi \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \alpha_k \pi x \cdot \cos \beta_k \pi(\xi x-b) \begin{matrix}-\cos\\ +\sin\end{matrix} \alpha_k \pi x \cdot \sin \beta_k \pi (\xi x - b) \right]\equiv 0. \tag{17}$$

Ca și mai sus, în cazul triunghiului dreptunghi în primul factor păstrăm numai funcțiunea cos în expresia lui v, iar în cazul triunghiului isoscel păstrăm și cos și sin.

Identitatea (17) se poate scrie și sub forma

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \left\{ (\xi\alpha_k - \beta_k) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} [(\alpha_k + \xi\beta_k)\pi x - \beta_k \pi b] + \right.$$

$$\left. + (\xi\alpha_k + \beta_k) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} [(\alpha_k - \xi\beta_k)\pi x + \beta_k \pi b] \right\} \equiv 0. \tag{18}$$

Termenii expresiilor (15), respectiv (18) trebuie identificați doi cîte doi, pentru a satisface identitățile. Dacă se egalează între ei primii sinuși sau cosinuși din cîte doi termeni ai sumei, se obține soluția banală $\alpha_k = \beta_k = 0$; trebuie deci să egalăm primul sinus sau cosinus al fiecărui termen cu al doilea sinus sau cosinus din termenul următor. Identificînd argumentele se obține

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_k - \xi\beta_k = \pm(\alpha_{k+1} + \xi\beta_{k+1}); \\ &\beta_k = \mp\beta_{k+1} + \frac{p_k}{b}; \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &k = 1, 2 \ldots n; \qquad (19)\\ &n+1 \to 1. \qquad (20)\end{aligned}$$

unde p_k sînt numere întregi, iar indicele $n+1$ trebuie înlocuit prin 1.

Mărimile α_k și β_k trebuie să satisfacă și relațiile (12), care se mai pot scrie

$$\alpha_k^2 - \alpha_{k+1}^2 = -(\beta_k^2 - \beta_{k+1}^2) \tag{21}$$

sau

$$(\alpha_k + \alpha_{k+1})(\alpha_k - \alpha_{k+1}) = -(\beta_k + \beta_{k+1})(\beta_k - \beta_{k+1}). \tag{22}$$

Ținînd seama de (19) și presupunînd $\beta_k \neq \mp\beta_{k+1}$ se obține

$$\alpha_k \pm \alpha_{k+1} = -\frac{1}{\xi}(\beta_k \mp \beta_{k+1}). \tag{23}$$

Deci mărimile α_k și β_k trebuie să satisfacă sistemul de ecuații liniare

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha_k \mp \alpha_{k+1}) = \xi(\beta_k \pm \beta_{k+1}); \qquad (24)\\ &\xi(\alpha_k \pm \alpha_{k+1}) = -(\beta_k \mp \beta_{k+1}); \qquad (25)\\ &\beta_k \pm \beta_{k+1} = \frac{p_k}{b}, \qquad (26)\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &k = 1, 2 \ldots; n\\ &n+1 \to 1.\end{aligned}$$

iar coeficienții A_k trebuie să satisfacă ecuațiile

$$A_k = \pm(-1)^{p_k} A_{k+1}; \quad (k = 1, 2 \ldots n). \tag{27}$$

Se observă că ecuațiile (25) includ și relațiile obținute prin identificarea coeficienților care înmulțesc funcțiunile trigonometrice în identitatea (18).

Ecuațiile (24), (25), (26) și (27) nu au soluții pentru orice valori ale lui n și ξ. De asemenea pentru ca sistemul de soluții să fie complet, trebuie ca el să depindă de două șiruri discrete de parametri (analoge coeficienților m și n din cazul secțiunilor dreptunghiulare, circulare și eliptice), deci două din numerele întregi p_k trebuie să fie arbitrare.

În cele ce urmează deducem soluții ale acestui sistem de ecuații în cazurile $n = 2$ și $n = 3$.

a) *Cazul* $n = 2$. Alegem semnele $\pm$ în ecuațiile (24)÷(27) astfel încît să obținem soluții diferite de zero. Se obțin în acest mod următoarele ecuații :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \xi(\beta_1 + \beta_2); \tag{28}$$

$$\alpha_2 + \alpha_1 = \xi(\beta_2 - \beta_1); \tag{29}$$

$$\xi(\alpha_1 + \alpha_2) = -(\beta_1 - \beta_2); \tag{30}$$

$$\xi(\alpha_2 - \alpha_1) = -(\beta_2 + \beta_1); \tag{31}$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \frac{p_1}{b}; \tag{32}$$

$$\beta_2 - \beta_1 = \frac{p_2}{b}; \tag{33}$$

$$A_1 = (-1)^{p_1} A_2; \tag{34}$$

$$A_2 = (-1)^{p_2} A_1. \tag{35}$$

Din (32) și (33) rezultă

$$\beta_1 = \frac{p_1 - p_2}{2b}; \quad \beta_2 = \frac{p_1 + p_2}{2b}. \tag{36}$$

Ecuațiile (34) și (35) au soluții nenule numai dacă $p_1 + p_2$ e un număr par ; în acest caz și $p_1 - p_2$ e par și deci β_1 și β_2 sînt de forma

$$\beta_1 = \frac{m}{b}; \quad \beta_2 = \frac{n}{b}, \tag{37}$$

unde m și n sînt întregi. Putem lua

$$A_1 = (-1)^m; \quad A_2 = (-1)^n. \tag{38}$$

Comparînd ecuația care se obține adunînd (28) și (29) cu ecuația obținută scăzînd (30) din (31) rezultă că sistemul admite soluții numai dacă

$$\xi = 1, \tag{39}$$

adică dacă triunghiul e dreptunghi isoscel. În acest caz se obține

$$\alpha_1 = \beta_2 = \frac{n}{b} = \frac{n}{a}; \quad \alpha_2 = -\beta_1 = -\frac{m}{b} = -\frac{n}{a}. \tag{40}$$

Funcțiunile proprii, pentru modul TM, sînt date de

$$u = (-1)^m \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi(y-a)}{a} - (-1)^n \sin\frac{m\pi x}{a} \cdot \sin\frac{n\pi(y-a)}{a}, \tag{41}$$

sau

$$u = \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{a} - \sin\frac{m\pi x}{a} \cdot \sin\frac{n\pi y}{a}, \tag{42}$$

iar pentru modul TE sînt următoarele:

$$v=(-1)^m \cos\frac{n\pi x}{a}\cdot\cos\frac{m\pi(y-a)}{a}+(-1)^n\cos\frac{m\pi x}{a}\cdot\cos\frac{n\pi(y-a)}{a}, \quad (43)$$

sau

$$v=\cos\frac{n\pi x}{a}\cdot\cos\frac{m\pi y}{a}+\cos\frac{m\pi x}{a}\cdot\cos\frac{n\pi y}{a}; \quad (44)$$

(acește expresii se referă la triunghiul mărginit de dreptele $x=0$; $y=b$ și $x=y$).

Pentru ambele moduri de propagare valorile proprii sînt

$$h^2=\frac{\pi^2}{a^2}(m^2+n^2). \quad (45)$$

b) *Cazul* $n=3$. În acest caz combinația de ecuații care duce la soluții nebanale e următoarea:

$$\alpha_1-\alpha_2=\xi(\beta_1+\beta_2) \quad (46) \qquad \beta_1+\beta_2=\frac{p_1}{b}; \quad (52)$$

$$\alpha_2-\alpha_3=\xi(\beta_2+\beta_3) \quad (47) \qquad \beta_2+\beta_3=\frac{p_2}{b}; \quad (53)$$

$$\alpha_3-\alpha_1=\xi(\beta_3+\beta_1) \quad (48) \qquad \beta_3+\beta_1=\frac{p_3}{b}; \quad (54)$$

$$\xi(\alpha_1+\alpha_2)=-(\beta_1-\beta_2); \quad (49) \qquad A_1=(-1)^{p_1}A_2 \quad (55)$$

$$\xi(\alpha_2+\alpha_3)=-(\beta_2-\beta_3); \quad (50) \qquad A_2=(-1)^{p_2}A_3 \quad (56)$$

$$\xi(\alpha_3+\alpha_1)=-(\beta_3-\beta_1); \quad (51) \qquad A_3=(-1)^{p_3}A_1 \quad (57)$$

Din ecuațiile (52), (53) și (54) rezultă

$$\beta_1=\frac{p_1-p_2+p_3}{2b};\quad \beta_2=\frac{p_1+p_2-p_3}{2b};\quad \beta_3=\frac{-p_1+p_2+p_3}{2b}. \quad (58)$$

Ecuațiile (55), (56) și (57) admit soluții nenule numai dacă $p_1+p_2+p_3$ e un număr par; rezultă cu numărătorii expresiilor (58) sînt și ei numere pare. Adunînd ecuațiile (46), (47) și (48) se obține

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0, \quad (59)$$

deci β_1, β_2 și β_3 pot fi reprezentați sub forma

$$\beta_1=\frac{m}{b};\quad \beta_2=\frac{n}{b};\quad \beta_3=-\frac{m+n}{b}, \quad (60)$$

unde m și n sînt numere întregi.

Din (55), (56), (57) și (59) rezultă

$$p_1+p_2+p_3=0, \quad (61)$$

astfel că putem lua

$$A_1=(-1)^m;\quad A_2=(-1)^n;\quad A_3=(-1)^{m+n}. \quad (62)$$

Scăzînd (49) din (50) și ținînd seama de (59) se obține

$$\xi(\alpha_3-\alpha_1)=3(\beta_3+\beta_1). \quad (63)$$

Comparînd cu (48) rezultă

$$\xi = \sqrt{3}, \tag{64}$$

deci soluția astfel construită e valabilă numai în cazul triunghiului dreptunghi cu unghiurile ascuțite de 30° și 60° și în cazul triunghiului echilateral.

Rezolvînd mai departe sistemul de ecuații se găsește

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1 + 2\beta_2}{\sqrt{3}} = \frac{m+2n}{\sqrt{3}\,b}; \quad \alpha_2 = \frac{-2\beta_1 - \beta_2}{\sqrt{3}} = -\frac{2m+n}{\sqrt{3}\,b}; \quad \alpha_3 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\sqrt{3}} = \frac{m-n}{\sqrt{3}\,b}. \tag{65}$$

Funcțiunile proprii au următoarele expresii, în cazul modului *TM*: pentru secțiunea de forma triunghiului dreptunghi cu unghiurile de 30° și 60°

$$u = \sin\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \sin\frac{m\pi y}{b} - \sin\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \sin\frac{n\pi y}{b} - \\ - \sin\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \sin\frac{(m+n)\pi y}{b}, \tag{66}$$

iar pentru secțiunea de forma triunghiului echilateral

$$u = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \sin\frac{m\pi y}{b} \pm \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \sin\frac{n\pi y}{b} - \\ - \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \sin\frac{(m+n)\pi y}{b}. \tag{67}$$

În cazul modului de propagare *TE* funcțiunile proprii sînt următoarele: pentru secțiunea de forma triunghiului dreptunghi cu unghiurile de 30° și 60°

$$v = \cos\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \cos\frac{m\pi y}{b} + \cos\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \cos\frac{n\pi y}{b} + \\ + \cos\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \cos\frac{(m+n)\pi y}{b}, \tag{68}$$

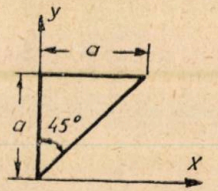
iar pentru secțiunea de forma triunghiului echilateral

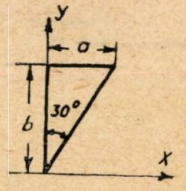
$$v = \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \cos\frac{m\pi y}{b} \mp \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \cos\frac{n\pi y}{b} + \\ + \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b} \cdot \cos\frac{(m+n)\pi y}{b}. \tag{69}$$

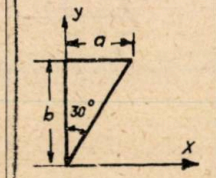
În aceste relații prin $\pm \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}$ se înțelege $+\cos$ sau $-\sin$. Numerele întregi m și n pot lua orice valoare pentru care $u \not\equiv 0$, respectiv $v \not\equiv 0$.

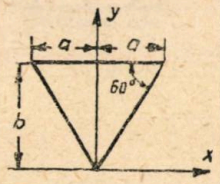
Valorile proprii pentru toate aceste cazuri sînt date de expresia

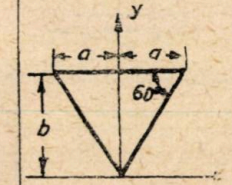
$$h^2 = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{b^2}(m^2 + mn + n^2). \tag{70}$$

Secțiunea	Modul de propagare	Expresiile componentelor cîmpului electromagnetic	Frecvențele critice	Frecvența critică fundamentală
	TM	$E_x = -jA\frac{a\beta}{\pi(m^2+n^2)}\left[n\cos\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{a} - m\cos\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{a}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $E_y = -jA\frac{a\beta}{\pi(m^2+n^2)}\left[m\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\cos\frac{m\pi y}{a} - n\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\cos\frac{n\pi y}{a}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $E_z = A\left[\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{a} - \sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{a}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $H_x = jA\frac{a\varepsilon\omega}{\pi(m^2+n^2)}\left[m\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\cos\frac{m\pi y}{a} - n\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\cos\frac{n\pi y}{a}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $H_y = -jA\frac{a\varepsilon\omega}{\pi(m^2+n^2)}\left[n\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a} - m\cos\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{a}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $H_z = 0$	$\frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{m^2+n^2}$	$m=2;\ n=1$: $\frac{\sqrt{5}}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}$
	TE	$E_x = jB\frac{a\mu\omega}{\pi(m^2+n^2)}\left[m\cos\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{a} + n\cos\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{a}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $E_y = -jB\frac{a\mu\omega}{\pi(m^2+n^2)}\left[n\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\cos\frac{m\pi y}{a} + m\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\cos\frac{n\pi y}{a}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $E_z = 0$ $H_x = jB\frac{a\beta}{\pi(m^2+n^2)}\left[n\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\cos\frac{m\pi y}{a} + m\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\cos\frac{n\pi y}{a}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $H_y = jB\frac{a\beta}{\pi(m^2+n^2)}\left[m\cos\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{a} + n\cos\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{e}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $H_z = B\left[\cos\frac{n\pi x}{a}\cdot\cos\frac{m\pi y}{a} + \cos\frac{m\pi x}{a}\cdot\cos\frac{n\pi y}{a}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$	$\frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{m^2+n^2}$	$m=1;\ n=0$: $\frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Secțiunea	Modul de propagare	Expresiile componentelor cîmpului electromagnetic	Frecvențele critice	Frecvența critică fundamentală
	*TM*	$E_x = -jA\dfrac{\sqrt{3}\,b\,\beta}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\Big[(m+2n)\cos\dfrac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\dfrac{m\pi y}{b} - (2m+n)\cos\dfrac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\dfrac{n\pi y}{b} - (m-n)\cos\dfrac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\dfrac{(m+n)\pi y}{b}\Big]e^{j(\omega t-\beta z)}$		
		$E_y = -jA\dfrac{3b\beta}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\Big[m\sin\dfrac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\dfrac{m\pi y}{b} - n\sin\dfrac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\dfrac{n\pi y}{b} - (m+n)\sin\dfrac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\dfrac{(m+n)\pi y}{b}\Big]e^{j(\omega t-\beta z)}$		
		$E_z = A\Big[\sin\dfrac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\dfrac{m\pi y}{b} - \sin\dfrac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\dfrac{n\pi y}{b} - \sin\dfrac{(m-n)\pi y}{\sqrt{3}}\cdot\sin\dfrac{(m+n)\pi y}{b}\Big]e^{j(\omega t-\beta z)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}\,b\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{m^2+mn+n^2}$	$m=2;\ n=1:$ $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}\,b\sqrt{\varepsilon\mu}}$
		$H_x = jA\dfrac{3b\varepsilon\omega}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\Big[m\sin\dfrac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\dfrac{m\pi y}{b} - n\sin\dfrac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\dfrac{n\pi y}{b} - (m+n)\sin\dfrac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\dfrac{(m+n)\pi y}{b}\Big]e^{j(\omega t-\beta z)}$		
		$H_y = -jA\dfrac{\sqrt{3}\,b\,\varepsilon\omega}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\Big[(m+2n)\cos\dfrac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\dfrac{m\pi y}{b} - (2m+n)\cos\dfrac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\dfrac{n\pi y}{b} - (m-n)\cos\dfrac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\dfrac{(m+n)\pi y}{b}\Big]e^{j(\omega t-\beta z)}$		
		$H_z = 0$		

Secțiunea	Modul de propagare	Expresiile componentelor cîmpului electromagnetic	Frecvențele critice	Frecvența critică fundamentală
	TE	$E_x = jB\frac{3b\mu\omega}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\left[m\cos\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}+n\cos\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}+(m+n)\cos\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\sin\frac{(m+n)\pi y}{b}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$	$\frac{1}{\sqrt{3}b\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{m^2-mn+n^2}$	$m=1;\ n=0;$ $\frac{1}{\sqrt{3}b\sqrt{\varepsilon\mu}}$
		$E_y = -jB\frac{\sqrt{3}b\mu\omega}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\left[(m+2n)\sin\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\cos\frac{m\pi y}{b}+(2m+n)\sin\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cos\frac{n\pi y}{b}+(m-n)\sin\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\cos\frac{(m+n)\pi y}{b}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$		
		$E_z = 0$		
		$H_x = jB\frac{\sqrt{3}b\beta}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\left[(m+2n)\sin\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\cos\frac{m\pi y}{b}+(2m+n)\sin\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\cos\frac{n\pi y}{b}+(m-n)\sin\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\cos\frac{(m+n)\pi y}{b}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$		
		$H_y = jB\frac{3b\beta}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\left[m\cos\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}+n\cos\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}+(m+n)\cos\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\sin\frac{(m+n)\pi y}{b}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$		
		$H_z = B\left[\cos\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\cos\frac{m\pi y}{b}+\cos\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\cos\frac{n\pi y}{b}+\cos\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}b}\cdot\cos\frac{(m+n)\pi y}{b}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$		

Secțiunea	Modul de propagare	Expresiile componentelor cîmpului electromagnetic	Frecvențele critice	Frecvența critică fundamentală
	*TM*	$E_x = \pm jA\frac{\sqrt{3}\,b\,\hat{p}}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\Big[(m+2n)\frac{\sin}{\cos}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}\pm$ $\pm(2m+n)\frac{\sin}{\cos}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}-(m-n)\frac{\sin}{\cos}\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot$ $\cdot\sin\frac{(m+n)\pi y}{b}\Big]e^{j(\omega t-\beta z)}$	$\frac{1}{\sqrt{3}\,b\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{m^2+mn+n^2}$	$m=1;\ n=1;$ $\frac{1}{b\sqrt{\varepsilon\mu}}$
		$E_y=-jA\frac{3\,b\,\hat{p}}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\Big[m\frac{\cos}{\sin}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\frac{m\pi y}{b}\pm n\frac{\cos}{\sin}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot$ $\cdot\cos\frac{n\pi y}{b}-(m+n)\frac{\cos}{\sin}\frac{(m-n)x\pi}{\sqrt{3}\,b}\cos\frac{(m+n)\pi y}{b}\Big]e^{j(\omega t-\beta z)}$		
		$E_z=A\Big[\frac{\cos}{\sin}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}\pm\frac{\cos}{\sin}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}-$ $-\frac{\cos}{\sin}\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\frac{(m+n)\pi y}{b}\Big]e^{j(\omega t-\beta z)}$		
		$H_x=jA\frac{3\,b\,\varepsilon\,\omega}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\Big[m\frac{\cos}{\sin}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\frac{m\pi y}{b}\pm n\frac{\cos}{\sin}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot$ $\cdot\cos\frac{n\pi y}{b}-(m+n)\frac{\cos}{\sin}\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\frac{(m+n)\pi y}{b}\Big]e^{j(\omega t-\beta z)}$		
		$H_y=\pm jA\frac{\sqrt{3}\,b\,\varepsilon\,\omega}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\Big[(m+2n)\frac{\sin}{\cos}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}\pm$ $\pm(2m+n)\frac{\sin}{\cos}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}-(m-n)\frac{\sin}{\cos}\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot$ $\cdot\sin\frac{(m+n)\pi y}{b}\Big]e^{j(\omega t-\beta z)}$		
		$H_z=0$		

Secțiunea	Modul de propagare	Expresiile componentelor cîmpului electromagnetic	Frecvențele critice	Frecvența critică fundamentală
	TE	$E_x=jB\frac{\sqrt{3}\,b\,\mu\,\omega}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\left[m\frac{\sin}{\cos}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}\pm n\frac{\sin}{\cos}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\right.$ $\left.\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}+(m+n)\frac{\sin}{\cos}\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\frac{(m+n)\pi y}{b}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $E_y=\pm jB\frac{\sqrt{3}\,b\,\mu\,\omega}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\left[(m+2n)\frac{\cos}{\sin}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\frac{m\pi y}{b}\mp\right.$ $\mp(2m+n)\frac{\cos}{\sin}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\frac{n\pi y}{b}+(m-n)\frac{\cos}{\sin}\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot$ $\left.\cdot\cos\frac{(m+n)\pi y}{b}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $E_z=0$ $H_x=\mp jB\frac{\sqrt{3}\,b\,\beta}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\left[(m+2n)\frac{\cos}{\sin}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\frac{m\pi y}{b}\mp\right.$ $\mp(2m+n)\frac{\cos}{\sin}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\frac{n\pi y}{b}+(m-n)\frac{\cos}{\sin}\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot$ $\left.\cdot\cos\frac{(m+n)\pi y}{b}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $H_y=jB\frac{3\,b\,\beta}{4\pi(m^2+mn+n^2)}\left[m\frac{\sin}{\cos}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}\mp\frac{\cos}{\sin}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\right.$ $\left.\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}+(m+n)\frac{\sin}{\cos}\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\sin\frac{(m+n)\pi y}{b}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$ $H_z=B\left[\frac{\sin}{\cos}\frac{(m+2n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\frac{m\pi y}{b}\mp\frac{\sin}{\cos}\frac{(2m+n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\frac{n\pi y}{b}+\right.$ $\left.+\frac{\sin}{\cos}\frac{(m-n)\pi x}{\sqrt{3}\,b}\cdot\cos\frac{(m+n)\pi y}{b}\right]e^{j(\omega t-\beta z)}$	$\frac{1}{\sqrt{3}\,b\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{m^2+mn+n^2}$	$m=1;\ n=0:$ $\frac{1}{\sqrt{3}\,b\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Calculul componentelor cîmpului electromagnetic.

Componentele cîmpului electromagnetic se calculează cu ajutorul relațiilor (1) ÷ (6), care scrise în coordonate cartesiene au următoarea formă : pentru modul *TM*

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -jA\frac{\beta}{h^2}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}; & H_x &= jA\frac{\varepsilon\omega}{h^2}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot e^{j(\omega t-\beta z)};\\ E_y &= -jA\frac{\beta}{h^2}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}; & H_y &= -jA\frac{\varepsilon\omega}{h^2}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^{j(\omega t-\beta z)};\\ E_z &= Au\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}; & H_z &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

iar pentru modul *TE*

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -jB\frac{\mu\omega}{h^2}\frac{\partial v}{\partial y}\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}; & H_x &= -jB\frac{\beta}{h^2}\frac{\partial v}{\partial x}\cdot e^{j(\omega t-\beta z)};\\ E_y &= jB\frac{\mu\omega}{h^2}\frac{\partial v}{\partial x}\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}; & H_y &= -jB\frac{\beta}{h^2}\frac{\partial v}{\partial y}\cdot e^{j(\omega t-\beta z)};\\ E_z &= 0; & H_z &= Bv\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}. \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Rezultatele calculului sînt cuprinse în tabloul anexat.

Concluzii.

Metoda de calcul folosită conduce la soluțiile problemei numai în cîteva cazuri particulare. Pentru $n > 3$ calculele devin laborioase ; încercările pe care le-am făcut pentru a găsi pe această cale soluții corespunzătoare altor valori ale lui ξ nu au dus la rezultate pozitive. Din această cauză vor trebui folosite la investigațiile ulterioare metode de aproximație. Rezultatele deduse pot fi folosite pentru verificarea celor obținute prin aproximație în cazurile particulare tratate.

În legătură cu rezultatele calculului se pot face următoarele observații :

a) În cazul secțiunii de forma triunghiului dreptunghi isoscel modurile de propagare reprezintă combinații ale modurilor degenerate din ghidul cu secțiune patrată de latură *a*. Valorile proprii sînt date de aceeași expresie ca și la ghidul patrat, cu restricția că pentru modul *TM* se exclude cazul $m = n$.

b) În cazul secțiunii de forma triunghiului dreptunghi cu unghiurile de 30^0 și 60^0 și de forma triunghiului echilateral modurile de propagare reprezintă combinații ale modurilor degenerate din ghidul de secțiune dreptunghiulară de laturi *3a* și *b*.

c) În cazul modului de propagare *TE* la secțiunea de forma triunghiului echilateral există două moduri fundamentale degenerate, unul din ele prezentînd simetrie față de axa *Oy*, iar celălalt prezentînd antisimetrie față de aceeași axă. Acest lucru l-am semnalat într-un articol pre-

cedent [2], unde am calculat prin metode de aproximație frecvențele critice fundamentale în cazul secțiunilor de forma triunghiului isoscel. Valoarea proprie corespunzătoare acestui caz este egală cu $\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{b^2}$.

d) În urma rezultatelor obținute s-ar părea că e posibilă construirea funcțiunilor proprii și pentru triunghiul isoscel cu unghiurile egale de 30^0 și 60^0 pe baza soluției corespunzătoare triunghiului dreptunghi cu unghiurile de 30^0 și 60^0. Sistemul de ecuații (24÷27) se poate rezolva însă numai pentru modurile *TM* antisimetrice și *TE* simetrice, astfel încît nu se poate obține soluția completă în acest caz. Din acest sistem de soluții lipsesc și modurile fundamentale, care prezintă importanța practică cea mai mare.

e) Rezultatele obținute arată că ghidurile de undă triunghiulare pot fi folosite în practică, în locul celor dreptunghiulare sau circulare. De exemplu ghidul cu secțiunea de forma triunghiului dreptunghi isoscel de catete a are aceeași frecvență critică fundamentală (pentru modul *TE*), aceeași arie a secțiunii și aproximativ același perimetru al secțiunii ca și ghidul dreptunghiular cu dimensiunile transversale a și $a/2$, folosit pe scară largă în tehnica undelor centimetrice. Ghidurile triunghiulare au în plus unele avantaje constructive.

Catedra de Bazele Teoretice
ale Electrotehnicii I
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *A. I. Iaşchin* — Об одном методе приближенного расчета волноводов треуголного и трапецевидного сечения. Радиотехнича окт. 1958.
[2] *A. Millea* — Calculul cu aproximație al frecvențelor critice ale ghidurilor de undă cu secțiune poligonală. Buletinul Institutului Politehnic, București, 1958, nr. 3.
[3] *J. V. Rayleigh* — Теория звука. Москва, 1955.
[4] *T. Kahan* — Valeurs propres multiples dans les guides d'ondes à section rectangulaire. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1946, nr. 7.
[5] *R. Răduleț și un colectiv* — Bazele Teoretice ale Electrotehnicii, Vol. V, cap. „Ghiduri de undă". Litografia Ministerului Învățămîntului, București, 1959 (sub tipar).

ВОЛНОВОДЫ ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

(Краткое содержание)

Выводятся точные выражения электромагнитного поля и критических частот для волноводов с сечением в виде прямоугольного равнобедренного треугольника, прямоугольного треугольника с углями 30° и 60° и равностороннего треугольника.

TRIANGULAR WAVEGUIDES

(Summary)

The exact formulae for the components of the electromagnetic field and the critical frequencies are given for wave guides having cross sections of isosceles rectangular triangle, rectangular triangle with one angle of 30° and equilateral triangle shapes.

GUIDES D'ONDES À SECTION RECTANGULAIRE

(Résumé)

On déduit les expressions exactes des composantes du champ électromagnétique et des fréquences de coupure pour les guides d'ondes dont la section est un triangle rectangle ayant les angles de 30° et 60° ou un triangle équilatéral.

HOHLLEITER MIT DREIECKIGEM QUERSCHNITT

(Zusammenfassung)

Es werden die genauen Ausdrücke für die Komponenten des elektromagnetischen Feldes und für die Grenzfrequenzen im Falle von Hohlleitern mit Querschnitten von gleichschenkligen rechtwinkligen, von rechtwinkligen mit Winkeln von 30° und 60° und von gleichseitigen Dreiecken berechnet.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XX — 1958, Fascicola 4

RADIOCOMUNICAȚII

621.396.616

EVALUAREA ZGOMOTULUI DE FLUCTUAȚII LA UN GENERATOR MODULAT PRIN IMPULSURI ÎN POZIȚIE

de ALEXANDRU ȘPĂTARU

Zgomotul de fluctuații la un generator modulat în amplitudine prin impulsuri este dat de variațiile întîmplătoare ale intervalului de timp între apariția impulsului de comandă modulat în poziție și apariția oscilațiilor de radio-frecvență.

Pentru evaluarea acestui zgomot să considerăm că avem un șir de impulsuri modulate în poziție de semnalul util care se aplică tubului T_1 din fig. 1. Tubul T_1 închide circuitul de alimentare al tubului T_2 care generează oscilații de R.F.

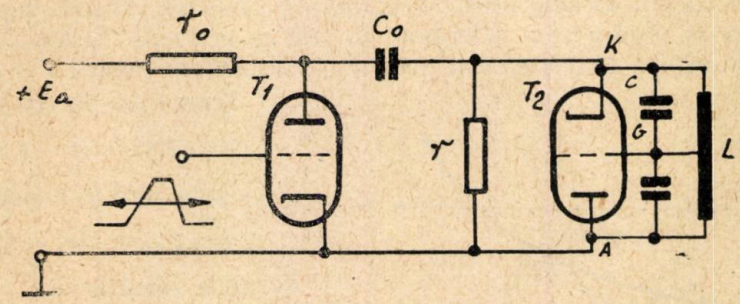


Fig. 1.

Notăm cu ξ intervalul de timp între apariția impulsului modulat t_0 și timpul t_1 cînd apar oscilațiile de R.F. (sau cînd ajung pentru prima dată la un nivel determinat).

Timpul t_0 de apariție a impulsului modulat este o variabilă aleatoare funcție de semnalul util. Timpul ξ este o variabilă aleatoare definită pe mulțimea experimentelor care constau în măsurarea intervalului de timp $t_1 - t_0$ pentru fiecare impuls modulat.

Dacă sistemul de modulație ar conține numai elemente deterministe, ξ s-ar reduce la o constantă și în acest caz parametrul care determină informația transmisă va depinde numai de semnalul de modulație aplicat, adică se poate spune că procesul de modulație nu introduce zgomote.

Pentru evaluarea lui ξ vom considera un model matematic simplificat al fenomenelor ce iau naștere în tubul generator în timpul modulației.

Presupunem că oscilațiile de R.F. încep în momentul în care curentul anodic al generatorului devine mai mare decît zero și în acest caz ξ este intervalul între acest moment și timpul t_0 cînd se aplică impulsul modulat pe grila tubului T_1.

Curentul anodic al tubului T_2 poate fi scris sub forma unei funcții $i = I(e)$ unde:

$$e = e_g + De_a - E \tag{1}$$

iar: e_g = tensiunea între grilă și catodă
e_a = tensiunea între anodă și catodă
D = coeficientul de pătrundere
E = parametru al tubului.

Funcția $i = I(e)$ se anulează pentru $e \leqq 0$

Cînd tubul este în repaus, $e_a = o$, iar e_g este o tensiune fluctuantă dată de fenomenele de agitație termică în circuitul de grilă și de emisiunea discontinuă a catodei. Această tensiune este o variabilă aleatoare pe care o notăm cu η | și în funcție de ea urmează să exprimăm valoarea lui ξ.

Presupunem că tensiunea: $De_a = v = f(t - t_0)$ variază după o lege cunoscută pe care o vom determina în cele ce urmează. Funcția $f(t - t_0)$ este nulă pentru $t \leqslant t_0$ și este monoton crescătoare pentru $t > t_0$ (fig. 2.

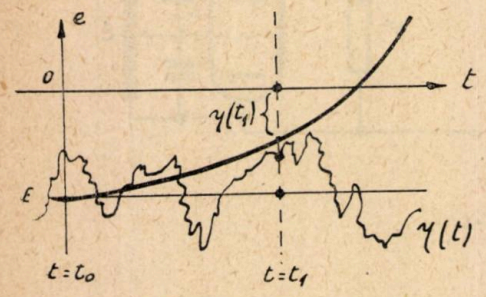


Fig. 2.

Tensiunea de comandă (1):

$$e = \eta(t) + f(t - t_o) - E$$

trece prin zero în momentul (t_1):

$$0 = \eta(t_1) + f(t_1 - t_0) - E$$

de unde rezultă că

$$f(t_1 - t_0) = f(\xi) = E - \eta(t_1)$$

Funcția aleatoare $\eta(t)$ fiind staționară proprietățile ei statistice sînt invariabile în timp deci putem scrie:

$$f(\xi) = E - \eta \tag{2}$$

iar

$$\xi = f^{-1}(E - \eta) \tag{3}$$

Pentru a determina unele caracteristici statistice ale variabilei aleatoare ξ vom considera „zgomotul alb" cu distribuție gaussiană produs în circuite și tub care datorită unor circuite selective sufere o transformare liniară care dă zgomotul η care la rîndul lui printr-o transformare neliniară dă zgomotul ξ.

Transformarea liniară

Generatorul echivalent de zgomot (fig. 3) poate fi considerat ca avînd un spectru de putere continuu:

$$F_0 = 4KT\,G_{ec} \qquad (4)$$

unde:

k = constanta lui Boltzman
T = temperatura absolută
G_{ec} = conductanța echivalentă de zgomot

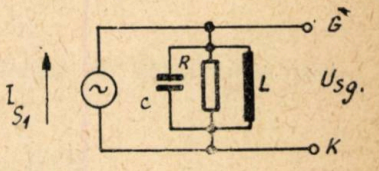


Fig. 3.

Pentru $e < o$ putem considera că $G_{ec} = \frac{1}{R}$, zgomotul tubului putînd fi neglijat din cauza sarcinei spațiale mari ce se formează în jurul grilei.

Dacă $C(\omega)$ este caracteristica de frecvență a circuitului L, R, C plasat între grilă și catodă fig. 3, spectrul de putere al zgomotului η la bornele acestui circuit este:

$$F(\omega) = F_0\,C^2(\omega) \qquad (5)$$

Introducînd notațiile:

$$\beta = 2\,\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

(în care L, R, C sînt parametrii circuitului acordat grilă-catodă, iar ω_0 este frecvența unghiulară de rezonanță a acestui circuit) putem scrie:

$$F(\omega) = F_0\,\frac{R^2}{1 + \beta^2 Q^2}$$

sau:

$$F(\omega) = \frac{F_0}{4C^2}\,\frac{1}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \qquad (6)$$

Funcția de corelație corespunzătoare acestui spectru este:

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega \qquad (7)$$

respectiv :

$$B(\tau) = \frac{F_0}{8\pi C^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega \tau}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} d\omega$$

facem schimbarea de variabilă ω în $\omega_0 - \omega$ și avem :

$$B(\tau) = \frac{F_0}{8\pi C^2} \int_{-\infty}^{\omega_0} \frac{\cos(\omega_0 - \omega)\tau}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega \tag{8}$$

fiindcă lărgimea de bandă a spectrului $F(\omega)$ este mică față de ω_0 respectiv întreaga energie este concentrată în jurul frecvenței ω_0, fără a face o eroare apreciabilă putem extinde la infinit limita superioară a integralei (8) care devine :

$$B(\tau) = \frac{F_0 \cos \omega_0 \tau}{8\pi C^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega \tau}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega \tag{9}$$

de unde :

$$B(\tau) = \frac{F_0}{8\alpha C^2} e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau \tag{10}$$

Dispersia variabilei aleatoare η este :

$$\sigma^2 = B(0) - B(\infty)$$

unde :

$$B(\infty) = \lim_{\tau \to \infty} B(\tau) = 0$$

deci :

$$\sigma^2 = B(0) = \frac{F_0}{8\alpha C^2} = \frac{KT}{C} \tag{11}$$

Valoarea medie a lui η este nulă fiindcă $m_1\{\eta\} = B(\infty)$ iar $B(\infty) = 0$

Distribuția variabilei aleatoare η este gaussiană fiindcă η provine dintr-un proces gaussian printr-o transformare liniară, deci :

$$w(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \tag{12}$$

(unde y este o valoare din mulțimea valorilor pe care le poate lua η).

Transformarea neliniară

Pentru determinarea funcției $v = f(t - t_0)$ care ne dă variația în timp a tensiunii anodice aplicate generatorului, ne referim la circuitul echivalent reprezentat în fig. 4 unde $\varrho(t)$ este rezistența internă a tubului T_1.

Prin aplicarea impulsului modulat pe grila tubului T_1 rezistența internă $\varrho(t)$ variază de la valori foarte mari la valori foarte mici, din cauza curburii caracteristicei curentului anodic fig. 5. În jurul anulării curentului anodic caracteristica tubului T_1 poate fi considerată ca fiind parabolică. În acest caz:

$$i_a = k\,[a\,(t - t_0)]^2 \qquad (13)$$

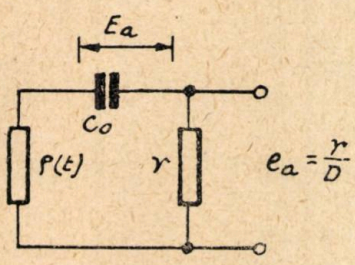


Fig. 4.

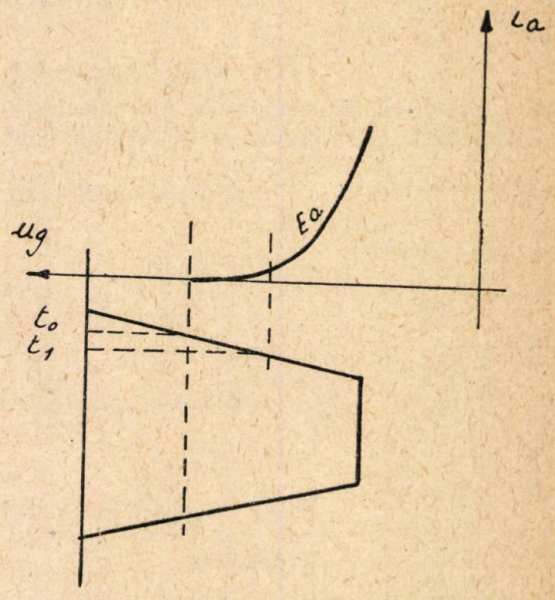


Fig. 5.

unde (k) este o constantă a tubului iar (a) este panta frontului impulsului modulat.

Notînd:

$$k\,a^2 = A \qquad (14)$$

avem:

$$i_a = A\,(t - t_0)^2 \qquad (15)$$

iar rezistența echivalentă

$$\varrho\,(t - t_0) = \frac{E_a}{A}\,(t - t_0)^{-2} \qquad \text{pt } t > t_0 \qquad (16)$$

și

$$\varrho = \infty \qquad \text{pt } t \leq t_0$$

Din fig. 4, avem:

$$v = D\,e_a = D\,\frac{\gamma\,E_a}{\gamma + \varrho\,(t - t_0)}$$

In intervalul de timp $(t_1 - t_0)$ care ne interesează $\varrho\ (t_1 - t_0)$ este mare față de γ așa că putem scrie

$$v = D\gamma E_a \frac{1}{\varrho\ (t - t_0)} = D\gamma A\,(t - t_0)^2 \tag{17}$$

notînd cu $B = D\ \gamma\ A$ avem:

$$v = f\,(t - t_0) = B\,(t - t_0)^2 \tag{18}$$

sau:

$$f\,(t_1 - t_0) = f\,(\xi) = E - \eta = B\,\xi^2 \tag{19}$$

Cunoscînd densitatea de probabilitate a lui η (12) și funcția de transformare (19) pentru a determina densitatea de probabilitate a lui ξ

$$W\,(x) = w\,(E - y) \left| \frac{dy}{dx} \right| \tag{20}$$

din (19) avem:

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = 2\,B\,|\,x\,|$$

deci:

$$W\,(x) = \frac{2\,B\,|\,x\,|}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}}\, e^{-\frac{(y-E)^2}{2\,\sigma^2}}$$

sau:

$$W\,(x) = \frac{2\,B}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}}\, x\, e^{-\frac{B^2}{2\,\sigma^2}\,x^4} \text{ pt } x > 0 \tag{21}$$

$$W\,(x) = 0 \qquad\qquad \text{pt } x \leqq 0$$

Momentul inițial de ordinul I a lui ξ (valoare medie) este:

$$m_1\,\{\xi\} = \frac{2\,B}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}} \int_0^\infty x^2\, e^{-\frac{B^2}{2\,\sigma^2}\,x^4}\, dx$$

$$m_1\,\{\xi\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{\frac{2\,\sigma^2}{B^2}}\, \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cong \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \sqrt{\frac{\sigma}{B}} \tag{22}$$

unde Γ este funcția euleriană de speța doua.

Momentul inițial de ordinul II, a lui ξ este

$$m_2\,\{\xi\} = \frac{2\,B}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}} \int_0^\infty x^3\, e^{-\frac{B^2}{2\,\sigma^2}\,x^4}\, dx$$

$$m_2\,\{\xi\} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, \frac{\sigma}{B} \tag{23}$$

Momentul central de ordinul II a lui ξ (dispersia) este:

$$B^2 = m_2 - m_1^2$$

$$\beta^2 = \frac{\sqrt{2\,\pi} - 1}{2\,\pi}\, \frac{\sigma}{B} \tag{24}$$

Determinarea raportului semnal-zgomot

Conform teoremei lui Kotelnicov dacă F este cea mai înaltă frecvență din spectrul semnalului, acesta este perfect determinat dacă se cunosc ordonatele într-o serie de puncte distanțate la intervale de timp egale cu $\frac{1}{2F}$.

În sistemele cu modulație prin impulsuri se iau probe din semnal la intervale de timp de $\frac{1}{2F}$ și acestor probe le corespunde prin procesul de modulație (în cazul ideal în absența zgomotelor) deviații proporționale ale poziției în timp a impulsului de R.F. Să notăm aceste deviații cu θ_n. În realitate din cauza zgomotelor din sistemul de modulație apare și o deviație parazitară ξ_n a frontului impulsului de R.F.

Din cauză că intervalele de timp $\frac{1}{2F}$ la care se iau probele sînt mult mai mari decît timpul de corelație al zgomotului η putem considera că variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sînt independente fiindcă derivă din η printr-o transformare neliniară (fără inerție).

Dacă considerăm un receptor ideal care să nu introducă zgomote vom avea după demodulare numai zgomotul produs la emisie (constanta demodulatorului fiind egală cu unitatea):

$$u_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \frac{\sin(2\pi F t - n\pi)}{2\pi F t - n\pi} \tag{25}$$

Dispersia acestui proces este:

$$u_p^2(t) = \xi_n^2 = \beta^2 \tag{26}$$

Semnalul util poate fi pus și el sub forma:

$$u_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n \frac{\sin(2\pi F t - n\pi)}{2\pi F t - n\pi} \tag{27}$$

Dacă Δ este deviația maximă (valoarea de vîrf) admisă pentru impulsul modulat (aleasă astfel ca să nu avem diafonie cu canalele alăturate) se poate considera că valoarea medie pătratică a deviației date de semnal este $\sigma_s = \frac{\Delta}{4}$ respectiv dispersia semnalului este:

$$\overline{u_s^2(t)} = \theta_n^2 = \sigma_s^2 = \frac{\Delta^2}{16} \tag{28}$$

Definim raportul semnal-zgomot ca fiind raportul între puterea semnalului și puterea zgomotului

$$p = \frac{P_s}{P_p} = \frac{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u_s^2(t)\,dt}{\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u_p^2(t)\,dt} = \frac{\overline{u_s^2}}{\overline{u_p^2}} = \frac{\sigma_s^2}{\beta^2} \tag{29}$$

notînd cu:

$$b = \frac{\pi}{8\sqrt{KT}\left(\sqrt{2\pi} - 1\right)}$$

avem:

$$p = b\,\Delta^2 D \gamma a^2 \sqrt{c} \qquad (30)$$

Din cele precedente se constată că pentru a avea un raport semnal-zgomot cît mai mare este necesar ca:

— frontul impulsului de comandă să fie cît mai mare (respectiv un „a" mare),

— rezistența γ de încărcare a condensatorului C_0 să fie cît mai mare,

— rezistența internă a tubului de comandă să fie cît mai mică (coeficientul de pătrundere D mare și pantă mare),

— capacitatea C de acord a circuitului de grilă să fie cît mai mare.

Valorile parametrilor de mai sus se stabilesc pe bază de compromis între cerințele unui raport semnal zgomot, ridicat și alte considerente cerute de buna funcționare a sistemului.

Pentru o evaluare mai exactă a sgomotului introdus în procesul de modulație ar trebui să se țină seama și de fluctuațiile amplitudinii și fazei oscilațiilor, date de suflul tubului generator [2], [3].

Catedra de Radiocomunicații
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *Б. Р. Левин.* Теория случаиных процессов и ее применение в радиотехнике.

[2] *И. С. Гоноровскии.* Радиотех. и электроника Н. 10, 1957.

[3] *I. L. Stewart.* Proc. I.R.E. Nr. 3. 1956.

ОЦЕНКА ФЛЮКТУАЦИОННЫХ ПОМЕХ МОДУЛЯТОРА В ФАЗО-ИМПУЛЬСНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

(Краткое содержание)

Приводится расчет флюктуациоиных помех вносимых при фазоимпульсной модуляцией радиочастоты, считая что помехи вызваны случайными отклонениями периода повторении радиоимпульса, при отсутствии модулирующего сигнала.

Произведен расчет дисперсии этих отклонении. Из соотношения сигнал-помеха сделаны некоторые выводы касающиеся подбора параметров модулирующей системы.

THE ESTIMATION OF RANDOM NOISE OF AN AMPLITUDE MODULATED GENERATOR WITH PULSE-POSITION MODULATION

(Summary)

A computation of the random noise of an amplitude modulated generator with pulse-position modulation is presented, assumig that the noise is given by random variations of repetition period of H.F. pulse, in absence of the modulating signal.

The dispersion of those variations is computed and from signal — noise ratio some deductions about parameters choice are made, on the basis of obtained results.

ESTIMATION DU BRUIT DE FLUCTUATIONS D'UN GENERATEUR MODULÉ EN AMPLITUDE PAR DES IMPULSIONS MODULÉES EN POSITION

(Résumé)

On fait le calcul de bruit de fluctuations, introduit par le procés de modulation en amplitude d'un onde de radiofréquence, par des impulsions modulées en position, tenant compte du fait que le bruit est produit par les variations ératiques de la fréquence de repétition de la radioimpulsion, pendant l'absence du signal de modulation.

On fait calculer la dispersion de ces valeurs et du raport signal/bruit, à l'aide des résultats obtenus, on fait resortir les conclusions sur le choix des paramètres du système de modulation.

ABWERTUNG DER MODULATIONSGERÄUSCHE BEI EINEM AMPLITUDENMODULIERTEN GENERATOR, DURCH PHASENMODULIERTE PULSE

(Zusammenfassung)

Man berechnet die Modulationsgeräusche die bei der Amplitudenmodulation einer Hochfrequezwelle durch phasenmodulierte Pulse entstehen, mit der Berücksichtigung darauf dass das Rauschen durch die zufällige Änderungen der Wiederholungsperiode des Radiopulses, in Abwesenheit des Modulationssignals erzeugt wird.

Es wird die Dispersion dieser Änderungen berechnet und aus dem Signal/Geräusch Verhältniss, auf Grund der erhaltenen Ergebnisse, sind Schlüsse über die Wahl der Systemparameter gezogen.

BIBLIOTECA CENTRALĂ A UNIVERSITĂȚII

Tipografia Învățământului — c. 820

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de pronume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.